NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 100, mayo de 2019, páginas 91-95

Las Teselaciones de Penrose en el Taller de Matemáticas

Rosa Nortes Martínez-Artero
(Universidad de Murcia. España)

1. Introducción

Taller de Matemáticas es una asignatura de 4º curso del Grado de Maestro de Primaria en la Universidad de Murcia en la “Mención de Recursos educativos para la escuela y el tiempo libre”. Tiene tres créditos y el estudiante en el transcurso de la asignatura deberá, entre otras cuestiones, conocer y elaborar actividades utilizando diversos recursos didácticos.

Cada curso a principios de la asignatura se propone a los estudiantes formar equipos de cuatro componentes y que cada uno programe un taller de matemáticas referido a bloques de contenidos de Primaria. En Nortes y Nortes (2014) se realizó un estudio con los talleres expuestos el curso 2013/14, cuyo contenido fue de lo más diverso. Los títulos de los talleres, fueron: “La geometría y el arte”, “¡Fortalece tu mente!”, “Llego tarde”, “Se me escapa el tren”, “Las matemáticas y la televisión”, “Las matemáticas y los deportes”, “¡El tiempo es oro!”, “El tráfico y las matemáticas”, “Geometría en la naturaleza”, “La medida y la ciudad”, “Matemáticas en el trabajo”, “La música como recurso matemático”, “El supermercado”, “Geometría y arquitectura” y “Las matemáticas y la fotografía”.

Taller de Matemáticas también es asignatura en la enseñanza obligatoria. Así, en la Comunidad Autónoma de Cantabria en la Orden ECD/96/2015 para la implantación de la ESO su artículo 5 va dedicado a especificaciones sobre el bloque de asignaturas de libre configuración autonómica y se incluye como materia de este bloque el Taller de Matemáticas en 1º y 2º de ESO que podrá ser impartida en todos los centros con carácter de materia de refuerzo instrumental, siendo el profesorado quien la adecue a las necesidades y características de los alumnos. Los talleres de matemáticas ayudan a la mejor comprensión de los contenidos matemáticos básicos.

El objetivo de este trabajo es presentar dos talleres realizados los cursos 2016/17 y 2017/18 obligatorios para todos los alumnos en donde se incluyen aspectos matemáticos, didácticos y actividades para desarrollar.

2. Talleres de teselaciones de Penrose

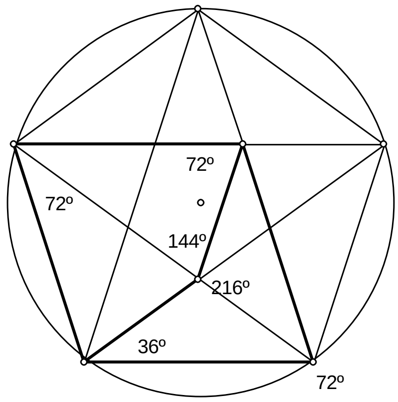
El número áureo aparece en los Elementos de Euclides en el libro IV con la siguiente definición: *Se dice que una recta ha sido cortada en extrema y media razón cuando la recta entera es al segmento mayor como el segmento mayor es al segmento menor*. Y demostró que era un número irracional de valor 1,618… que es el número áureo.

En Nortes, Lozano, Lozano, Miñano, Miñano y Nortes (2014) se incluye como actividad práctica la Proporción Áurea, partiendo de un rectángulo áureo, comprobando en la sucesión de Fibonacci la existencia del número áureo, que en la estrella de cinco puntas o pentágono estrellado, símbolo de los pitagóricos, la razón entre la diagonal y el lado del pentágono es el número áureo y que en cada triángulo isósceles que se forma al trazar las diagonales la razón entre el lado mayor y el lado menor es el número áureo. Las teselaciones de Penrose están basadas en el pentágono áureo.

Se plantea inicialmente en el Taller de Matemáticas calcular el área de cada una de las piezas de las teselas y una vez que los equipos han obtenido la parte matemática se pasa a la parte lúdica en donde cada grupo una vez que ha recortado las piezas con goma-eva (foamy), cada clase de un color, se dispone a hacer representaciones libremente, para después en la parte didáctica organizar que construyan figuras con algunas condiciones y en distintos niveles educativos y ver qué contenidos de geometría se pueden presentar. Cada equipo analiza los contenidos de Geometría de Primaria y establece una serie de actividades que expondrá al resto de estudiantes realizándose un debate posterior. Las presentaciones se acompañan de videos o diapositivas.

