UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2007, Número 11, páginas 19-57
ISSN: 1815-0640

Análisis de errores de estudiantes y profesores en expresiones combinadas con números naturales

Vicente Carrión Miranda

Resumen

Se observa en estudios con profesores y alumnos la presencia de errores en las clases de matemáticas, relacionados con los contenidos de los planes de estudio que guían la práctica docente, en los diferentes niveles escolares. Son un problema grave en la enseñanza de la matemática y en otras áreas del conocimiento. Es importante contemplar el análisis de esta problemática en el entorno social de los profesores y estudiantes y considerar sus consecuencias a futuro. Se exponen un diagnóstico y un análisis de los errores en el tratamiento de expresiones numéricas simples que incluyen operaciones aritméticas con números naturales, realizado con profesores de matemáticas de los niveles básico y medio; y con estudiantes de esos mismos niveles y del universitario. A partir de un ejemplo se clasifican e interpretan y se analizan las causas posibles que los provocan. Se revisan los tipos y frecuencias de errores cometidos por los individuos.

Abstract

Research studies that involve teachers and students use of mathematical knowledge in problem solving activities have identified several types of errors. These errors often become an obstacle to prepare and work on successful learning activities to comprehend mathematical concepts. In this research I develop and use an instrument to diagnose and analyze of teachers and student's errors that appear while working on simple numeric expressions that include arithmetic operations with natural numbers. Thus, errors are classified and interpreted, in terms of identifying their possible causes or origin. Some examples are show to illustrate the most frequent errors that teacher and students exhibit in solving simple tasks that involve the hierarchy of operations and the use of basic number properties.

Introducción

El análisis de las producciones de los estudiantes nos lleva al análisis de sus aciertos y errores. Con relación a los aciertos en los procedimientos, es importante saber qué medios han utilizado para alcanzar resultados satisfactorios. Existen, por lo general, varios caminos posibles para lograr el objetivo, siguiendo etapas intermedias. Esto demanda un análisis. ¿Qué camino es el más simple para el estudiante?, ¿cuál es el más corto?, ¿cuál es el que siguen la mayoría de los alumnos de un determinado nivel?, ¿por qué la mayoría sigue, exactamente, ese camino? En lo que respecta a los errores, la necesidad de analizarlos es evidente. Sólo mediante un análisis se puede saber qué dificultades enfrenta el alumno. Esto permite determinar los medios para corregir la situación (Vergnaud, 1991).

Las concepciones erróneas señalan una línea de pensamiento que causa errores procedentes de una idea incorrecta. Algunos estudios informan sobre la clasificación de errores y su frecuencia; sin embargo, esto no implica el examen de sus orígenes.

Se considera que el error es un conocimiento deficiente, insuficiente, imperfecto, defectuoso, escaso o incompleto; una desviación de un conocimiento establecido. Siempre existe la posibilidad de la presencia, la permanencia y la persistencia de errores en la adquisición, desarrollo y consolidación del conocimiento científico. El tratamiento adecuado de errores puede contribuir a mejorar el proceso de aprendizaje. Los estudiantes pueden desarrollar actividades para explicar y dar sentido a sus errores y fomentar la motivación del aprendizaje.

Los errores ofrecen al profesor de matemáticas la posibilidad de organizar un ámbito de acción ligado a su práctica escolar, relacionado, en forma directa, con bases teóricas de la educación matemática. Pueden ser punto de partida para orientar el aprendizaje de la materia. Todo proceso de instrucción potencia la generación de errores. La interpretación sólo como instrumento para diagnosticar y corregir anomalías toma en cuenta, parcialmente, las posibilidades que ofrecen.

Debemos desechar la propensión a censurar los errores atribuyéndolos sólo a los estudiantes, pensando que éstos son la única variable. Existen otras del proceso educativo, el profesor, los programas y planes de estudio, la escuela, las condiciones en que se desarrolla la tarea escolar o los ambientes cultural y social.

La consideración de errores en el aprendizaje es una tarea compleja. Requiere de la atención del pronóstico, de sus implicaciones en el proceso de aprendizaje y en el ámbito social. Es importante reflexionar en la herencia y reproducción de los errores de la población escolar, de todos los niveles, y en las influencias y consecuencias que siguen a esta práctica anómala. Considérese, por ejemplo, el número de alumnos que, en cada ciclo escolar, atiende un profesor que comete errores aritméticos. Reflexionemos en las consecuencias que, para un país, ocasiona formar profesionales con un aprendizaje en un ambiente de errores.

Marco teórico

Las oportunidades de los estudiantes para aprender matemáticas dependen del entorno, del tipo de tareas y del discurso en que participan. Lo que aprenden está sujeto a cómo se involucran en las actividades matemáticas. Esto determina las actitudes que tienen hacia la disciplina. En esa perspectiva, los errores forman parte de las producciones de los alumnos. Por lo general, son estables en el proceso de aprendizaje de la materia, en los distintos niveles del sistema educativo. Los profesores piensan que las respuestas incorrectas a situaciones planteadas a sus alumnos son deficiencias, o fracasos, en el logro de los objetivos. Aun cuando los errores tienen procedencias distintas se considera, por lo general, que emanan de un esquema cognitivo inadecuado del alumno.

Todo proceso de instrucción es, potencialmente, generador de errores. Pueden presentarse en forma ocasional, por azar; éstos son errores esporádicos provocados por descuidos en las producciones de los estudiantes. Otros surgen en un marco conceptual consistente, basado en conocimientos adquiridos previamente. Son sistemáticos. Favorecen una comprensión distorsionada de los conceptos. Cuando el estudiante los utiliza, piensa que lo hace en forma correcta. Los errores sistemáticos propician la creación de patrones de comportamiento equivocados en la ejecución de las tareas. Son patrones consistentes de errores. La consistencia es en dos niveles, individual: los sujetos muestran regularidad en el modo de realizar tareas y resolver problemas matemáticos similares. También hay consistencias de carácter colectivo que cometen personas diferentes en ciertas etapas de su desarrollo educativo.

Rico (1994) agrupa los polos que articulan los estudios e investigaciones recientes, relacionados con errores en el aprendizaje de la matemática, en las siguientes categorías, no excluyentes:

- Estudios relativos al análisis de errores, causas que los producen o elementos que los explican y taxonomías y clasificaciones de errores. Se sustentan en alguna teoría psicológica, o psicopedagógica, que proporciona un marco explicativo y a la que el análisis de errores ofrece una metodología adecuada para aumentar su contenido empírico. Incorporan las aproximaciones teóricas hechas desde un planteamiento epistemológico, o estrictamente matemático, que establecen causas estructurales para los errores, debidas a la naturaleza del conocimiento matemático.
- Estudios dedicados al tratamiento curricular de los errores en el aprendizaje de la matemática. Incluyen los trabajos dedicados a la organización didáctica de su enseñanza. Una de sus líneas de trabajo, la enseñanza diagnóstica, trata de prever los errores, detectarlos y proponer medios para su corrección. También involucran propuestas donde los errores son parte indispensable para fomentar el estudio e investigación de los contenidos matemáticos. Comprenden este apartado los estudios sobre el papel que desempeñan en la evaluación y en las valoraciones que deben realizarse sobre las producciones de los alumnos.
- Estudios dedicados a determinar qué es lo conveniente que aprendan los profesores en formación con relación a los errores que cometen los alumnos. Se relacionan con la formación del profesorado y con el papel que tienen la observación, análisis, interpretación y tratamiento de los errores, en el proceso de formación de los alumnos.
- Trabajos de carácter técnico que implementan y sostienen determinada clase de análisis sobre errores. Se incluyen en este apartado técnicas de análisis para contrastar hipótesis alternativas que justifican el origen o causa de errores.

Algunos estudios e investigaciones en educación matemática incluyen métodos para examinar los errores en el aprendizaje de la matemática. Un ejemplo utilizado en este trabajo es el de Mulhern (1989), citado en Rico (1994), establece cuatro categorías que se describen a continuación:

- Contar el número de soluciones incorrectas para cada problema. Este método, que tiene un valor diagnóstico limitado ha predominado en la enseñanza.
- Análisis de los tipos de errores cometidos. Esta técnica implica usualmente clasificarlos, examinar los distintos niveles de separación del conocimiento desviado y hacer inferencias sobre los factores que conducen al error.
- Análisis de patrones de error. Tales análisis pueden revelar errores sistemáticos que son causas de concepciones inadecuadas; o bien, al variar aspectos de las tareas. Los patrones de error que resultan pueden proporcionar claves sobre las estrategias utilizadas.
- Construir problemas de modo que puedan provocar errores en los individuos. El investigador observa los patrones de error realizados, especula sobre sus posibles causas y construye sistemáticamente nuevos problemas que induzcan a errores similares.

Según Oser, H. & Spychiger, M. (1999), citado por Heinze (2005), un error es un proceso, o una acción, que no obedece a la norma. Es necesaria la identificación de la línea de demarcación para verificar el proceso correcto y que la acción respete la norma. En otras palabras, se requieren los errores para afinar la idea individual sobre lo que es falso y lo que es correcto, según una norma dada. Si comparamos esto con la función de los ejemplos y contraejemplos, para el aprendizaje de conceptos matemáticos, los errores juegan el papel de contraejemplos. No es suficiente que un individuo sepa lo correcto; debe saber lo que es incorrecto porque, de esta manera, se puede identificar el punto donde termina lo correcto y empieza lo incorrecto. Desde esta perspectiva, el conocimiento de acciones y procesos incorrectos es necesario. Esta práctica de conocimiento negativo completa el conocimiento de acciones y procesos correctos; es decir, la experiencia positiva. En consecuencia, los errores son esenciales para la adquisición de conocimiento negativo y, por consiguiente, son componentes necesarios del proceso de aprendizaje. Sin embargo, cometer un error no significa adquirir automáticamente experiencia negativa que pueda usarse para prevenir errores posteriores. Para usar un error de manera productiva, es necesario que un individuo pueda comprender, analizar y corregir el error y usarlo para desarrollar estrategias de prevención de errores nuevos. La descripción anterior pone en claro que la experiencia en el conocimiento negativo, con su papel positivo de errores, corresponde a una visión constructivista de aprendizaje. Mientras que el acercamiento conductista evita los errores e intenta enfatizar actividades sólo exitosas de los estudiantes; es decir, es importante sólo el conocimiento positivo. Los errores son necesarios e inevitables y los comprende como oportunidades para el aprender.

Heinze, A. (2005) afirma que aunque se aceptan errores como una parte natural del proceso de aprendizaje, para los alumnos, es desagradable incurrir en ellos, o ser sorprendidos cometiendo errores. Este hecho lo basa en dos razones; por una parte, hay una componente afectiva, es posible que el error signifique una afrenta. Por otro lado, los errores muestran evidencia de fallas en cierta competencia individual que, para los alumnos, representan desventajas al ser evaluados. Es obvio que hay una diferencia entre el manejo de error en situaciones en privado o públicamente. Si el error de un individuo se discute en el grupo, puede sentir que se le exhibe. Si el profesor discute los errores con un estudiante en situación privada, puede haber oportunidad para el progreso individual del aprendizaje. La contribución de Heinze se enfoca en aspectos cognoscitivos y afectivos del manejo del error en procesos del aula, desde la perspectiva del estudiante y del observador. Dirige su investigación a la percepción del estudiante en actividades con manejo del error en el aula. Su estudio fue guiado por las preguntas siguientes:

- ¿Cuál es la percepción de los estudiantes con respecto al manejo del error en las lecciones de matemáticas? ¿Qué piensan los estudiantes sobre la conducta del maestro cuando se les intimida por incurrir en errores en situaciones públicas?
- ¿Cómo tratan los estudiantes individualmente sus propios errores? ¿Usan los errores como una oportunidad de aprendizaje?
- ¿Qué tipo de errores son "permitidos" o "prohibidos" en la percepción de los estudiantes (En el sentido negativo, desde el punto d vista del profesor)?

Para investigar el conocimiento del estudiante relacionado con los errores Lannin J., Townsend, B. & Barker D. (2006) desarrollaron un marco conceptual que llamaron *ciclo reflexivo de análisis del error*. Describen el proceso que los estudiantes siguen cuando examinan los errores que cometen. Un estudiante reconoce que ha incurrido en un error y elige entre ignorar la fuente o considerar las causas potenciales que lo originan. Si atribuyó el error a una, o varias fuentes, el estudiante intenta reconciliarse con él para eliminar el conflicto cognoscitivo que experimenta. Después de llevar a la práctica estrategias para reconciliarse con el error lo trata con una de las tres maneras siguientes:

- Se reconcilia el error con éxito y terminan el ciclo.
- Detiene el proceso de la reconciliación sin resolverse el error y termina.
- Reconocen que la fuente original de atribución del error es incorrecta y busca otras fuentes potenciales de error.

Los autores examinaron tres preguntas importantes para aclarar cómo los estudiantes tratan el conflicto cognoscitivo que experimentan cuando examinan sus errores:

¿Qué factores contribuyen a que reconozcan sus errores?

¿A qué causas potenciales atribuyen sus errores?

¿Qué estrategias utilizan para reconciliarse con sus errores?

Las direcciones que guían el desarrollo de este trabajo se basan en el segundo y tercer incisos de los métodos de análisis de errores de Mulhern (1989), incluidos en la primera categorías dada en Rico (1994). También se toman en cuenta las estructuras de los números naturales y enteros. Se consideran, esencialmente, la sintaxis de la aritmética, la noción de operación aritmética y los procesos algorítmicos y el desarrollo de la noción de estructura numérica a través de actividades; orientaciones incluidas en Linchevsky (1995). El desarrollo de la noción de estructura numérica a través de actividades requiere de lo siguiente:

a) **Orden de las operaciones**. En pre-álgebra se puede comenzar a tratar el orden de las operaciones trabajando ejercicios que, con el uso de reglas, conduzcan a lograr la unicidad de las respuestas. La prioridad de los operadores aritméticos determina el orden en que han de realizarse las operaciones en una expresión aritmética. Esta jerarquía se determina por el proceso de abstracción que relaciona una operación con otra: la multiplicación se convierte en una síntesis de la operación aditiva y la división es la operación inversa de la multiplicación; la potencia en una síntesis de la multiplicación y la radicación es la operación inversa de la potencia. En consecuencia, potencias y raíces tienen prioridad en los cálculos, le siguen multiplicaciones y divisiones y, finalmente, sumas y restas. Si coinciden varios operadores de igual prioridad en una expresión aritmética el orden de ejecución es de izquierda a derecha, tal como se lee un texto.

