NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 100, mayo de 2019, páginas 57-60

Esquemas conceptuales en relación con el ángulo y el radián

Félix Martínez de la Rosa
(Universidad de Cádiz. España)

1. Introducción

Como docente en asignaturas de Matemáticas de primer curso en la Universidad, imparto clase a los estudiantes de nuevo ingreso. Este hecho me permite ser testigo de las destrezas, habilidades y carencias, de tipo matemático, con que se incorporan a sus nuevos estudios, procedentes mayoritariamente del bachillerato.

Los profesores de Matemáticas de bachillerato tienen ante sí dos retos que a veces resultan contradictorios. Uno es enseñar bien los conceptos. El otro es preparar bien a sus estudiantes para las pruebas de ingreso en la Universidad. Pero explicar bien cada concepto requiere de un tiempo precioso que se resta a los temas y ejercicios que tienen especial incidencia en esas pruebas. Por otro lado, a los profesores se les juzga por los resultados de sus estudiantes. La conclusión es clara: hay que elegir y en esta elección pierden los conceptos.

En las pruebas de ingreso a la Universidad no se valora la comprensión de los conceptos matemáticos. Lo que hace que se consiga un buen resultado en Matemáticas es recordar una serie de fórmulas, procedimientos y técnicas para resolver problemas. Siendo fundamental la soltura y habilidad para el cálculo: saber simplificar y despejar, recordar las identidades notables, etc.

Hay conceptos matemáticos que se estudian por primera vez en los cursos de bachillerato. Estos suelen explicarse de forma somera, principalmente por problemas de tiempo. Pero hay otros muchos que se explican a lo largo de la primaria y secundaria, donde hay que hacer frente a la falta de interés o de madurez de los estudiantes. Estas circunstancias hacen que el profesor opte por simplificar sus explicaciones apoyándose en imágenes sencillas, o en técnicas elementales, que en ocasiones resultan incompletas e incorrectas. Con esto se consigue una aproximación rápida al concepto pero, como contrapartida, se generan ideas falsas que pueden distorsionar el proceso de enseñanza y aprendizaje, e impedir la asimilación correcta de los nuevos conceptos que se deben edificar sobre los antiguos.

Por ejemplo, el concepto de tangente a una curva puede quedar condicionado por la imagen de la tangente a una circunferencia, que se suele emplear para visualizarlo en cursos iniciales. O el uso de tablas de valores, con las que se representan gráficas de funciones en la secundaria, hace que en cursos superiores, algunos estudiantes sigan con la inercia de emplearlas, por mucho estudio de la función que se haya hecho.

Resulta muy difícil hacer comprender a los estudiantes que algunas de las ideas que tienen arraigadas desde hace mucho tiempo no son las más adecuadas, o directamente son falsas. El término "esquema conceptual" o "concept image" (Tall y Vinner, 1981) se utiliza para describir la estructura cognitiva completa (incluyendo todas las imágenes mentales, propiedades y procesos relacionados) que un individuo asocia a un concepto. Cuando se propone a un estudiante una tarea en relación con un concepto matemático lo más frecuente es que el estudiante actúe de acuerdo a alguna parte de su «esquema conceptual» (una imagen, una fórmula, etc.). Pero si esos esquemas contienen ideas imprecisas o equivocadas, el proceso de enseñanza y aprendizaje se resiente.

En este artículo se analizan brevemente algunos de los errores de concepto observados en los estudiantes acerca del ángulo y del radián, y se ofrecen ideas y actividades que puedan permitir la formación de esquemas conceptuales sólidos.