3. Teselación con dardo y cometa

En el pentágono áureo se señalan las piezas “dardo” y “cometa”, en donde en cada una de ellas el cociente entre el lado mayor y el lado menor es el número áureo. Considerando las dos piezas, se forma un rombo en donde el cociente entre la diagonal y el lado es el número áureo.



Dada la medida del lado mayor de la cometa o del dardo, que es lado del pentágono, el lado menor, que es la diagonal del pentágono pequeño que se forma en el interior de la estrella, se puede determinar sabiendo que su proporción es el número áureo. Así, si el lado mayor es 4 cm, el lado menor es 4/1,618 = 2,47 cm. La diagonal menor del rombo es el doble del lado por el seno de 36º, y la diagonal mayor es la suma de los lados del dardo y de la cometa, resultando: d = 4,70 cm y D = 6,47 cm y Área rombo = 15,20 cm^2. Para calcular el área de la flecha se divide en dos triángulos isósceles iguales y en cada uno de ellos la altura es igual al lado menor de la flecha por el seno de 36º, es decir: h = 1,45 cm y Área dardo = 5,8 cm^2. La relación entre el área de la cometa y el área del dardo es el número áureo.

Actividades

1. Utilizando solamente cometas, ¿cuál es el mínimo de piezas que necesitas para formar un polígono?

2. Utilizando solamente dardos, ¿cuál es el mínimo de piezas que necesitas para formar una estrella?

3. Utilizando la estrella de la actividad 2, completa la figura con una capa de cometas, ¿qué figura obtienes?, ¿es regular o irregular?, ¿cuántos ejes de simetría se pueden trazar en dicha figura? Determina el área de la figura obtenida.

---

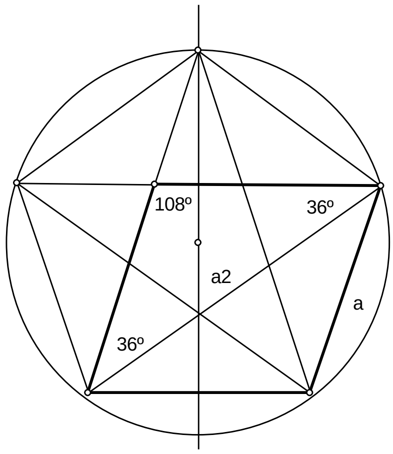
4. Con un dardo y una cometa se forma un rombo, utilizando nueve cometas y nueve dardos forma un rombo grande, ¿cuál es su área?, ¿cuánto miden sus diagonales? Comprueba que el área del rombo grande es nueve veces el área del rombo pequeño. (Nota: Utiliza como datos lo expresado antes de las actividades).

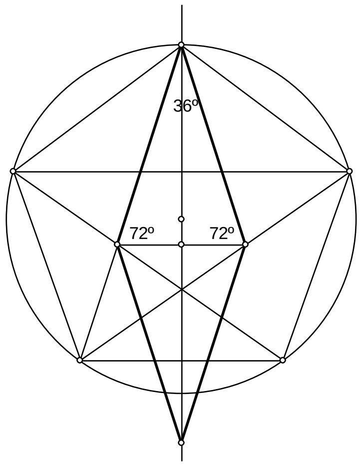
5. Forma una figura que tenga una primera capa formada por cinco cometas, una segunda por cinco dardos, una tercera formada por diez cometas y una cuarta formada cinco dardos y cinco cometas colocadas de forma alternativa. El polígono que se forma, ¿es convexo o cóncavo?, ¿tiene forma de estrella?, ¿cuántos ejes de simetría tiene?, ¿cuánto mide su perímetro?, ¿y su área?

4. Teselación con dos rombos

Son dos rombos del mismo lado y de ángulos 108º y 72º en uno de ellos y en el otro de 144º y 36º. El primero “grueso” nace de dos triángulos iguales de ángulos 36º, 36º y 108º y el segundo “fino” de dos triángulos iguales de ángulos 36º, 72º y 72º. Las dos figuras se acoplan para formar teselados.

Considerando el pentágono regular de lado 4 cm y la estrella pitagórica, el rombo “grueso” es el desarrollado anteriormente como composición de dardo y cometa. Área rombo “grueso” = 15,20 cm^2.





Para el rombo “fino” la relación entre el lado l y la diagonal menor d es el número áureo. Si el lado es 4 cm, la diagonal menor mide: 4/d =1,618 $\Rightarrow$ d = 2,47 cm. La altura del triángulo isósceles de lado igual l y desigual d, se descompone en dos triángulos rectángulos de hipotenusa el lado del rombo, es decir 4 cm, y de cateto menor la mitad de la diagonal menor, por tanto el otro cateto mayor es D/2 = 3,8 cm y Área rombo “fino” = 9,40 cm^2. La relación entre las áreas de los rombos “grueso” y “fino” es el número áureo.