En la *Tabla 1* se exhibe la prioridad de las operaciones. Las letras ***a*** y ***b*** son los operandos y representan números reales.

Operador	Operación	Ejemplos	Prioridad
$+$	Suma	$a+b$	3
$-$	Resta	$a-b$	
$\times$, $\cdot$, $*$	Multiplicación	$a\times b$, $a\cdot b$, $a*b$	2
$\div$, /	División	$a\div b$, a/b	
$\square^{\square}$, $\wedge$	Potenciación	a^b, $a\wedge b$	1
$\sqrt{\ }$, $\square^{\square}$, $\wedge$	Radicación	$\sqrt[b]{a}$, $a^{\frac{1}{b}}$, $a\wedge\frac{1}{b}$	

Tabla 1

Los operadores aritméticos permiten la realización de cálculos, utilizan operandos y proporcionan resultados numéricos. Los estudiantes deben procesar expresiones aritméticas, en distintas alternativas, justificando sus acciones con verificaciones numéricas, o por medio de consideraciones generales, con reglas establecidas; por ejemplo, en lo siguiente:

- Indicar el orden en que se pueden evaluar las expresiones aritméticas.
- Dado un conjunto de números, en un orden establecido, obtener diversas expresiones aritméticas que incluyan distintas operaciones.
- Dada una expresión aritmética, decidir cuándo el seguimiento del proceso de resolución de izquierda a derecha corresponde al orden convencional de las operaciones.

b) **Uso de signos de agrupación**. Los paréntesis se usan para agrupar operaciones. Se encierran los operandos para dar preferencia a la realización de las operaciones de menor prioridad y, recíprocamente, se evalúan primero las operaciones que están entre paréntesis. Si existen varios signos de agrupación anidados tienen prioridad las operaciones incluidas en que se encuentren en la parte interior. Con el propósito de evitar confusiones se pueden utilizar diferentes signos de agrupación: ( ), [ ], { }.

Por lo general, en aritmética, los paréntesis se usan en forma estática, para indicar qué operaciones deben realizarse en primer lugar. En pre-álgebra es necesario imponer una dimensión más dinámica al uso de los símbolos de agrupación, con la finalidad de preparar al estudiante a utilizar en forma más flexible estos símbolos.

c) **Transformar una expresión aritmética en otras equivalentes**. Se tiene la posibilidad de efectuar cambios en los elementos de una expresión aritmética para obtener otras equivalentes. Para comprender las propiedades que conforman la estructura de una expresión simbólica se requiere la habilidad para descomponerla en sus partes y realizar manipulaciones con ellas, antes de considerarlas en la evaluación de la expresión original. La identificación de los términos de la expresión, para los que una sustitución es correcta, es necesaria para la comprensión de la estructura de una expresión numérica.

Con base en estos lineamientos anteriores se realiza un diagnóstico y se analizan los errores de expresiones numéricas simples que incluyen operaciones aritméticas con números naturales, realizado con profesores de matemáticas de primaria, secundaria y bachillerato y también con estudiantes de los tres niveles anteriores y, además, del universitario. Los errores de los individuos se clasifican, se interpretan y se hace un análisis de las causas posibles que los originan. La presencia de errores en las clases de matemáticas, son un problema grave en la enseñanza de la matemática y de las ciencias. Es necesario tomar en cuenta la realidad de esta problemática, sus causas y sus consecuencias.

El estudio desarrollado incluye un tema de aritmética elemental, perteneciente al área de la matemática básica, necesaria para afrontar, comunicar y resolver problemas prácticos que se le presentan a cualquier individuo en su vida cotidiana; además, estos conocimientos elementales son la base fundamental para continuar el estudio de cualquier área de conocimiento, posterior a la escuela primaria. El estudio muestra que el problema de los errores aritméticos, en profesores y estudiantes, tiene gravedad extrema. En consecuencia, a partir de los resultados que se exponen y tomando en cuenta la realidad comentada, se señala la necesidad de actualizar profesores y de realizar acciones para remediar y prevenir las anomalías de los alumnos, que incidan en toda la población escolar del país; con la participación activa de profesores y demás personas implicados en la tarea educativa.

Metodología

Se propusieron a profesores y estudiantes una colección de diez expresiones numéricas para que las transformaran a sus formas más simples. En la República Mexicana se aplicaron, al menos, en dos ciudades de cada Estado, desde 1982 hasta 2005. Sin embargo, la información recogida para el presente trabajo se obtuvo de una parte de esos sujetos, de cuatro entidades federativas que están más cercanas a la capital del país. Se eligieron los estados que circundan la capital, por la cercanía y la accesibilidad para entrevistar a los sujetos. El grupo de encuestados se formó con 356 profesores de primaria, secundaria y bachillerato y con 867 estudiantes de secundaria, bachillerato y de nivel universitario. Los resultados de la selección son análogos al resto de la población encuestada. La información de la población tomada en cuenta para esta investigación se recogió en los últimos tres años.

Todos los profesores de primaria participantes estudiaron una licenciatura que los prepara para ser profesores de su nivel. No recibieron cursos de geometría analítica y cálculo en la licenciatura, los recibieron en el bachillerato. Algunos de ellos, 8%, habían estudiado otra licenciatura, o la estaban cursando.

Cerca del 85% de los profesores de secundaria habían estudiado en la Escuela Normal Superior, o en otras instituciones afines que los preparan para ser profesores del nivel medio. Éstos habían cursado geometría analítica y cálculo en la licenciatura. El 15% restante había estudiado una licenciatura en alguna rama de ingeniería.

El 67% de los profesores de bachillerato era ingenieros de diversas áreas; el 33% restante habían estudiado la Normal Superior.

En México, la educación primaria se estudia en seis años, le siguen tres de secundaria y tres de bachillerato. Los estudios específicos en matemáticas que cursaban los estudiantes están implícitos en sus respectivos niveles de escolaridad.

Las características de los individuos, considerados por niveles o áreas de estudio, están en las *Tablas 2* y *3*:

Profesores		
Prim	Primaria	31
Sec	Secundaria	176
Bach	Nivel Medio Superior (Bachillerato)	149
Total		356

Tabla 2

Estudiantes		
Sec	Secundaria	220
Bach	Nivel Medio Superior (Bachillerato)	471
Quím	Ingeniería Química	50
Comp	Licenciatura Computación	84
Mat	Licenciatura Matemáticas	42
Total		867

Tabla 3

Se aplicó un examen que incluyó diez expresiones aritméticas. Se pidió a los sujetos que registraran por escrito los cálculos realizados y los resultados. Las expresiones aritméticas incluidas en el examen son las siguientes:

1. $3 + 2 \times 4 - 10 \div 2$	*5.* $2 \times 3 + 5 \times 6 - 12 \div 4$	*9.* $\sqrt{4} \times 2 + 2^2 \times \sqrt{9}$
2. $2 + 6 \div 2 + 2 \times 3$	*6.* $8 \div 4 + 10 \div 2 - 2 \times 2$	*10.* $3 + \sqrt{9} + \sqrt{4} \times 2^2$
3. $8 - 2 \times 4 + 3 \times 4$	*7.* $\mathbf{2 + 2^2 \times 3 - 2^2 \times 3 \div 4}$	
4. $8 - 4 \div 2 + 6 \div 2$	*8.* $2 \times 3^2 + 2^2 \times 4 + 2 \times 3$	

¿Por qué se eligieron estos ejercicios? En la década de los ochenta se establecieron maestrías abiertas, en matemática educativa, en diez estados del país, con asesorías en fines de semana. Hubo ocasión de relacionarse con profesores, estudiantes de estas maestrías, en cursos de matemáticas de los niveles mencionados. Los errores aritméticos que presentaban los profesores motivaron realizar el estudio. Se diseñaron expresiones numéricas que incluyen las operaciones usuales. Se eligieron combinaciones diversas de estas operaciones en distintas posibilidades de orden. Se consideró el ejercicio *7* para el estudio porque es uno de los que presenta mayor diversidad de errores.

Se entrevistaron algunos individuos para aclarar dudas y ampliar la información sobre el desarrollo de las respuestas.

En lo que sigue, se analizan los errores, sólo para la expresión numérica *7*, que incluye una suma, una resta, dos multiplicaciones, una división y dos potencias, para transformarla a su forma más simple. Dada la sencillez del ejercicio, objeto de estudio, se analizan los errores de carácter técnico, de cálculo, de manipulación de números o derivados de la ejecución de algoritmos básicos. Son errores causados por un aprendizaje deficiente de conceptos previos, por fallas en el conocimiento de contenidos y procedimientos al realizar la tarea, por desconocimiento de algoritmos, por procedimientos incorrectos en la aplicación de técnicas o por un dominio deficiente en el uso de símbolos.

Del análisis de las tareas se desprendieron una serie de categorías para el tratamiento de errores aritméticos, desde los puntos de vista teórico y metodológico, en la perspectiva de la matemática educativa.

Después de examinar los resultados que, en número y variedad, presentan, tanto profesores como estudiantes, observados en un ejemplo de matemática elemental, es inminente reflexionar sobre la problemática de la enseñanza de la asignatura en los niveles escolares de nuestro país. Un caso extremo fue un grupo de 87 profesores de primaria de zonas suburbanas que al resolver el ejercicio *7* llegaron a 21 resultados diferentes y ninguno fue el correcto. La razón más frecuente que exponen es que “expresiones numéricas tan complicadas no se enseñan en el nivel primario”.

Causas de los errores

Los errores de los encuestados en el ejercicio *7* se originan en los siguientes causantes:

1. Lenguaje hablado y lectura de lo escrito.
2. Visión de lo escrito.
3. Tratamiento de las operaciones.

a) **Lenguaje hablado y lectura de lo escrito**. En la percepción de lo que se escribe persiste una práctica verbal de lo escrito. ¿Cómo leen los participantes?, ¿por qué leen en esa forma y no en otra? Leen y escriben; sin embargo, no leen como escriben. Como lectores identifican los objetos y los ven como en un texto. Lo importante es el sentido inverso, como escritores. Cuando escriben, saben lo que quieren expresar y suponen que el lector también lo tiene presente en la mente, en forma explícita. La lengua usual escrita es "la misma" que la lengua usual hablada. La lengua matemática escrita difiere de la lengua matemática hablada.

Lo anterior aclara el encadenamiento de la igualdad del *Ejemplo 1*. El entrevistado, después de obtener las potencias, resuelve las operaciones, de izquierda a derecha, a medida que lee en forma continua. Escribe como lee.

Ejemplo 1:

$$2 + 2^2 \times 3 - 2^2 \times 3 \div 4 = 2+4 = 6 \times 3 = 18-4 = 14 \times 3 = 42 \div 4 = 10 \cdot 5$$

Otra cosa es la diferencia entre un texto escrito y la trascripción de un discurso; por ejemplo, en la expresión $2 \times 5 + 2^2 \times 3$ se observa algo que pertenece al campo de lo escrito y necesita una transformación para una presentación verbal. Puede "leerse" como sigue: "Sumar el producto de dos por cinco, más el producto de dos al cuadrado multiplicado por tres". Una lectura de la misma expresión, como se lee un texto, es la que sigue: "Dos multiplicado por cinco más dos al cuadrado multiplicado por tres". Esta forma ambigua de lectura propicia interpretarla en las siguientes formas:

$$(2 \times 5 + 2)^2 \times 3 \qquad (2 \times 5 + 2^2) \times 3 \qquad 2 \times (5 + 2)^2 \times 3$$

$$2 \times (5 + 2^2) \times 3 \qquad 2 \times (5 + 2^2 \times 3) \qquad 2 \times 5 + 2^2 \times 3$$

A diferencia de un texto, que se lee de izquierda a derecha, para leer una expresión numérica, o una fórmula matemática, previamente, se necesita una "forma de verla" bajo la identificación de dos objetos: como un número y como una operación. No sólo verla en la primera forma, también percibir que las operaciones son objetos y que esos objetos producen un número. En el ejemplo, se trata de ver cada producto 2×5 o $2^2 \times 3$ como un número y como una operación. En la mayoría de los casos la potencia 2^2 se percibe como un objeto; sin embargo, con productos y cocientes no sucede de la misma manera.

Un profesor de bachillerato lee el *Ejemplo 2* como si se tratara, estrictamente, de la lectura de un texto, de izquierda a derecha, paso a paso (Comete un error al elevar al cuadrado 46):

Ejemplo 2:

$2 + 2^2 \times 3 - 2^2 \times 3 \div 4 =$

$2+2=4$ $\quad 48-2=46$

$4^2=16$ $\quad 46^2=1116$

$16\times3=48$ $\quad 1116\times3=3348$

$3348 \div 4 = 0837$ (residuos 14, 28, 0) $\quad R=837$

Algoritmo:

$[(2 + 2)^2 \times 3 - 2]^2 \times 3 \div 4$

b) **Visión de lo escrito**. Los sujetos leen a partir de una visión, ¿cómo ven la expresión numérica?, ¿por qué la ven en esa forma y no en otra? Se puede constatar que la mayoría no puede leer correctamente las expresiones presentadas. Proponen como respuesta algo que pertenece al lenguaje natural escrito, algo que representa una diferencia enorme con relación a lo que se lee.