2. El ángulo y el radián

La definición correcta y precisa de un concepto matemático siempre ha necesitado de muchos años de laborioso estudio e investigación. Un ejemplo es el caso del ángulo. En Keiser (2004) se ofrece un estudio muy completo sobre el desarrollo histórico de este concepto y de la percepción que los estudiantes tienen de él. Hay dos definiciones de ángulo que son las más utilizadas por los estudiantes:

1. Es la figura que forman dos semirrectas con un origen común.

2. Es la porción de plano comprendida entre dos semirrectas con un origen común.

Si el esquema conceptual que un estudiante tiene acerca del ángulo consiste en la figura formada por dos semirrectas que se cortan, se originan errores de concepto relacionados con la medida del mismo. Con la primera definición, al enfatizar en las semirrectas, puede producirse el error de pensar que sus longitudes influyen en el tamaño del ángulo. Con la segunda, al resaltar la palabra porción, se anima a creer que la medida de un ángulo tiene que ver con el área de una región.

La definición más correcta es también la más larga:

3. Es el giro que describe una semirrecta alrededor de uno de sus extremos (vértice), desde una posición inicial hasta otra final. Se considera positivo si el giro es contrario al de las manecillas de un reloj, y negativo en el otro caso.

Esta definición, de tipo dinámico, da pie a utilizar una circunferencia (cuyo tamaño no importa) como guía para indicar el giro. El vértice se encontrará en su centro dando paso así a los ángulos centrales.

Una vez establecido que la medida de un ángulo no es el área de una región, ni tiene nada que ver con la longitud de sus lados, los estudiantes no tienen problemas en concebir los grados como la medida de un ángulo. Además, se acostumbran a usarlos en los típicos problemas de trigonometría relacionados con los triángulos.

Otra cuestión peliaguda es la de los radianes. En cursos superiores se parte del hecho de que el radián es un concepto bien entendido, lo cual no siempre es cierto. Esto es fácil de comprobar. Basta plantear la siguiente cuestión: si se divide una pizza en ocho partes iguales ¿el ángulo de cada porción mide más o menos que un radián?

Las funciones trigonométricas tienen su dominio en los números reales. Pero la noción de grado suele estar más arraigada y predomina sobre el radián, y esto causa confusiones al operar con esas funciones. Por ejemplo, el valor de x que resuelve la ecuación $\cos x = \frac{1}{2}$ debe expresarse en radianes. Sin embargo, no es raro que los estudiantes den como respuesta $x = 60^{\circ} + 2k\pi$, mezclando grados con radianes. También se puede observar la confusión al preguntar por los valores de $\cos 60$ y de $\cos\frac{\pi}{3}$. En el primer caso los estudiantes responden pensando en grados: identifican 60 con 60°. Pero en el segundo, no tienen dudas de que $\frac{\pi}{3}$ se refiere a la medida en radianes, porque el número π se los evoca automáticamente.

Aunque los estudiantes asocian π con los radianes y con su equivalencia en grados, 180°, la representación en la recta real les causa dudas: no están seguros si en ella el número π deben colocarlo cerca de $3{,}14$ o de 180. Estos errores de concepto son habituales, incluso en futuros profesores de matemáticas, como se desprende del exhaustivo estudio realizado en Akkoc (2008).

El radián es un concepto que puede ser explicado utilizando imágenes fáciles y claras, que propician la formación de esquemas conceptuales correctos y duraderos, como veremos a continuación. Tomemos un círculo de radio r:

Un radián es la medida de un ángulo central tal que la longitud de su arco mide r.

En otras palabras, si un ángulo mide un radián, en su arco abarcado cabe un radio. Así, en el arco que abarca un ángulo de 360° caben 2π radios, y por tanto la medida de este ángulo es 2π radianes. La relación entre grados y radianes viene dada por la fórmula:

$$\frac{360^{\circ}}{2\pi} = \frac{x\text{grados}}{y\text{radianes}}$$

Es importante establecer que la medida de un ángulo en radianes es independiente del tamaño del círculo que se use. Para ello es muy útil la siguiente actividad:

Se eligen seis círculos de distintos tamaños, se localizan sus centros y sus radios, y se lleva la longitud de cada radio sobre la circunferencia correspondiente. Cada sector circular que se obtiene corresponde a un ángulo que mide un radián. Esta actividad puede plantearse de forma manipulativa y experimental (ver por ejemplo, Moss y Wolbert, 2018), construyendo los seis círculos en cartón, recortando los seis sectores y formando las dos partes de la figura 1:

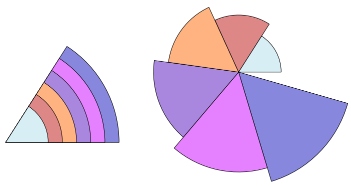

Figura 1

Superponiendo los seis sectores se visualiza que los seis ángulos miden lo mismo, aunque las porciones sean distintas. Por otro lado, situando los sectores uno al lado del otro, se visualiza que el ángulo total es menor que 360°, por lo que un radián es la medida de un ángulo de algo menos de 60°.

En los cursos iniciales de matemáticas se definen el seno o coseno de un ángulo a partir de los triángulos rectángulos, y empleando como medida el grado. En cursos posteriores, se explican la función seno y coseno que se representan en el plano coordenado empleando los radianes. Para que esta transición se entienda bien, es importante saber ubicar sobre una recta la medida en grados de un ángulo. Esto se puede hacer con la siguiente actividad:

Se parte de un círculo de radio r y de un rectángulo de longitud $2\pi r$. Sobre el rectángulo se traslada la longitud del radio las veces que sea posible, y se hacen las marcas correspondientes a uno, dos y hasta seis radianes. Por último se colocan las marcas de π, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$,…, radianes. Como en la actividad anterior, esta también puede enfocarse desde el punto de vista experimental (ver por ejemplo Eggleton, 1999), hasta obtener la figura 2:

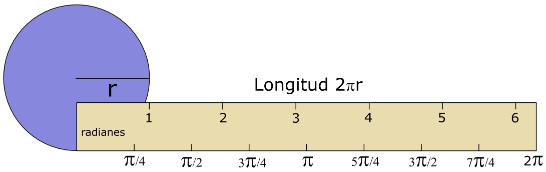

Figura 2

Por último, si el radio r mide una unidad de longitud, las marcas de 1,2,3,…, radianes se corresponderán con las medidas de longitud 1,2,3,…, y la línea representará al eje x.

3. Resumen

En los cursos iniciales de matemáticas, suelen introducirse los conceptos matemáticos con el apoyo de imágenes, a veces demasiado simplificadas. Otras veces se explican técnicas excesivamente simples para la resolución de problemas. Al hacerlo los estudiantes pueden formar unos esquemas conceptuales erróneos que dan lugar a errores de concepto. Las sutiles características de los conceptos matemáticos no siempre pueden resumirse en una imagen fácil, si lo que se quiere es explicarlos con un mínimo de veracidad: he aquí uno de los problemas de la docencia de las matemáticas. En este trabajo se plantea el tema del ángulo y del radián, y se dan imágenes que pueden hacer que el estudiante conforme esquemas conceptuales adecuados.

Bibliografía

Akkoc, H. (2008). Pre-service mathematics teachers' concept images of radian. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 39(7), 857-878.

Eggleton, P. (1999). Experiencing Radians. *Mathematics Teacher*, 92(6), 468-471.

Keiser, J.M. (2004). Struggles with developing the concept of angle: Comparing sixth-grade students' discourse to the history of the angle concept. *Mathematical thinking and learning*, 6(3), 285-306.

Moss, E.,Wolbert R. (2018).Developing the concept of a Radian. *Mathematics Teacher*, 111(4), 272-278.

Tall, D.,Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151-169.

Félix Martínez de la Rosa. Doctor en Matemáticas y Catedrático de Escuela Universitaria de Matemática aplicada en la Universidad de Cádiz. Investigaciones en educación matemática acerca las de funciones reales de una y dos variables, el uso de la visualización en la docencia de las matemáticas y la detección de errores de concepto.Email: felix.martinez@uca.es