Actividades

1. a) Utilizando solamente piezas de un mismo grosor forma diferentes polígonos indicando si son convexos o cóncavos, número de lados y valor de los ángulos, b) Utilizando piezas, todas menos una de un grosor y una del otro grosor, intenta hacer el máximo de figuras, c) Utilizando piezas, todas menos dos de un grosor y dos del otro, intenta hacer el máximo de figuras, d) Repite los dos casos anteriores pero cambiando el grosor de las piezas, e) De las figuras obtenidas indica las que son regulares y g) En las figuras obtenidas traza los ejes de simetría.

2. Utilizando solamente piezas rombo "grueso", ¿cuál es el mínimo de piezas que necesitas para formar una estrella?

3. Utilizando solamente piezas rombo "fino", ¿cuál es el mínimo de piezas que necesitas para formar una estrella?

4. Utilizando la estrella de la actividad 2, añade a la figura cinco rombos "finos", ¿qué figura obtienes?, ¿es regular o irregular?, ¿cuántos ejes de simetría se pueden trazar en dicha figura? Determina el área de la figura obtenida.

5. Utilizando la estrella de la actividad 3, completa la figura añadiéndole dos capas de rombos "gruesos" y una capa de rombos "finos", ¿qué figura obtienes?, ¿es regular o irregular?, ¿cuántos ejes de simetría se pueden trazar en dicha figura? Determina su área.

5. Conclusiones

Las teselaciones de Penrose constituyen un material didáctico muy útil para la enseñanza-aprendizaje de la geometría ya que permite la creación libremente de figuras a las que se irán incorporando contenidos de geometría y propiedades matemáticas con un rigor creciente y un razonamiento reflexivo. Se podrán representar figuras de tres dimensiones en el plano, se podrán conjugar a la vez las cuatro piezas básicas del teselado y a mayor creatividad más posibilidad de incorporar contenidos geométricos elementales. Se pueden plantear como una actividad de refuerzo de contenidos y dado su carácter lúdico se convierte en una combinación interesante, útil y atractiva para el aula.

También ha entrado a formar parte en Arquitectura e Ingeniería en donde Garro, Rojo, Ros y Victoria (sf) plantearon proyectar un edificio para un concurso en Dubai en donde la propuesta era envolver "un edificio en una alfombra diseñada como mosaico aperiódico de Penrose" (p. 2). Y es famoso el suelo de la Iglesia de Santa María de Mahón que tiene un diseño único con dos rombos en donde el centro lo constituye una estrella de cinco puntas de mármol de color rojo (Soto, 2015).

Las teselaciones de Penrose, que tienen una aplicación desde Primaria como material lúdico y de refuerzo de conocimientos de matemáticas, pueden despertar muchas inquietudes y ayudar a la adquisición de competencias matemáticas a lo largo de la vida.

6. Referencias

Garro, J. C., Rojo, J., Rojo, J. M. y Victoria, S. (sf). Un mosaico para Dubai. En XXX, *Jornadas Internacionales de Didáctica de las Matemáticas en Ingeniería* (pp. 333-350). Recuperado de http://www2.caminos.upm.es/Departamentos/matematicas/Fdistancia/MAIC/CONGRESOS/JORNADAS%201/126%20Comunicaci%C3%B3n%20TESELACIONES%20DUBAI.pdf

Nortes, A., Lozano, F., Lozano, F., Miñano, A., Miñano, I. y Nortes, R. (2014). *Actividades prácticas de Matemáticas y su didáctica 2*. Madrid: CCS.

Nortes, R. y Nortes, A. (2014). Los talleres en la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas, En J. I. Alonso, C. J. Gómez y T. Izquierdo (Eds.), *La formación del profesorado en Educación Infantil y Educación Primaria* (pp. 91-104). Universidad de Murcia.

Orden ECD/96/2015, de 10 de agosto, por la que se dictan instrucciones para la implantación de la ESO en la Comunidad Autónoma de Cantabria, *BOC*, *158*, de 18 de agosto de 2015, 22696-22784.

Soto, E. (2015). Un singular pavimento matemático. Recuperado de http://www.elmundo.es/baleares/2015/03/03/54f5af2ee2704ed0548b45b4.html

Rosa Nortes Martínez-Artero. Facultad de Educación, Universidad de Murcia. Líneas de investigación relacionadasa con la formación inicial de profesores de primaria.
Email: mrosa.nortes@um.es.