Lo que entendemos por “visión” es la formación de una unidad operativa; es el hecho de percibir, en una expresión, un arreglo de bloques elementales. Cada bloque expresa una operación completa; se trata de una percepción operativa. Lo que aparece como visión es la percepción de estos grupos, de las unidades operativas, de los bloques numéricos elementales. En una expresión se deben identificar bien los objetos: los números y las operaciones de dos tipos, explícitas e implícitas. Cuando los participantes se enfrentan a la expresión 2^2 hay dos tendencias: los que la leen como una operación y los que la ven como un objeto. Normalmente, la escritura de una operación supone dos números y un símbolo. Sin embargo, en la expresión 2^2, el cuadrado es sólo el producto implícito 2**×**2; es un producto que se percibe únicamente por la ubicación de los dígitos. Se podría leer 22, de no ser por la posición de cada uno de los símbolos “2”. A la par, un grupo elemental se compone de dos números y un signo; por ejemplo, en la operación 2+3 el signo “+” está entre 2 y 3; a diferencia de la escritura polaca, el signo de operación se escribe antes; por ejemplo, +(2, 3); equivalente a 2 + 3. Otro caso semejante es la barra de una fracción, que no respeta el orden de escritura. Algo semejante ocurre con $4+\dfrac{2}{3}$.

El *Ejemplo 3* exhibe los comentarios de un estudiante de la licenciatura en matemáticas, relacionados con la visión de lo escrito y reflejan problemas de entrada por la forma de seleccionar los bloques numéricos primarios, como resultado de una visión previa de lo escrito, al resolver la expresión 1: $3 + 2 \times 4 - 10 \div 2$:

Ejemplo 3:

Lo siento vicente pero no puedo hacer estas operaciónes si no existen símbolos de agrupación en las operaciones ya que existirían resultados diferentes para una sola operación, por ejemplo en la 1 si considero $\frac{(3+2)(4-10)}{2} = -15$ y si considero $3+(2\times 4)-\frac{10}{2} = 6$

Hay varias interpretaciones que tiene para la lectura y escritura del ejercicio *7*. Una visión correcta de lo escrito conduce a identificar tres bloques únicos. La expresión del *Ejemplo 4* puede leerse en forma correcta, y de manera general, como sigue: "A la suma de dos términos se le resta un tercero; el primero es un número, el segundo es el producto de una potencia por otro número y el tercero es una expresión compuesta por el producto de una potencia multiplicada por un número dividido por otro". La expresión se compone de tres bloques. En los dos últimos se debe realizar un conjunto de operaciones para trasformarlas en números.

Ejemplo 4.

$2 + 2^2 \times 3 - 2^2 \times 3 \div 4$

Bloques correctos

$2 + 2^2 \times 3 - 2^2 \times 3 \div 4$

Sin embargo, no lo ven como texto escrito. Escriben como hablan y, recíprocamente, producen como se crea un discurso, no como se obtiene un escrito. El lenguaje matemático escrito es diferente al lenguaje matemático leído. Si se tiene algo escrito no se cuenta con el uso del lenguaje hablado para la representación. Todas las particularidades de lo que se escribe en matemáticas corresponden a una lectura; otras veces, se necesita una visión previa, antes de una representación verbal, o antes de expresar el ejercicio con un conjunto de operaciones, dispuestas en un orden establecido. El *Ejemplo 5* ilustra una identificación equivocada de bloques por una visión incorrecta de lo escrito.

Ejemplo 5:

Bloques incorrectos

$\boxed{\boxed{2 + 2^2} \times 3 - 2^2} \times 3 \div 4$

c) **Tratamiento (Operaciones)**. Es la formación de un texto matemático. Las expresiones presentadas no tienen verbos, son términos, objetos o expresiones. No se establece alguna relación entre dos de ellos. Al utilizar un verbo se producen expresiones con texto, por ejemplo, igualdades, desigualdades, o cadenas de éstas. Los verbos se introducen para construir y mantener el hilo conductor del discurso matemático, para obtener relaciones matemáticas. En forma hablada se refiere a producir y formar un discurso. Por ejemplo,

- ¿Es correcta, o incorrecta, la igualdad $2 \times 5 + 2^2 \times 3 = 22$?
- ¿Cuál de las dos relaciones siguientes es incorrecta:

i). $2 \times 5 + 2^2 \times 3 + 2 \times (5 + 2^2) \times 3 = (2 \times 5 + 2^2) \times 3 + 2 \times (5 + 2^2 \times 3)$

ii). $(2 \times 5 + 2)^2 \times 3 < 2 \times (5 + 2)^2 \times 3$.

- Ordenar los valores numéricos de las seis expresiones siguientes en forma ascendente:

$(2 \times 5 + 2)^2 \times 3$, $(2 \times 5 + 2^2) \times 3$, $2 \times (5 + 2)^2 \times 3$,

$2 \times (5 + 2^2) \times 3$, $2 \times (5 + 2^2 \times 3)$, $2 \times 5 + 2^2 \times 3$.

En resumen, para interpretar los errores, para precisar que no son accidentes, debemos saber que la enseñanza de la matemática reclama la introducción de la especificidad de una escritura diferente a la escritura de un texto en lengua castellana. La ausencia de esta escritura propicia la presencia de errores. Necesitamos precisar los objetos matemáticos, saber cómo identificarlos y reconocer entidades establecidas por agrupaciones de números; por ejemplo, números naturales de un sólo dígito, de dos dígitos o raíces, identificados como objetos.

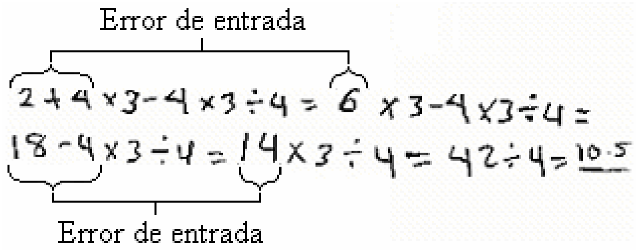
Hace falta precisar que la matemática introduce una diferencia verdaderamente profunda con respecto a un texto; es decir, lo que hace que una expresión sea un registro numérico, donde los tratamientos son diferentes a los del lenguaje natural. Si tenemos objetos de la misma prioridad, si no tienen un carácter específico, lo mismo que en una lengua, se leen uno seguido del otro. Cuando esto se propone hay un sentido que va de la visión a los tratamientos, pasando por la identificación de objetos. La expresión examinada tiene tres objetos y dos son compuestos. Se tienen dos causas y dos tratamientos, identificación de los objetos y la lectura de un texto.

Tipos de errores

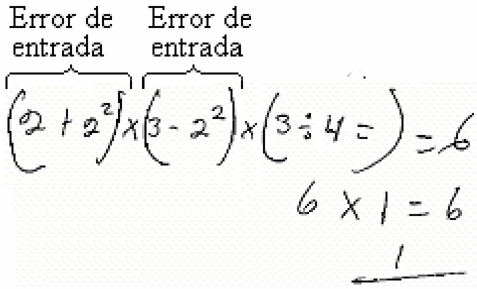
a) **Errores de entrada**. Se presentan en la lectura de texto. Son errores de visión. Algunos son más frecuentes en la lectura de una expresión numérica. Aún cuando los encuestados realizan los cálculos en forma correcta, operan una expresión diferente a la que se propone. Cuando trabajan cambian la expresión. Realizan bien, paso a paso, lo que hace un tratamiento; sin embargo, el procedimiento no corresponde a la expresión propuesta.

La transformación de la expresión requiere de un proceso de evolución. No es posible realizarla de sola una vez. El procedimiento sigue etapas determinadas por los bloques numéricos, los bloques operativos. Se requiere saber cómo identificar estos bloques numéricos. Se debe formar un algoritmo de cálculo con una sucesión de etapas, donde la salida de una es la entrada de la siguiente. En el camino se encuentran errores. Los *Ejemplos 6* y *7* muestran cambios en el inicio de la primera etapa, son cambios en la entrada que inducen errores.

Ejemplo 6:



Ejemplo 7:

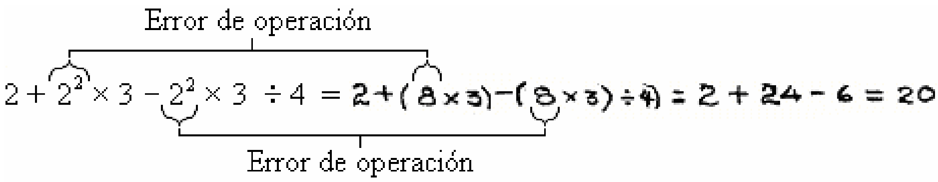


b) **Errores de operación**. Se encuentran entre los errores que alteran la repuesta. Consisten en distorsionar el proceso de obtener el resultado de cada operación realizada en forma independiente. Algunos ejemplos son los siguientes:

- Realizar cálculos en forma incorrecta.
- Omitir o hacer cambios en los signos de las operaciones o en los elementos numéricos que intervienen en la expresión.
- Infringir las reglas de la estructura numérica que incluye el ejercicio.
- Uso inadecuado de los elementos neutro, idéntico, simétrico o inverso.

El *Ejemplo 8* ilustra un error de operación al calcular el cuadrado de un número.

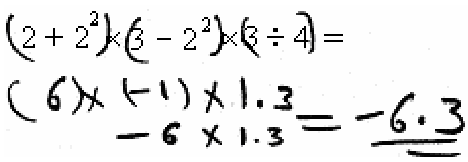
Ejemplo 8:



En el *Ejemplo 9* se observan dos errores de entrada en las elecciones de los bloques

$$2 + 2^2 = 6 \quad y \quad 3 - 2^2 = -1.$$

Ejemplo 9:



Errores de operación:

- Luego divide 3 ÷ 4. Intercambia dividendo y divisor y obtiene: 4 ÷ 3 = 1.3
- Sorprende la forma equivocada en que el estudiante de bachillerato entrevistado realiza la multiplicación – 6 × 1.3:

Escribe (– 6 × 1).3 = (– 6).3. De aquí cambia (– 6).3 por 6.3.

El *Ejemplo 10* muestra que se presentan múltiples tipos de errores en la resolución del ejercicio. Esto ocurre con frecuencia. Se señalan las dos clases de errores examinados; ocurrieron al expresar retóricamente el procedimiento. Corresponden a un número limitado de esquemas de respuesta.

Ejemplo 10:

$2 + 2^2 \times 3 - 2^2 \times 3 \div 4 = 7$

dos mas dos al cuadrado son cuatro al cuadrado por tres son doce al cuadrado menos dos al cuadrado son diez por tres son treinta entre cuatro = 7

El procedimiento del sujeto es el siguiente:

“Dos más dos al cuadrado son cuatro al cuadrado”, $(2 + 2)^2 = 4^2$:

$\mathbf{(2 + 2)^2} \times 3 - 2^2 \times 3 \div 4 = 4^2 \times 3 - 2^2 \times 3 \div 4.$

“Cuatro al cuadrado por tres son doce al cuadrado”, $4^2 \times 3 = (4 \times 3)^2 = 12^2$:

$4^2 \times 3 - 2^2 \times 3 \div 4 = \mathbf{(4 \times 3)}^2 - 2^2 \times 3 \div 4 = 12^2 - 2^2 \times 3 \div 4.$

“Doce al cuadrado menos dos al cuadrado son diez”, $12^2 - 2^2 = 10$:

$12^2 - 2^2 \times 3 \div 4 = \mathbf{(12^2 - 2^2)} \times 3 \div 4 = 10 \times 3 \div 4 = 30 \div 4.$

“Diez por tres son treinta”, $10 \times 3 = 30.$

“Treinta entre cuatro son siete”, $30 \div 4 = 7.$

Error de entrada

$$\overbrace{4^2 \times 3} - 2^2 \times 3 \div 4 = \overbrace{(2 + 2)^2} - 2^2 \times 3 \div 4 =$$

Error de entrada

$$\overbrace{4^2 \times 3} - 2^2 \times 3 \div 4 = \overbrace{(4 \times 3)^2} - 2^2 \times 3 \div 4 =$$

Error de entrada

$$\overbrace{12^2 - 2^2} \times 3 \div 4 = \underbrace{\overbrace{(12^2 - 2^2)}} \times 3 \div 4 = \underbrace{10} \times 3 \div 4 = 7$$

Error de operación

Finalmente, comete el error de operación $30 \div 4 = 7$.

c) **Errores de escritura**. Son errores de una salida de etapa, no de salida del proceso completo. Se presentan al comunicar el procedimiento de transformación de la expresión numérica. Dos son las formas de comunicación: escrita o verbal. De los dos tipos de errores de salida, escritos o verbales, en este trabajo sólo se consideran los primeros, puesto que los encuestados presentaron en forma escrita los ejercicios propuestos. En lo que sigue se les nombra *errores de escritura*. Se ilustran en los *Ejemplos 11* y *12*.

Ejemplo 11:

$$\overbrace{3\times 4 + 2 = 3\times 4}^{\text{Error de escritura}} = \overbrace{12 + 2 = 14}^{\text{No hay error de escritura}}$$
$$\underbrace{3\times 4 = 12 + 2}_{\text{Error de escritura}}$$

Ejemplo 12:

$$\overbrace{2+2^2\times 3-2^2\times 3\div 4 = 2+12}^{\text{Error de escritura}} = \overbrace{14-4\times 3 = 14-12\div 4}^{\text{Error de escritura}} = 14-3 = 11$$
$$\underbrace{2+12 = 14-4\times 3}_{\text{Error de escritura}} \qquad \underbrace{14-12\div 4 = 14-3}_{\text{Error de escritura}}$$

Los *Ejemplos 13* y *14* muestran múltiples tipos de errores en una misma expresión.

Ejemplo 13:

$$7.\ \ 2+2^2\times 3-2^2\times 3\div 4 = 91.8$$

$$11.2\times 3 = 33.6 - 3 = 30.6\times 4 = 122-4\times 3 = 367.2\div 4 = 91.8$$

Incorpora el número de orden del ejercicio *7* al cálculo. Cambia la expresión $7.\ \ 2+2^2\times 3-2^2\times 3\div 4$ por la siguiente: $7.2+2^2\times 3-2^2\times 3\div 4$.

Calcula 7.2 + 2^2 = 11.2.

Multiplica 11.2 × 3 = 33.6.

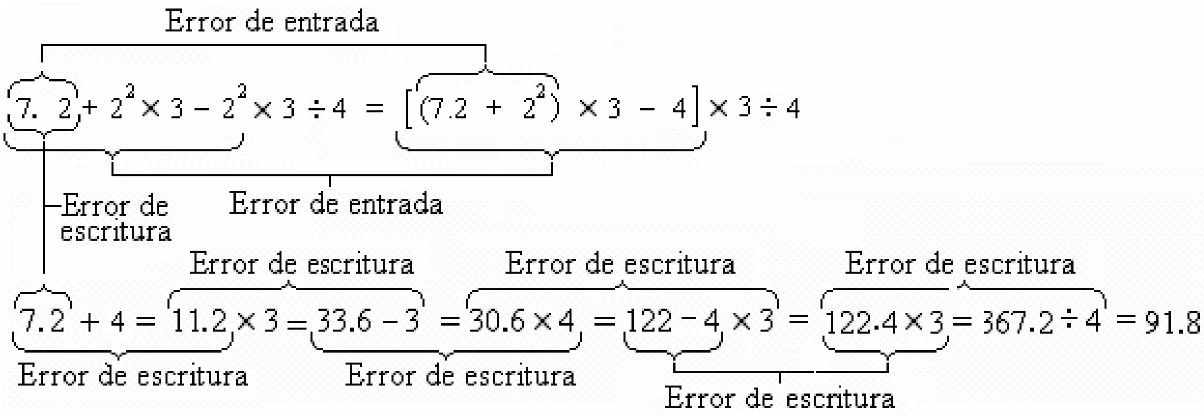
Resta 33.6 – 3 = 30.6.

Luego, multiplica correctamente 30.6 × 4 = 122. 4; sin embargo, cambia 122.4 por la forma equivocada 122 – 4.

Realiza la multiplicación 122.4 × 3 = 367.2.

Finalmente, divide 367.4 ÷ 4 = 91.8.

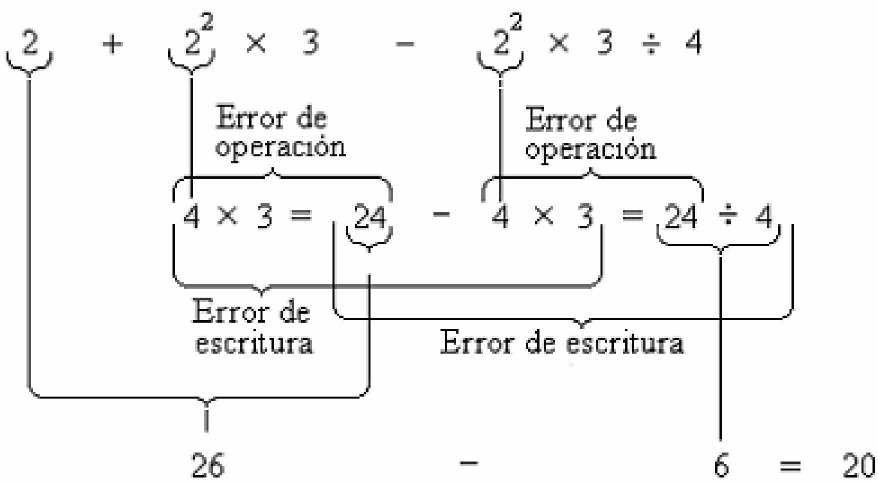
El algoritmo es el siguiente:



Ejemplo 14:

$2 + 2^2 \times 3 - 2^2 \times 3 \div 4 =$ 1-Se empieza por las potencias (2x2=4)
4x3=24-4x3=24÷4 2. Luego por las multiplicaciones
2+24=26 6 3- Despues por divisiones
26-6=20 4- luego Sumas
5-luego restas

Expresa el algoritmo retóricamente. Describe un algoritmo de cálculo; sin embargo, no tiene claridad en el orden de ejecución de las operaciones; da preferencia a una de dos operaciones tienen una misma prioridad, a la multiplicación con respecto a la división, y a la suma con relación a la sustracción. Realiza correctamente el cuadrado $2^2 = 2 \times 2 = 4$ y en forma equivocada hace dos veces el cálculo $4 \times 3 = 24$.



Descripción de los errores de entrada

Del total de profesores, 356, sólo el 24.4% y de los 867 estudiantes, sólo el 16.8% resolvieron correctamente el ejercicio *7*.

En las *Tablas 4* y *5* se exponen los números de casos y porcentajes de estudiantes y profesores que resolvieron correctamente el mismo ejercicio. Los porcentajes de estas tablas, y todas las que siguen que registran datos, se calcularon con relación a cada grupo de individuos.

Profesores		
	%	**N^o. Casos**
Prim	0	0/31
Sec	12.5	22/176
Bach	23.5	35/149

Tabla 4

Estudiantes		
	%	**N^o. Casos**
Sec	6.4	14/220
Bach	11.7	55/471
Quím	22.0	11/50
Comp	71.4	60/84
Mat	14.3	6/42

Tabla 5

Las columnas de la izquierda de las *Tablas 6* a la *19* expresan el orden de prioridad elegida por los participantes y, con ello, los errores de entrada. **A$_1$** es el algoritmo que conduce al resultado correcto. También se indican los porcentajes obtenidos en cada grupo de individuos

Algoritmo A$_1$:
$2 + 2^2\times3 - 2^2\times3\div4$

$$\overbrace{2}^{\text{Primer Boque}} + \overbrace{2^2\times 3}^{\text{Segundo Bloque}} - \overbrace{2^2\times 3\div 4}^{\text{Tercer Bloque}}$$

a. Potencias	$= 2 + 4\times3 - 4\times3\div4$	2+4x3-4x3÷4=
b. Multiplicaciones y divisiones	$= 2 + 12 - 3$	2+12-12÷4=
c. Sumas y restas	$= 11$	2+12-3=
		14-3=11

Profesores	Prim	Sec	Bach
%	0	14.8	28.9

Estudiantes	Sec	Bach	Quím	Comp	Mat
%	11.4	11.7	20.0	75.0	19.0

Tabla 6

Aun cuando los participantes eligen el algoritmo correcto, parte de ellos presentaron errores en el proceso de resolución. A continuación se exhiben los tipos de errores del ejercicio *7*. Las *Tablas*, de la *7* a la *19* y las *Gráficas 1* y *2* describen ejemplos, errores y sus porcentajes en las formas diferentes que eligieron el orden en que realizaron las operaciones en el procedimiento para afrontar la reducción de la expresión a su forma más simple. Corresponden a la categoría de errores de entrada. Se relación con la forma en que eligen los bloques elementales que guían el procedimiento, a partir de sus percepciones operativas.

Algoritmo A_2: $[(2 + 2^2) \times 3 - 2^2] \times 3 \div 4$		$\underbrace{[\overbrace{(2+2^2)}^{\text{Error de entrada}} \times 3 - 2^2]}_{\text{Error de entrada}} \times 3 \div 4$
a. Potencias *b.* Suma *c.* Primera multiplicación *d.* Resta *e.* Segunda multiplicación *f.* División	$= [(2 + 4) \times 3 - 4] \times 3 \div 4$ $= (6\times 3 - 4) \times 3 \div 4$ $= (18 - 4) \times 3 \div 4$ $= 14 \times 3 \div 4$ $= 42 \div 4$ $= 10.5$	$2+2^2x3-2^2x3\div 4=$ $2+4x3-4x3\div 4=$ $6x3-4x3\div 4=$ $18-4x3\div 4=$ $14x3\div 4=$ $42\div 4=10.5$

Profesores	Prim	Sec	Bach
%	48.4	38.6	51.7

Estudiantes	Sec	Bach	Quím	Comp	Mat
%	80.5	73.5	66.0	15.5	52.4

Tabla 7

Algoritmo A_3: $(2 + 2^2) \times 3 - 2^2 \times 3 \div 4$		$\overbrace{(2+2^2)}^{\text{Error de entrada}} \times 3 - 2^2 \times 3 \div 4$
a. Potencias *b.* Suma *c.* Ambas multiplicaciones y división *d.* Resta	$= (2 + 4) \times 3 - 4 \times 3 \div 4$ $= 6 \times 3 - 4 \times 3 \div 4$ $= 18 - 3$ $= 15$	$2+2^2\times 3-2^2\times 3\div 4=$ $=2+4\times 3-4\times 3\div 4$ $=6\times 3-4\times 3\div 4$ $=18-12\div 4$ $=18-3=15$ //

Profesores	Prim	Sec	Bach
%	16.1	12.5	4.0

Estudiantes	Sec	Bach	Quím	Comp	Mat
%	0.5	1.7	0	1.2	0

Tabla 8

Algoritmo A_4: $(2 + 2^2 \times 3 - 2^2 \times 3) \div 4$		$\overbrace{(2+2^2\times 3-2^2\times 3)}^{\text{Error de entrada}} \div 4$
a. Potencias *b.* Ambas multiplicaciones *c.* Suma y resta *d.* División.	$= (2 + 4 \times 3 - 4 \times 3) \div 4$ $= (2 + 12 - 12) \div 4$ $= 2 \div 4$ $= 0.5$	$2+2^2\times 3-2^2\times 3\div 4=\frac{1}{2}$ $2+4\times 3-4\times 3\div 4$ $2+12-12\div 4$ $\frac{14-12}{4}=\frac{2}{4}$

Profesores	Prim	Sec	Bach
%	6.5	14.2	3.4

Estudiantes	Sec	Bach	Quím	Comp	Mat
%	2.3	4.5	0	2.4	7.1

Tabla 9

Algoritmo A 5: $[(2 + 2^2) \times 3 - 2^2 \times 3] \div 4$		$\underbrace{[\overbrace{(2+2^2)}^{\text{Error de entrada}}\times 3 - 2^2\times 3]}_{\text{Error de entrada}} \div 4$
a. Potencias *b.* Suma *c.* Ambas multiplicaciones *d.* Resta *e.* División.	$= [(2 + 4) \times 3 - 4 \times 3] \div 4$ $= (6 \times 3 - 4 \times 3) \div 4$ $= (18 - 12) \div 4$ $= 6 \div 4$ $= 1.5$	$2 + 2^2 \times 3 - 2^2 \times 3 \div 4 =$ $2 + 4 \times 3 - 4 \times 3 \div 4$ $6 \times 3 - 4 \times 3 \div 4$ $18 - 12 \div 4$ $6 \div 4 = 1.5$

Profesores	Prim	Sec	Bach
%	9.7	8.0	1.3

Estudiantes	Sec	Bach	Quím	Comp	Mat
%	0	2.5	4.0	1.2	0

Tabla 10

Algoritmo A 6: $(2 + 2^2) \times (3 - 2^2) \times 3 \div 4$		$\overbrace{(2+2^2)}^{\text{Error de entrada}} \times \overbrace{(3-2^2)}^{\text{Error de entrada}} \times 3 \div 4$
a. Potencias *b.* Suma y resta *c.* Ambas multiplicaciones *d.* División.	$= (2 + 4) \times (3 - 4) \times 3 \div 4$ $= 6 \times (-1) \times 3 \div 4$ $= -18 \div 4$ $= -4.5$	$2 + 2^2 \times 3 - 2^2 \times 3 \div 4 =$ $(2+2^2)(3-2^2)(3/4) =$ $(6)(-1)(3/4) =$ $-\frac{18}{4} = -\frac{9}{2}$

Profesores	Prim	Sec	Bach
%	0	8.0	3.4

Estudiantes	Sec	Bach	Quím	Comp	Mat
%	0.9	2.3	10.0	3.6	9.5

Tabla 11

Algoritmo A 7: $(2 + 2^2 \times 3 - 2^2) \times 3 \div 4$		$\overbrace{(2 + 2^2 \times 3 - 2^2)}^{\text{Error de entrada}} \times 3 \div 4$
a. Potencias *b.* Primera multiplicación *c.* Suma y resta *d.* Segunda multiplicación y división.	$= (2 + 4 \times 3 - 4) \times 3 \div 4$ $= (2 + 12 - 4) \times 3 \div 4$ $= 10 \times 3 \div 4$ $= 7.5$	$2 + 2^2 \times 3 - 2^2 \times 3 \div 4 =$ $(2 + 12 - 4)(\frac{3}{4}) =$ $(10)(\frac{3}{4}) = \boxed{\frac{15}{2}}$

Profesores	Prim	Sec	Bach
%	3.2	1.1	4.7

Estudiantes	Sec	Bach	Quím	Comp	Mat
%	0.5	0	0	0	7.1

Tabla 12

Algoritmo A $_8$**:** $\mathbf{2 + (2^2 \times 3 - 2^2 \times 3) \div 4}$		$2 + \overbrace{(2^2 \times 3 - 2^2 \times 3)}^{\text{Error de entrada}} \div 4$
a. Potencias	$= 2 + (4 \times 3 - 4 \times 3) \div 4$	$2+2^2\times3-2^2\times3\div4=2$
b. Ambas multiplicaciones	$= 2 + (12 - 12) \div 4$	$2+(12-12)\div4=$
c. Resta	$= 2 + 0 \div 4$	
d. División	$= 2 + 0$	
e. Suma.	$= 2$	

Profesores	Prim	Sec	Bach
%	3.2	0.6	0.7

Estudiantes	Sec	Bach	Quím	Comp	Mat
%	0	0	0	0	0

Tabla 13

Algoritmo A $_9$**:** $\mathbf{2 + 2^2 \times (3 - 2^2 \times 3 \div 4)}$		$2 + 2^2 \times \overbrace{(3 - 2^2 \times 3 \div 4)}^{\text{Error de entrada}}$
a. Potencias	$= 2 + 4 \times (3 - 4 \times 3 \div 4)$	$2+2^2\times3-2^2\times3\div4=2$
b. Segunda multiplicación y división	$= 2 + 4 \times (3 - 3)$	$2+4\times(\cancel{3}-\cancel{4\times3}/\cancel{4})=$
c. Resta	$= 2 + 4 \times 0$	
d. Primera multiplicación	$= 2 + 0$	
e. Suma.	$= 2$	

Profesores	Prim	Sec	Bach
%	0	0	0.7

Estudiantes	Sec	Bach	Quím	Comp	Mat
%	0	0	0	0	2.4

Tabla 14

Algoritmo A $_{10}$**:** $[(\mathbf{2 + 2})^2 \times \mathbf{3 - 2^2 \times 3}] \div \mathbf{4}$		$\overbrace{[\underbrace{(2+2)^2}_{\text{Error de entrada}} \times 3 - 2^2 \times 3]}^{\text{Error de entrada}} \div 4$
a. Suma	$= (4^2 \times 3 - 2^2 \times 3) \div 4$	$2+2^2\times3-2^2\times3\div4=$
b. Potencias y multiplicaciones	$= (48 - 12) \div 4$	$4^2\times3-2^2\times3=$
c. Resta	$= 36 \div 4$	$48-12\div4=$
d. División	$= 9$	$36\div4=9$

Profesores	Prim	Sec	Bach
%	0	0	0.7

Estudiantes	Sec	Bach	Quím	Comp	Mat
%	0	0	0	0	2.4

Tabla 15

Algoritmo A$_{11}$:
[(2 + 2)^2 × 3 – 2]^2 × 3 ÷4

$$\overbrace{\left[\underbrace{(2+2)^2}_{\text{Error de entrada}} \times 3 - 2\right]^2}^{\text{Error de entrada}} \times 3 \div 4$$

a. Suma	$= (4^2 \times 3 - 2)^2 \times 3 \div 4$	$2 + 2^2 \times 3 - 2^2 \times 3 \div 4 =$ $2+2=4$ $46^2=2116$ $4^2=16$ $1116 \times 3 = 6348$ $16 \times 3 = 48$ $6348 \div 4 = 1587$ $48 - 2 = 46$ R=1587
b. Primera potencia	$= (16 \times 3 - 2)^2 \times 3 \div 4$	
c. Primera multiplicación	$= (48 - 2)^2 \times 3 \div 4$	
d. Resta	$= 46^2 \times 3 \div 4$	
e. Segunda potencia	$= 2116 \times 3 \div 4$	
f. Segunda multiplicación y división	$= 1587$	

Profesores	Prim	Sec	Bach
%	0	0	0

Estudiantes	Sec	Bach	Quím	Comp	Mat
%	1.8	1.1	10.0	0	0

Tabla 16

Algoritmo A$_{12}$:
[(2 + 2)^2 × 3 – 2^2] × 3 ÷ 4

$$\overbrace{\left[\underbrace{(2+2)^2}_{\text{Error de entrada}} \times 3 - 2^2 \times 3\right]}^{\text{Error de entrada}} \div 4$$

a. Suma	$= (4^2 \times 3 - 2^2) \times 3 \div 4$	$2 + 2^2 \times 3 - 2^2 \times 3 \div 4 = 33$ 16 48 44 132 33=33
b. Potencias	$= (16 \times 3 - 4) \times 3 \div 4$	
c. Primera multiplicación	$= (48 - 4) \times 3 \div 4$	
d. Resta	$= 44 \times 3 \div 4$	
e. Segunda multiplicación y división	$= 33$	

Profesores	Prim	Sec	Bach
%	0	0	0

Estudiantes	Sec	Bach	Quím	Comp	Mat
%	0.9	1.9	0	0	0

Tabla 17

Algoritmo A$_{13}$:
(2 + 2)^2 × 3 – 2^2 × 3 ÷ 4

$$\overbrace{(2+2)^2}^{\text{Error de entrada}} \times 3 - 2^2 \times 3 \div 4$$

a. Suma	$= 4^2 \times 3 - 2^2 \times 3 \div 4$	$2 + 2^2 \times 3 - 2^2 \times 3 \div 4 =$ $4^2 \times 3 - 2^2 \times 3 \div 4 =$ $16 \times 3 - 4 \times 3 \div 4 =$ $48 - 3 = 45$
b. Potencias	$= 16 \times 3 - 4 \times 3 \div 4$	
c. Multiplicaciones y división	$= 48 - 3$	
d. Resta	$= 45$	

Profesores	Prim	Sec	Bach
%	0	0	0

Estudiantes	Sec	Bach	Quím	Comp	Mat
%	0.5	0.4	4.0	0	0

Tabla 18

Se asigna el símbolo A_{14} si el participante utilizó dos algoritmos que conducen a dos soluciones diferentes para el mismo ejercicio.

(A_1)

$(2)+(2^2\times 3)-(2^2\times 3)\div 4 =$

$2+12-\frac{12}{4} = 2+12-3 = 14-3 = 11$

(A_4)

$[2+(2^2\times 3)-(2^2\times 3)]\div 4,\quad \frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

$2+12-12$

(A_4)

$2+2^2\times 3-2^2\times 3\div 4 =$

$2+\cancel{4\times 3}-\cancel{4\times 3}\div 4 = 2\div 4 = 2$

(A_3)

$2+4\times 3-4\times 3\div 4$

$13-3=\underline{15}$

Profesores	Prim	Sec	Bach
%	12.9	2.3	0.7

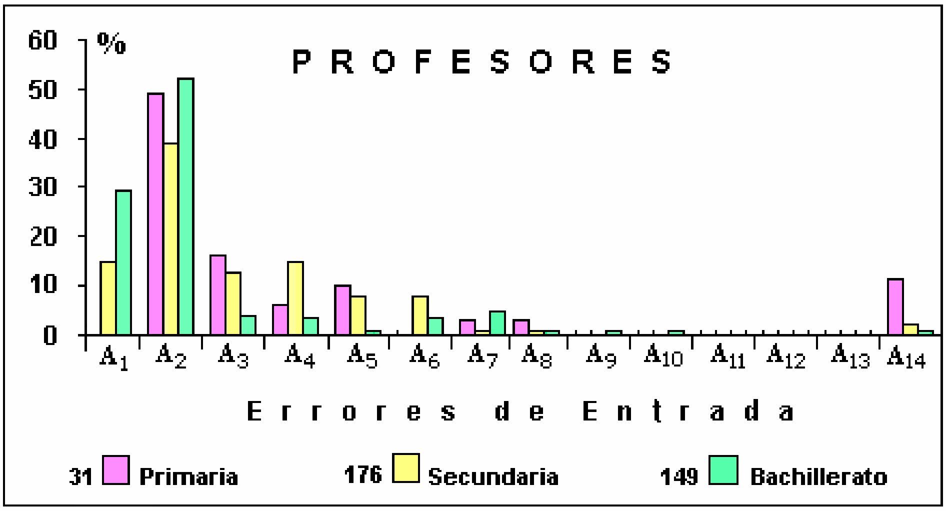
Estudiantes	Sec	Bach	Quím	Comp	Mat
%	0.9	0.4	0	1.2	0

Tabla 19

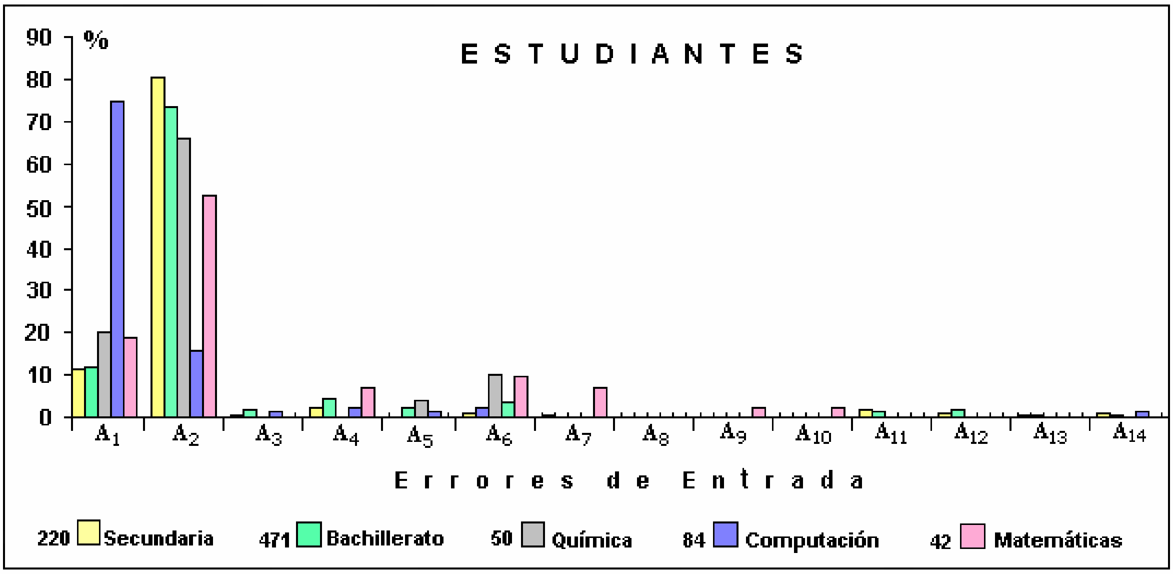
En la *Tabla 20* y las *Gráficas 1* y *2* se resumen los porcentajes de los errores de entrada, ocasionados por la elección del algoritmo, utilizados por los participantes.

Algoritmos	Profesores (%)			Estudiantes (%)				
	Prim (31)	Sec (176)	Bach (149)	Sec (220)	Bach (471)	Quím (50)	Comp (84)	Mat (42)
A_1	0	14.8	28.9	11.44	11.7	20.0	75.0	19.0
A_2	48.4	38.6	51.7	80.5	73.5	66.0	15.5	52.4
A_3	16.1	12.5	4.0	0.5	1.7	0	1.2	0
A_4	6.5	14.2	3.4	2.3	4.5	0	2.4	7.1
A_5	9.7	8.0	1.3	0	2.5	4.0	1.2	0
A_6	0	8.0	3.4	0.9	2.3	10.0	3.6	9.5
A_7	3.2	1.1	4.7	0.5	0	0	0	7.1
A_8	3.2	0.6	0.7	0	0	0	0	0
A_9	0	0	0.7	0	0	0	0	2.4
A_{10}	0	0	0.7	0	0	0	0	2.4
A_{11}	0	0	0	1.8	1.1	0	0	0
A_{12}	0	0	0	0.9	1.9	0	0	0
A_{13}	0	0	0	0.5	0.4	0	0	0
A_{14}	12.9	2.3	0.7	0.9	0.4	0	1.2	0

Tabla 20



Gráfica 1



Gráfica 2

Comentarios sobre los errores de entrada ocasionados por la elección del algoritmo

a) Ningún profesor de primaria utilizó el algoritmo correcto $\mathbf{A_1}$.

b) La mayor parte de los errores, tanto profesores como estudiantes, son ocasionados por usar el algoritmo $\mathbf{A_2}$. Dan preferencia a las potencias; después, realizan las operaciones en el orden de escritura de la expresión propuesta, tal como se lee un texto. Le siguen en la frecuencia de uso $\mathbf{A_1}$ y $\mathbf{A_3}$. Los tres forman un primer grupo en términos de la frecuencia de uso del algoritmo. Un segundo grupo lo forman $\mathbf{A_4}$, $\mathbf{A_5}$, $\mathbf{A_6}$ y $\mathbf{A_{14}}$. Finalmente, con muy escasa utilización $\mathbf{A_7}$, $\mathbf{A_8}$, $\mathbf{A_9}$, A_{10}, $\mathbf{A_{11}}$, $\mathbf{A_{12}}$ y $\mathbf{A_{13}}$.

c) Ningún profesor, ni estudiante, del nivel superior, utilizaron **A_{11}**, **A_{12}** o A_{13}. Sólo los estudiantes de secundaria y bachillerato recurrieron a estos algoritmos. Dan prioridad a sumas y restas, en lugar de hacerlo con las potencias seguidas de multiplicaciones y divisiones.

d) Los individuos que utilizaron **A_{14}**, obteniendo dos resultados diferentes. Argumentan que existen diversas alternativas posibles para resolver el ejercicio, dependiendo del procedimiento que se elija. Afirman que ambas formas son correctas: Se elige la conveniente. Esta anomalía se presentó escasamente, tanto en profesores como en estudiantes. Sólo un estudiante de nivel universitario cometió este error.

e) Tanto estudiantes como profesores del área de computación presentan mayor porcentaje en la solución correcta del ejercicio *7*.

f) Ningún estudiante utilizó **A_8**. El error consiste en hacer un nuevo bloque operativo a partir de los dos últimos de la expresión dada; esta visión sólo la tuvieron los profesores, uno de cada nivel.

g) Sólo un estudiante de matemáticas y un profesor de bachillerato emplearon **A_9**. Semejante situación ocurrió con **A_{10}**.

h) Globalmente se observa que profesores o estudiantes, de los niveles de primaria, secundaria o preparatoria cometen más errores que los estudiantes del nivel superior.

Descripción de los errores de operación

El 75.6% de los profesores (356) y el 83.2% de todos los estudiantes (867) cometieron errores al realizar las operaciones del ejercicio *7*.

Las tablas de la 21 a la 34 describen y ejemplifican errores de operación: uso inadecuado de las leyes de los exponentes, cambios o duplicación de operaciones o números, o bien, omisión, invertir de las posiciones de los operandos, confusión de los elementos neutros, unitarios, simétricos o inversos o cambio de símbolos aritméticos por algebraicos. Se indican los porcentajes en que están presentes en los individuos. Las letras *a* y *b* son representan reales.

<table>
<tr><td colspan="8">O_1. Cálculos equivocados</td></tr>
<tr><td colspan="4">O_1.a. Sumas o restas equivocadas</td><td colspan="4">$6-18-16-48=12$</td></tr>
<tr><td>$\begin{array}{r} 2\\ +2\\ \hline 42\end{array}$</td><td>$\begin{array}{r} 9\\ -4\\ \hline 14\end{array}$</td><td>$2+4=8$</td><td colspan="2">$14-12=4$</td><td>$18-4=16$</td><td>$1.2-2=0.8$</td><td>$3-9=-2$</td></tr>
<tr><td>$30-8=38$</td><td>$2-15=13$</td><td colspan="2">$-12\div 4=3$</td><td colspan="2">$2+12-3=13$</td><td colspan="2">$(2+12)-3=10-3=7$</td></tr>
</table>

Tabla 21

O_1.b. Multiplicaciones o divisiones equivocadas						
$14 \times 3 = 102$	$14 \times 3 = 32$	$10 \times 3 = 33$	$6 \times 3 = 9$	$14 \times 3 = 22$	$14 \times 3 = 412$	$14 \times 3 = 52$
$14 \times 3 = 24$	$4 \times 3 = 24$	$140 \times 3 = 320$	$16 * 3 = 58$	$42 / 4 = 1$; 02	$42 / 4 = 10$; 02	$126 / 4 = 31$; 06
$42/4 = 1.05$; 02	$42/4 = 1.5$; 020	$42/4 = 10.2$; 2	$420/4 = 1.4$; 020	$42/4 = 8.5$; 40; 20	$42/4 = 20.5$; 02; 2	$42/4 = 10.49$; 020
$42/4 = 9.1$; 36; 6; 4; 2	$66/4 = 11.55$; 22; 20	$66/4 = 165$; 26; 30	$78/4 = 19.5$	$12/4 = 15$; 020	$42 \div 4 = 21$	$42 \div 4 = 13$
$42 \div 4 = 4.5$	$42 \div 4 = 10.02$	$15 \div 4 = 21$	$150 \div 4 = 36.99$	$320 \div 4 = 85$	$2 \div 4 = 2$	$2 \div 4 = -2$

Tabla 22

O_1. c. Potencias equivocadas						
O_1.c. 1. Cálculo erróneo al elevar al cuadrado un número			**O_1.c. 2.** $(ab)^2 = (a^2)(b)$ o $(a \div b)^2 = (a^2) \div (b)$			
$46^2 = 1116$	2^3; 8	$2 + 2^2 =$ $2 + 8 = 10$	$4^2 \times 3 = 12^2$	$10^2 \times 3 = 30^2$	$30^2 \div 4 = 7.5^2$	$5^2 \times 3 = 15^2$

Tabla 23

O_1.c. 3. $a^2 = 2a$	**O_1.c. 4.** $(-a)^2 = -a^2$	**O_1.c. 5.** $a \pm b^2 = (a \pm b)^2$
$22^2 = 44$	$2 + 2^2 \times 3 - 2^2 \times 3 \div 4 = 16.5$ $2 + (2)^2 \times 3 + (-2)^2 \times 3 \div 4 =$ $2 + 4 \times 3 + 4 \times 3 \div 4 =$ $2 + 4 = 6$ $6 \times 3 = 18$ $18 + 4 = 22$ $22 \times 3 = 66$ $66 \div 4 = 16.5$	$2 + 2^2 = 4^2$

Tabla 24

O_1.c. 6. $a \pm b = (a \pm b)^2$			**O_1.c.7.** $(a \pm b)^2 = a^2 \pm b^2$		**O_1.c. 8.** $a \pm b^2 = a \pm b$		
$2 + 2 = 4^2$	$12^2 - 2 = 10$	$2 + 2 = 4^2$	$12^2 - 2^2 = 10^2$	$7^2 - 2^2 = 5^2$	$12^2 - 2 = 10$	$2 + 2^2 = 4$ $15 - 2^2 = 13$	$2 + 2^2 = 5$ $12^2 - 2 = 10$

Tabla 25

O_1.c. 9. $(a^2)(b)=ab$ o $a^2 \div b = a \div b$ o $(a^2)(b)=(ab)^2$				
$9^2 \times 3 = 12^2$	$10^2 \times 3 = 30^2$	$8^2 \times 3 = 24$	$15^2 \div 4 = 3.75$	$30^2 \div 4 = 7^2$

Tabla 26

O_1.c. 10. Otros errores en la aplicación de las leyes de los exponentes							
$4^2 \times 3 = 7^2$	$4^2 \times 3 = 12^4$	$12^4 - 2^2 = 8^2$	$12^2 - 2^2 = 10^4$	$39 \div 4 \div = 9^3$	$10^4 \times 3 = 30^4$	$30^4 \div 4 = 7.5^4$	$12^2 - 2 = 10^3$
$4^2 \times 3 = 24$	$2 + 2^2 = 4^2$	$2+2^2 = 2+2\times 2 = 4\times 2 = 8$		$2 + 2^2 = 2 + 8 = 10$		$10^3 \times 3 = 30 \div 4 = 7.5^2$	

Profesores	Prim	Sec	Bach
%	25.8	14.8	28.9

Estudiantes	Sec	Bach	Quím	Comp	Mat
%	45.0	43.5	22.0	7.1	35.7

Tabla 27

O_2. Cambiar una operación por otra

$2 + 2^2 \times 3 - 2^2 \times 3 \div 4 = 2 - 2^2 \times 3 - 2^2 \times 3 \div 4 =$
$2 + 4 \times 3 + 4 \times 3 \div 4 = \frac{66}{4} = \frac{33}{2} = 16.5$

Profesores	Prim	Sec	Bach
%	6.5	19.9	5.4

Estudiantes	Sec	Bach	Quím	Comp	Mat
%	3.6	3.4	0	0	2.4

Tabla 28

O_3. Cambiar un número por otro

$2 + 2^2 \times 3 - 2^2 \times 3 \div 4 = (2 + 2^2) \times 3 - 2^3 \times 3 \div 4 = (2+4) \times 3 - 8 \times 3 \div 4 = (6 \times 3) - 8 \times 3 \div 4 =$
$10 \times 3 \div 4 = 30 \div 4 = 7.5$

Profesores	Prim	Sec	Bach
%	0	1.7	3.6

Estudiantes	Sec	Bach	Quím	Comp	Mat
%	1.4	1.9	0	2.4	0

Tabla 29

O_4. Omitir una operación

$2 + 2^2 \times 3 - 2^2 \times 3 \div 4 =$
$6 \times 3 = 18 - 2^2 = 14 \times 3 = 42$

Profesores	Prim	Sec	Bach
%	0	1.1	0.7

Estudiantes	Sec	Bach	Quím	Comp	Mat
%	17.7	4.2	0	1.2	0

Tabla 30

O_5. Omitir un número

$2+2^2\times 3-2^2\times 3\div \boxed{4}$

$2+4\times 3+4\times 3\div 4$

$18+12\div = \boxed{7.5}$

$18\times 12 = 30$

Profesores	Prim	Sec	Bach
%	0	1.7	1.3

Estudiantes	Sec	Bach	Quím	Comp	Mat
%	4.5	1.1	0	0	0

Tabla 31

O_6. Invertir los términos de una división

$2\div 4=\boxed{2}$ $\quad 2\div 4=-2$ $\quad 3\div 4=1{,}3$

Profesores	Prim	Sec	Bach
%	0	0.6	0.7

Estudiantes	Sec	Bach	Quím	Comp	Mat
%	0	1.1	0	0	0

Tabla 32

O_7. Confusión en el uso de los elementos neutros, unitarios, simétricos o inversos

$2+2^2\times 3-2^2\times 3\div 4=$

$2+\cancel{4\times 3-4\times 3}\div 4=$

$2\div 4=2$

Profesores	Prim	Sec	Bach
%	0	0.6	0.7

Estudiantes	Sec	Bach	Quím	Comp	Mat
%	0	1.7	0	0	0

Tabla 33

O_8: Realizar dos veces una misma operación

Multiplicó dos veces por el primer 3.

$\underbrace{2+2^2}\times 3-2^2\times 3\div 4=36.99$

$6(3)=18(3)=54$

$54-4=50(3)=150$

$150\div 4=36.99$

$4\overline{)150}$ $\;36.99$; 30; 40; 40

Multiplicó dos veces por el segundo 3.

$(2+2^2)\times 3-2^2\times 3\div 4=$

$(2+4)\times 3-2^2\times 3\div 4=$

$(6\times 3)-2^2\times 3\div 4=$

$(18-4)\times 3\div 4=$

$(14\times 3)\times 3\div 4=$

$(42\times 3)\div 4$

$(126\div 4)$

$=\boxed{31.2}$

$4\overline{)126}$ $\;31$; 06

Profesores	Prim	Sec	Bach
%	0	1.1	0

Estudiantes	Sec	Bach	Quím	Comp	Mat
%	0.9	0.4	0	0	0

Tabla 34

O_9: Cambio de símbolos numéricos por símbolos algebraicos.

$2-2^2\times 3\div x^2\times 3\div 4$

$=2-4\times 3-3x^2\div 4$

$=-10+3x^2\div 4$

$2+2^2\times 3-2^2\times 3\div 4$

$2+4\times 3-4\times 3\div 4$

$6\times 3-4\times 3\div 4$

$2x^3\div 4$

$x^3\div \frac{4}{2}$

$x^3=2$

Profesores	Prim	Sec	Bach
%	0	1.1	0

Estudiantes	Sec	Bach	Quím	Comp	Mat
%	0	0	0	0	0

Tabla 35

Las expresiones de la siguiente tabla, utilizadas por profesores y estudiantes para obtener el resultado de $2 + 2^2$, reflejan las irregularidades presentes al calcular el valor numérico de expresiones que incluyen varias operaciones aritméticas con potencias. Se utilizaron en los algoritmos **A_2**, **A_3**, **A_5** o **A_6**. La expresión es de la forma $a+b^2$, a y b son números reales.

$a+b^2$	$(a+b)^2$	$a+b^2=a+b\times b=(a+b)\times b$		$a+b^2=(a+b)^2=(a+b)\times 2$			
$a+b+2$	$a+b\times 2$	$a\times b\times 2$	$a+b$	$a\times b$	$a\times b^2$	$a+b^3$	

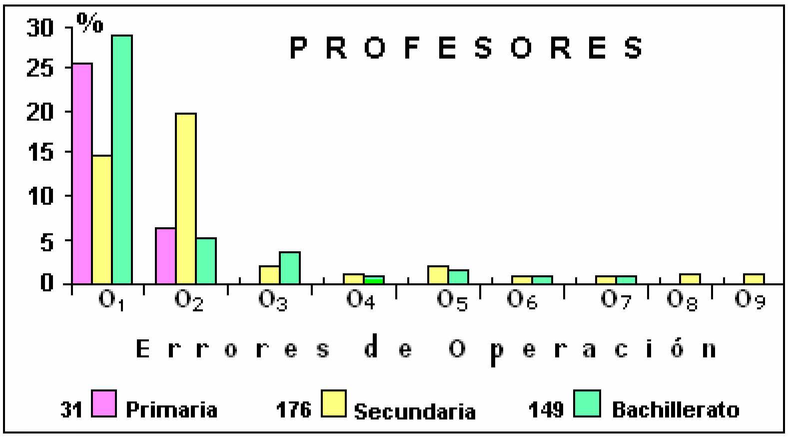
Estas expresiones algebraicas determinan relaciones de dos variables representables gráficamente por regiones del plano, tales que cada pareja de números reales correspondiente a un punto de la región, satisface la relación algebraica producto del error; en otras palabras, se tienen todas las parejas de números reales que satisfacen el error y una representación geométrica para esa relación. Consecuentemente, a partir de los errores se puede introducir el tema de variación.

Resumen de los resultados de los errores de operatividad

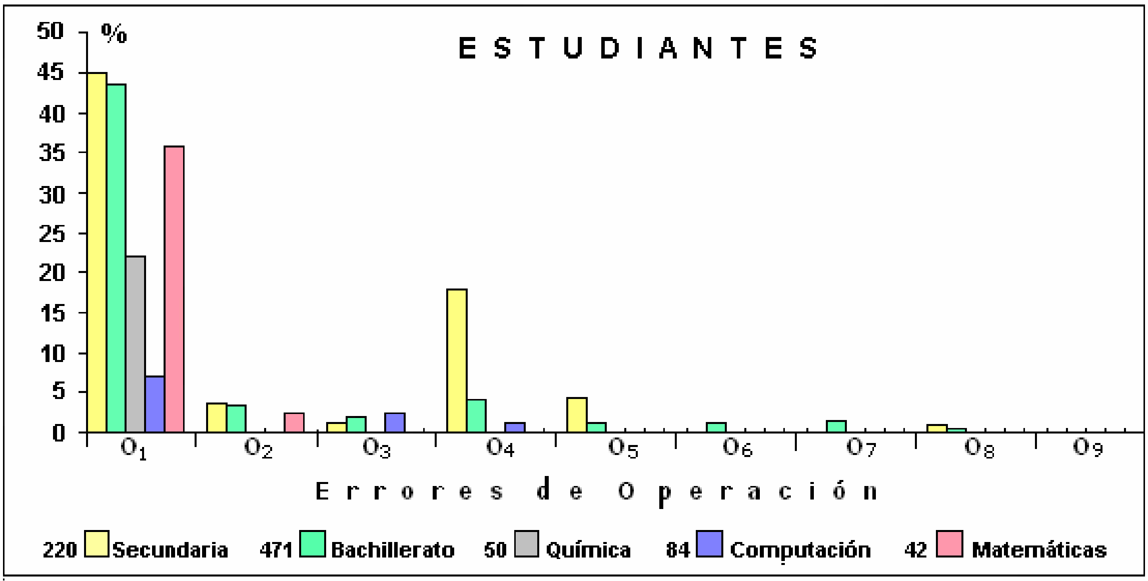
En la *Tabla 36* y las *Gráficas 3* y *4* se resumen los porcentajes de los resultados de los errores en las operaciones de los encuestados. Se calcularon con base en el número de individuos de cada grupo.

Errores de Operación	**Profesores (%)**			**Estudiantes (%)**				
	Prim (31)	**Sec (176)**	**Bach (149)**	**Sec (220)**	**Bach (471)**	**Quím (50)**	**Comp (84)**	**Mat (42)**
O_1	25.8	14.8	28.9	45.0	43.5	22.0	7.1	35.7
O_2	6.5	19.9	5.4	3.6	3.4	0	0	2.4
O_3	0	1.7	3.6	1.4	1.9	0	2.4	0
O_4	0	1.1	0.7	17.7	4.2	0	1.2	0
O_5	0	1.7	1.3	4.5	1.1	0	0	0
O_6	0	0.6	0.7	0	1.1	0	0	0
O_7	0	0.6	0.7	0	1.7	0	0	0
O_8	0	1.1	0	0.9	0.4	0	0	0
O_9	0	1.1	0	0	0	0	0	0

Tabla 36



Gráfica 3



Gráfica 4

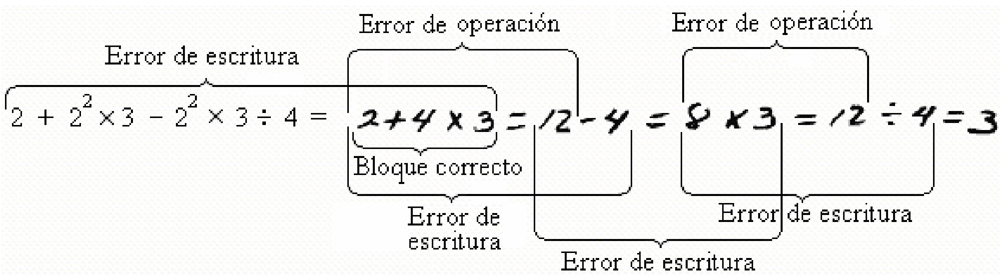
Comentarios sobre los errores en las operaciones

1. Los encuestados incurren con más frecuencia en errores del tipo $\mathbf{O_1}$, en forma sistemática, no son ocasionales.
2. La omisión de una operación, o de un número en el cálculo, se presentan con menor frecuencia en ambos grupos de participantes.
3. El intercambio entre el dividendo y el divisor de una división ocurre ocasionalmente en ambos grupos de individuos, cuando el dividendo es menor que el divisor. En esos casos persiste la idea de que al dividir dos números naturales el dividendo es el mayor y, por tanto, el cociente debe tener parte entera.
4. Profesores y estudiantes del nivel medio superior anularon o simplificaron expresiones numéricas simétricas o inversas, aun cuando éstas se encuentran ligadas a otras operaciones.

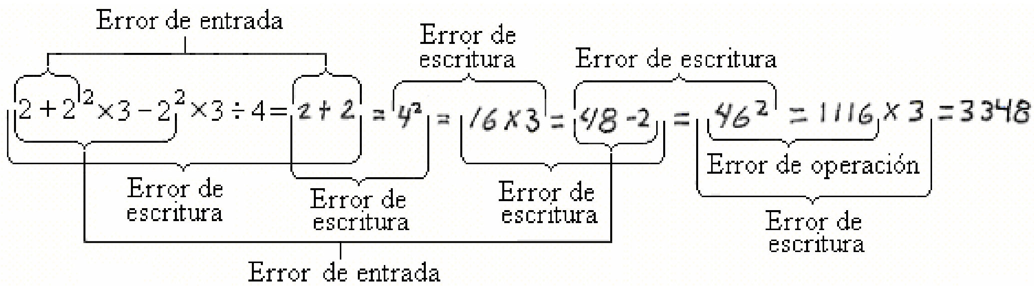
Descripción de los errores de escritura

En el proceso de transformación de la expresión aritmética a su forma más simple se tiene una acumulación de varios tipos de errores. Es pertinente hacer notar la incidencia tan alta de errores de escritura, mostrada en los *Ejemplos* 15 y *16*, cuando los participantes utilizan una sucesión de igualdades, dispuestas en columna o en fila.

Ejemplo 15:

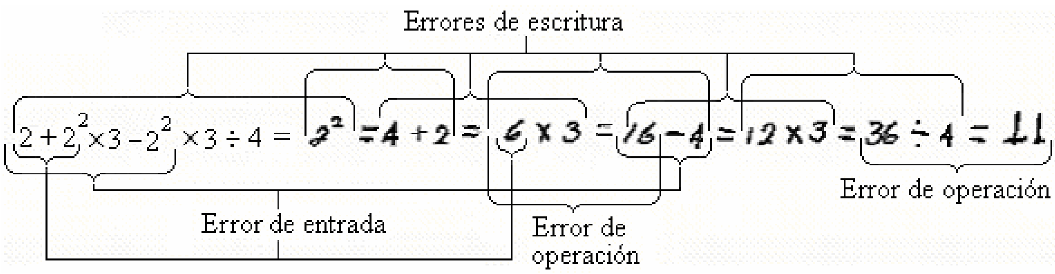


Ejemplo 16:



En el *Ejemplo 17*, además de presentar los seis errores de escritura y uno de operación señalados, se destaca que, de los ocho bloques numéricos unidos en sucesión con el signo de igualdad, se tienen 28 errores de entrada, derivados del empleo incorrecto de la transitividad de la igualdad: las combinaciones de ocho objetos tomados de dos en dos. Esta situación persiste en casi todos los casos que encadenan la igualdad. Aun cuando 11 es la respuesta correcta, en este caso, no lo es porque es resultado de una división equivocada: 36 ÷ 4 = 11.

Ejemplo 17:



En la *Tabla 37* y las *Gráficas 5* y 6 se describen los porcentajes de los errores de escritura. En la mayoría de los casos, profesores y estudiantes, los cometieron varias veces en el proceso de resolución. El conteo considera sólo el número de individuos que incurrieron en este tipo de error, no el número de errores de cada encuestado, ni la frecuencia del incurrimiento. Se estima que lo importante es enterarse de la presencia y persistencia del error, para darse cuenta de la necesidad de aprender a escribir bien el texto matemático.

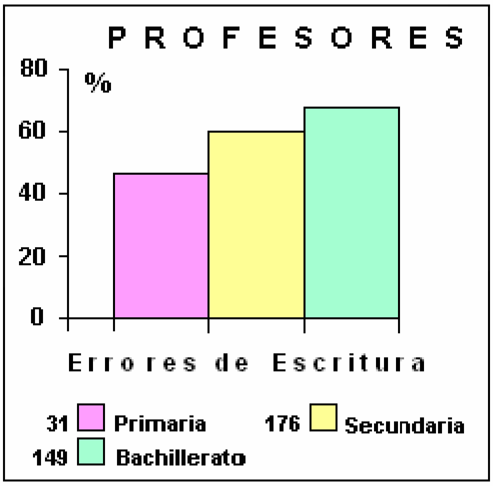
Errores de Escritura

$$2+2^2\times 3-2^2\times 3\div 4=2+4=6\times 3=16-4=14\times 3=42-4=38\times 3=114\div 4=28.5$$

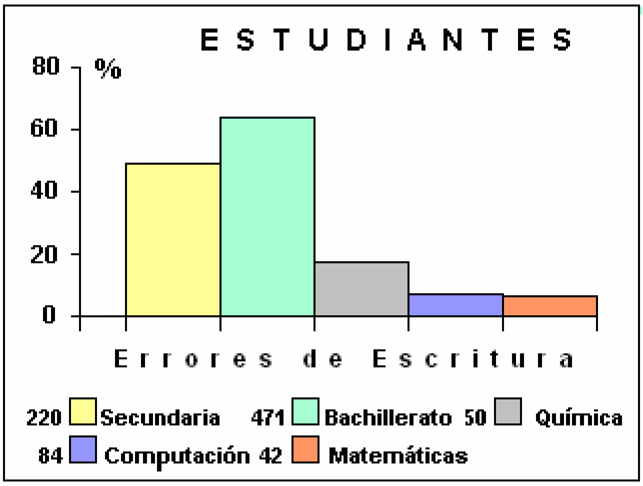
Profesores	Prim	Sec	Bach
%	45.2	58.5	66.4

Estudiantes	Sec	Bach	Quím	Comp	Mat
%	54.1	70.9	20.0	8.3	7.1

Tabla 37



Gráfica 5



Gráfica 6

Caracterizaciones de las formas de representación de los procedimientos

En este apartado se describen y ejemplifican las diferentes formas en que representaron el proceso de obtención del resultado, profesores y estudiantes. Las *Tablas* de la *38* a la *43* y las *Gráficas 7* y *8* exhiben los porcentajes obtenidos.

El encadenamiento de la igualdad se presenta cuando el individuo utiliza una sucesión de igualdades dispuestas en una fila. Están presentes tanto en profesores como estudiantes. El 30.3% del total de profesores (356) y el 35.2% de todos los estudiantes (867) presentaron su procedimiento de esta manera.

R_1: Procedimiento expresado por medio de una sucesión de igualdades en una fila (Encadenamiento de la igualdad)

$$2+2^2\times 3-2^2\times 3\div 4 = 2+4\times 3-4\times 3\div 4 = 6\times 3-4\times 3\div 4 = 12-4\times 3\div 4 = 24\div 4 = 6$$

Profesores	Prim	Sec	Bach		Estudiantes	Sec	Bach	Quím	Comp	Mat
%	19.4	30.1	24.8		%	19.1	35.7	20.0	9.5	7.1

Tabla 38

El 49.7% del total de profesores (356) y el 40.0% de todos los estudiantes (867) representaron el procedimiento mediante el uso de R_2. En la *Tabla 39* se describen los porcentajes del uso de sucesiones de igualdades en columna para cada grupo de individuos.

R_2: Procedimiento expresado por medio de una sucesión de igualdades en una columna

$$\begin{array}{l} 2+2^2\times 3-2^2\times 3\div 4 = \\ 2+4\times 3-4\times 3\div 4 = \\ 2+12-12\div 4 = \\ 2+12-3 = 14-3 = \underline{11} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2+2^2 * 3-2^2 * 3\div 4 = \\ 2+4\times 3-4 * 3\div 4 = \\ 6\times 3-12\div 4 = \\ 18-12 = 6 \end{array}$$

Profesores	Prim	Sec	Bach		Estudiantes	Sec	Bach	Quím	Comp	Mat
%	32.3	49.4	53.7		%	42.7	42.7	60	85.7	59.5

Tabla 39

Las *Tablas* de la 40 a la *43* ilustran otras formas de representación del procedimiento para transformar la expresión propuesta.

R_3: Procedimiento expresado por medio de una sucesión de operaciones

$$2+2^2\times 3-2^2\times 3\div 4 = 10.5 \qquad \begin{array}{r} 2 \\ +4 \\ \hline 6 \end{array} \quad \begin{array}{r} 6 \\ \times 3 \\ \hline 18 \end{array} \quad \begin{array}{r} 18 \\ -4 \\ \hline 14 \end{array} \quad \begin{array}{r} 14 \\ +3 \\ \hline 12 \end{array} \quad 4\overline{)42}\ \ 10.5,\ 02$$

Profesores	Prim	Sec	Bach		Estudiantes	Sec	Bach	Quím	Comp	Mat
%	35.5	17.6	10.1		%	28.2	14.6	0.0	1.2	23.8

Tabla 40

R_4: Procedimiento expresado con igualdades y operaciones

$$\begin{array}{l} 2+2^2\times 3-2^2\times 3\div 4 = 10.5 \\ 2+2(2)\times 3-2(2)\times 3\div 4 \\ 2+4\times 3-4\times 3\div 4 = 4+2 = 6 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3 \\ \times 6 \\ \hline 18 \end{array} \quad \begin{array}{r} 18 \\ -4 \\ \hline 14 \end{array} \quad \begin{array}{r} 14 \\ \times 3 \\ \hline 42 \end{array} \quad 4\overline{)42}\ \ 10.,\ 02.0$$

Profesores	Prim	Sec	Bach		Estudiantes	Sec	Bach	Quím	Comp	Mat
%	3.2	0.6	1.3		%	2.3	4.7	12.0	2.4	4.8

Tabla 41

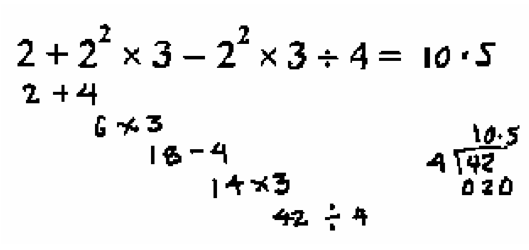
R_5: Procedimiento expresado retóricamente

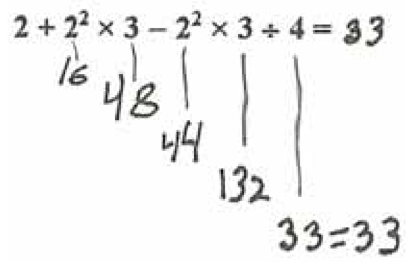
$2+2^2\times 3-2^2\times 3\div 4=$ Se suma 2 +2 el resultado que es 4 se multiplica por 2 porque es la raiz cuadrada 8 × 3 el resultado menos 2X2 el resultado por 3 el resultado entre 4 y el ultimo resultado es 15.

Profesores	Prim	Sec	Bach		Estudiantes	Sec	Bach	Quím	Comp	Mat
%	9.7	2.3	4.0		%	7.8	2.5	0.0	0.0	0.0

Tabla 42

R_6: Procedimiento expresado en diagrama de árbol





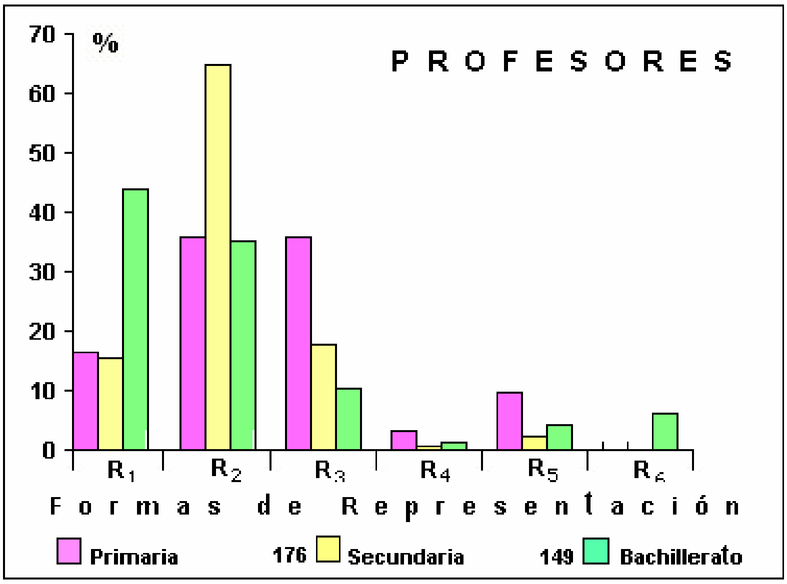
Profesores	Prim	Sec	Bach		Estudiantes	Sec	Bach	Quím	Comp	Mat
%	0.0	0.0	6.0		%	0.0	0.0	8.0	1.2	4.8

Tabla 43

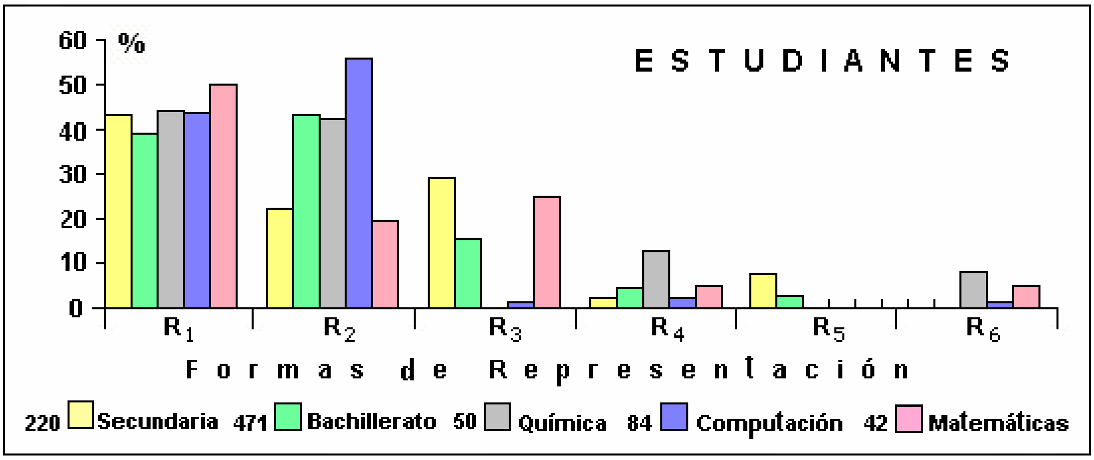
En la *Tabla 44* y en las *Gráficas 7* y *8* se resumen los porcentajes de las formas distintas de representar el proceso que conduce al resultado.

Representación	Profesores				Estudiantes				
	Prim (31)	Sec (176)	Bach (149)		Sec (220)	Bach (471)	Quím (50)	Comp (84)	Mat (42)
R_1	19.4	30.1	24.8		19.1	35.7	20.0	9.5	7.1
R_2	32.3	49.4	53.7		42.7	42.7	60	85.7	59.5
R_3	35.5	17.6	10.1		28.2	14.6	0.0	1.2	23.8
R_4	3.2	0.6	1.3		2.3	4.7	12.0	2.4	4.8
R_5	9.7	2.3	4.0		7.8	2.5	0.0	0.0	0.0
R_6	0.0	0.0	6.0		0.0	0.0	8.0	1.2	4.8

Tabla 44



Gráfica 7



Gráfica 8

Comentarios sobre los resultados de las formas de representar los procedimientos

- Al aumentar el nivel de escolaridad de los estudiantes es más frecuente encontrar que utilizan una sucesión de igualdades. La forma de representar el procedimiento de resolución no debe influir en los errores; sin embargo, cuando el encuestado utiliza una sucesión de igualdades en fila incurre en el error de escritura.
- En los profesores de primaria la forma de representación con secuencias de operaciones tiene el primer lugar en el uso.
- De los que utilizan la representación retórica, los estudiantes de secundaria y bachillerato lo hacen en mayor número.
- La representación expresada en forma de diagrama de árbol se presenta en mayor grado en estudiantes del nivel universitario.

Observaciones sobre los procesos de resolución

Las *Tablas 45* y *46* y las *Gráficas 9* y *10* muestran realizaciones de los profesores y estudiantes que no son errores: Corresponden a omisiones o uso innecesario de símbolos específicos del lenguaje de la matemática. Se identifican con $\mathbf{S_1}$ y $\mathbf{S_2}$. No influyen en el procedimiento ni en la obtención del resultado correcto; sin embargo, son reglas sintácticas que deben observarse.

S_1: No se hace uso del signo de igualdad					$2+2^2\times 3-2^2\times 3\div 4 = 11$ $2+4\times 3-4\times 3\div 4$ $2+12-3$				
Profesores	**Prim**	**Sec**	**Bach**		**Estudiantes**	**Sec**	**Bach**	**Quím**	**Comp**	**Mat**
%	67.7	25.6	14.0		**%**	2.3	10.0	0	16.7	38.0

Tabla 45

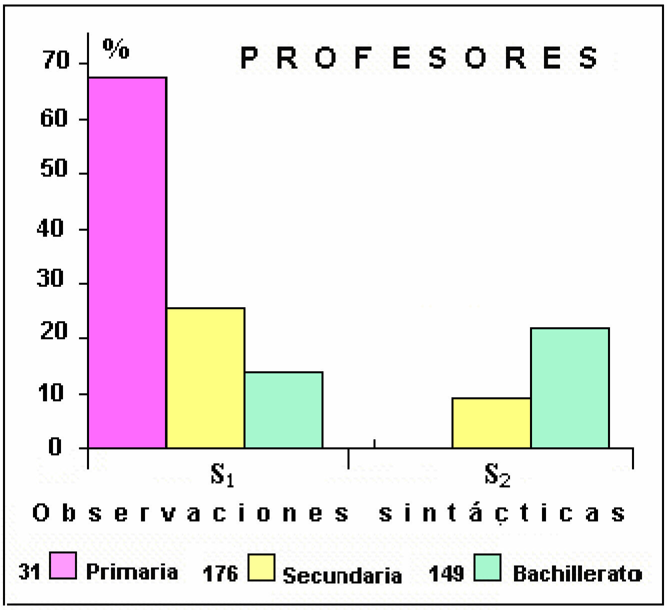
S_2: Uso innecesario de paréntesis										
$2+2^2\times 3-2^2\times 3\div 4 = 2+((2)^2\times 3)-(((2)^2\times 3)\div 4)=$ $2+(4\times 3)-((4\times 3)\div 4) = 2+12-(12\div 4)=$ $2+12-3= 14-3 = \boxed{11}$										
Profesores	**Prim**	**Sec**	**Bach**		**Estudiantes**	**Sec**	**Bach**	**Quím**	**Comp**	**Mat**
%	0	9.1	22.1		**%**	0.9	9.6	4.0	26.2	14.3

Tabla 46

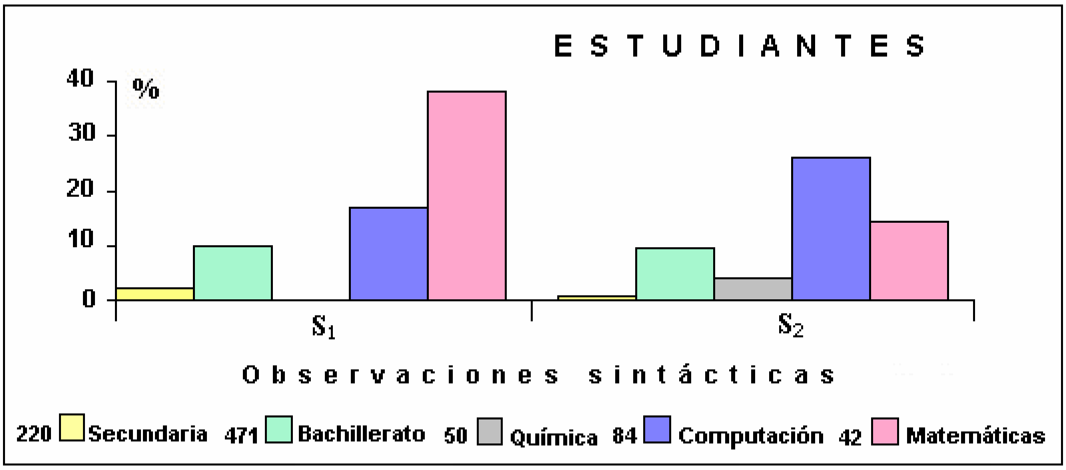
En la *Tabla 47* y en las *Gráficas 9* y *10* se describen los porcentajes de $\mathbf{S_1}$ y $\mathbf{S_2}$.

Observación	**Profesores**				**Estudiantes**				
	Prim (31)	**Sec (176)**	**Bach (149)**		**Sec (220)**	**Bach (471)**	**Quím (50)**	**Comp (84)**	**Mat (42)**
S_1	67.7	25.6	14.0		2.3	10.0	0	16.7	38.0
S_2	0	9.1	22.1		0.9	9.6	4.0	26.2	14.3

Tabla 47



Gráfica 9



Gráfica 10

Comentarios finales y conclusiones

Del diagnóstico y análisis de errores en la enseñanza de la matemática se desprende que deben utilizarse en el tratamiento de múltiples temas en el aula, permiten al profesor incidir en aspectos didácticos y en el diseño curricular y conducirlo a una competencia cada vez más formal de los conceptos matemáticos. La posibilidad de utilizar los errores cometidos por los estudiantes y profesores en clases de matemáticas, en la organización de los contenidos, se justifica con lo siguiente:

- Si el profesor conoce los errores más frecuentes de los estudiantes, tiene ocasión de preparar estrategias didácticas alternativas previas a la realización de la enseñanza para afrontar el aprendizaje de los contenidos que presentan dificultades. Con base en los tipos de errores y en la frecuencia de su incurrimiento, hay la posibilidad de contemplar acciones para su prevención en el aula

- Los errores representan un ambiente importante para que los profesores realicen investigaciones sencillas, sobre contenidos matemáticos determinados. Estos aspectos se relacionan con temas propios de la matemática escolar, no incluidos en el currículo de la matemática oficial. Permiten realizar actividades de búsqueda de propiedades de los números y de sus relaciones. Con base en estos descubrimientos, el profesor puede diseñar problemas de investigación adaptados al nivel de los alumnos.
- Los errores definen un contexto. Con el conocimiento matemático que gravita alrededor del tema, que su aprendizaje produce errores en los estudiantes, es posible construir un "islote" de contenidos matemáticos: *establecer una estructura local de conocimiento*. Existe la posibilidad de estructurar ejes temáticos tomando en cuenta los tópicos que ha sido motivo de error y otros con los que éstos se relacionan. Son la base para el diseño de actividades de aprendizaje y de materiales de apoyo. Un cuerpo de conocimiento matemático así estructurado conduce a un mayor nivel de eficiencia en el aprendizaje y a preservar la presencia de errores en el proceso de aprendizaje.

En la continuación del presente trabajo se contempla lo siguiente:

- En una parte se estudia el diagnóstico y el análisis de errores en la transformación de las mismas expresiones numéricas, empleando dos tipos de calculadoras, una básica, de cuatro operaciones fundamentales y una científica. En una sesión de trabajo se pidió a grupos de profesores de los niveles secundaria, bachillerato y del nivel universitario que resolvieran el ejercicio *7* con una calculadora del primer tipo. En otra sesión se realizó la misma actividad con la segunda calculadora. En general, obtuvieron resultados diferentes. Después, se les pidió que el resultado obtenido con la primera calculadora lo obtuvieran con la segunda y, recíprocamente, que llegaran con la primera al resultado encontrado con la segunda. En casi la totalidad de casos tienen dificultades y no consiguen hacerlo correctamente. Se analizó la información recabada. La calculadora es una herramienta útil en el tratamiento algorítmico, en los cálculos y en la detección de errores. Es posible realizar actividades matemáticas con esa herramienta para descubrir y afianzar algunas propiedades de los números y sus relaciones.
- En otra parte del estudio, con profesores y estudiantes, se encontraron curvas o regiones del plano, determinadas por un conjunto de parejas de números reales, que verifican una relación de dos variables, obtenida al resolver en forma incorrecta una expresión numérica. Lo anterior permite introducir el tema de variación, a partir de relaciones geométricas en el plano.

Tiene fundamental importancia el análisis de la problemática del incurrimiento en errores en el aprendizaje de la matemática, enmarcado desde una perspectiva social. Si las fuentes de error provienen del profesor, se trasmiten a los alumnos de la escuela elemental y se reproducen en toda la escolaridad. Lo anterior, de nuevo, invita a reflexionar sobre las consecuencias sociales que, a futuro, representa la reproducción de errores, desde la enseñanza de la matemática elemental.

Desafortunadamente, estos errores inciden en la mayor parte de la población del país; en particular, en aquel sector que se ha quedado con el menor nivel de escolaridad, o que se encuentra en el estrato social de menor protección; no obstante que, desde hace cuatro décadas, en nuestro país, se ha instituido oficialmente, y permanece en ejercicio, el estudio, desarrollo, investigación y formación de recursos humanos en el área de matemática educativa.

Bibliografía

- Heinze, A. (2005). Mistake-handling activities in the mathematics classroom. In Chick, H. L. & Vincent, J. L. (Eds.). Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 3, pp. 105-112. Melbourne: PME.
- Lannin J., Townsend, B. & Barker D.(2006). The Reflective Cycle of Student Error Analysis. In For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematical Education. Vol. 26, num. 3.
- Linchevsky, L. (1995). “Algebra With Numbers and Arithmetic With Letters: A Definition of Pre-Algebra. In The Journal of Mathematical Behavior. Vol. 14, pp. 113-120.
- Mulhern, P. (1989). Betwen the ears: Making inferences about internal proceses. En Creer, B. & Mulhern, G. (Eds.). New Directions in Mathematics Education. .Londres:Routledge.
- Rico, L. (1994). “Errores en el aprendizaje de las matemática”. En Kilpatrick, J., Rico, L. y Gómez, P. Educación Matemática. Grupo Editorial Iberoamérica. S. A de C. V. México.
- Stigler, J., Gonzales, P., Kawanaka, T. et al. (1999). The TIMSS videotape classroom study. U.S. Department of Education. National Center for Education Statistics, Washington, DC: U.S. Government Printing Office. http://nces.ed.gov/timss.
- Vergnaud, G. (1991). El niño, las matemáticas y la realidad. Trad. L. Ortega & G. M. Bastien. Primera edición en español. Ed. Trillas. México.

Vicente Carrión Miranda. Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV.
Email: vcarrion@mail.cinvestav.mx
México*, *D. F.