NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 100, mayo de 2019, páginas 153-158

Significar y comprender los sistemas numéricos

Luis Rico
(Universidad de Granada. España)

1. Introducción

Como investigador en Didáctica de la Matemática, a lo largo de mi biografía académica, de manera sostenida y permanente, he publicado algunos trabajos didácticos junto con otros matemáticos, donde destacan ciertos términos: los sustantivos *número* y *numeración*, el verbo *numerar*, el adjetivo *numérico*, así como otros términos derivados. De ahí que me sintiera complacido por la invitación hecha desde la Revista *Números* para participaren la edición de su Volumen 100 y estimulado a expresar algunas ideas al efecto.

Formo parte del Grupo de investigación *Didáctica de la Matemática: Pensamiento Numérico* desde comienzos de la década de los 80 del pasado siglo, grupo que surge en la Universidad de Granada y, desde 1988, se integra institucionalmente en el Plan Andaluz de Investigación Desarrollo e Innovación de la Junta de Andalucía, hace ahora 30 años.

Números y el Grupo *Didáctica de la Matemática: Pensamiento Numérico* han tenido el privilegio y compartido la responsabilidad de construir la Educación Matemática en España, han protagonizado su constitución y desarrollo en estas últimas décadas y han contribuido a su sostenimiento y progreso mediante sus publicaciones e investigaciones, dando prioridad a los estudios didácticos sobre contenidos numéricos. Revista y Grupo han incorporado otros temas de trabajo, distintos a los numéricos, en sus publicaciones e indagaciones, pero es patente que ambas denominaciones responden a una prioridad conceptual y temática, que muestran su inclinación por trabajos centrados en las estructuras numéricas y algebraicas, procesos infinitos y cálculo (Rico, 1997, pp. 281-289).

Este campo de estudio-*Pensamiento numérico*- responde a un modo de trabajar y caracterizar determinadas ramas de la matemática y de su didáctica, mediante uso preferente de los conceptos y estructuras numéricas y su empleo como herramientas formativas y funcionales. Centrarse en los contenidos numéricos ha caracterizado el enfoque del grupo de investigación en que he desarrollado mi trabajo didáctico en estos años, y donde he mantenido una investigación propia continuada. Mi producción está vinculada a esta línea, desde la cual he participado en diversos proyectos, con resultados genuinos y acreditados sobre los significados y la comprensión de los conceptos numéricos, la naturaleza de sus contenidos, de su enseñanza, de su aprendizaje y su evaluación. En estas décadas el análisis didáctico ha proporcionado el método para encauzar estos trabajos[1].

En lo que sigue presento unas breves notas acerca de ideas y aportaciones hechas desde el marco en que he participado y trabajado activa y singularmente, para cada uno de los conceptos numéricos principales que se estudian durante la educación obligatoria.

[1] http://fqm193.ugr.es/

La moderna conceptualización del número está basada en la noción de sistema; hablando con precisión, me voy a referir a sistemas numéricos no solo a números (Fefermann, 1989).

Utilizo una noción de significado de un término, concepto o estructura propia y fundada, apropiada para introducir esas aportaciones y orientar su entendimiento y comprensión.

2. Significado de un concepto matemático escolar

"Entender un concepto matemático es conocer su definición, representarlo, mostrar su operaciones, relaciones y propiedades y sus modo de uso, interpretación y aplicación a la resolución de problemas. El profesor necesita un dominio en profundidad sobre los contenidos que se propone enseñar, a partir de los cuales planificar y orientar el aprendizaje de los escolares. El contenido didáctico en cada concepto se inicia mediante el análisis y demarcación de su significado." (Rico, 2016).

"Nos ocuparemos de problemas semánticos que no pueden ser investigados con medios empíricos, porque no tratan de elementos fácticos sino, a lo sumo, de ciertas características de nuestro conocimiento sobre tales objetos; (…) nos ceñiremos al concepto semántico de significado, vale decir el sentido y la referencia de los predicados, las proposiciones y las teorías." (Bunge, 2008).

"A un signo (nombre, unión de palabras, signo escrito), además de lo designado, que podría llamarse la referencia del signo, va unido lo que yo quisiera llamar el sentido del signo, en el cual se halla contenido el modo de darse. (…) Un nombre propio (palabra, signo, fila de signos o expresión) expresa su sentido, se refiere a su referencia o la designa. Con un signo expresamos su sentido y designamos su referencia." (Frege, 1996).

"Referencia, representación y sentido son los tres organizadores o categorías semánticas que empleamos para el estudio e interpretación del significado de los contenidos matemáticos escolares."(Rico, 2016).

Comprender un contenido matemático en profundidad implica interpretar sus conceptos y ejecutar sus procedimientos con significado coherente, "entender algo significa asimilarlo en un esquema apropiado." (Skemp, 1987).

3. Significado del número natural

Un primer sistema numérico formal es el de los naturales, conjunto infinito, inductivo y con primer elemento, dotado de las operaciones internas de suma y producto, con sus propiedades básicas, junto con las relaciones de orden y divisibilidad. Entes, relaciones y operaciones, establecen –salvo isomorfismo- la estructura específica propia del sistema de los números naturales. Siguiendo a Russell (1973) "podemos definir los números finitos (naturales) como aquellos que se obtienen a partir de 0 e incrementando 1 en cada paso que, por tanto, obedecen a la inducción matemática. Si n es un número finito, n+1, al que se llama *sucesor de n* es también finito y distinto de n (…) Esto es, los números finitos son aquellas clases que no son semejantes a las partes de sí mismas que se obtienen quitando términos singulares." (pp. 491-493).Esta estructura proporciona la referencia para los números naturales, y da respuesta a la cuestión sobre cual clase de entes son tales números.

El estudio de las sociedades primitivas ayuda a nuestra comprensión sobre cómo numeraban nuestros antecesores y ha facilitado la interpretación de las marcas numéricas, de sus símbolos y reglas, encontrados en yacimientos humanos prehistóricos. Esas marcas se consideran intencionales, secuenciales y cuidadosamente estructuradas; su evolución confluye en los actuales sistemas de numeración, entre los que el sistema decimal ocupa una posición central.

En la formación del concepto de número natural también se plantean cuestiones relativas a la relación entre esos números y el mundo empírico, junto con su aplicabilidad y modos de uso. Los naturales están presentes en la práctica social cotidiana. También son relevantes los contextos en que los números se utilizan con propósito específico, entendiendo por contexto un marco estructural en que el número satisface una determinada función como instrumento de conocimiento. Las funciones usuales de los números naturales tienen lugar en los siguientes contextos: contar, cuantificar, medir, ordenar, operar y simbolizar (Rico, 1995).

El sistema de los números naturales, se nota por $\mathbb{N}$ y, formalmente, se fundamenta como estructura matemática en base al principio de inducción y sus axiomas o, alternativamente, en las clases finitas y sus operaciones; operaciones y relaciones que se simbolizan y representan mediante una diversidad de notaciones y sistemas; cada modo de entender, interpretar y emplear los números finitos se realiza mediante dominio de términos, fenómenos, contextos y situaciones que encauzan y dan sentido a los números naturales, los hacen nociones funcionales. Las combinaciones de esas categorías: referencias, sistemas de representación y sentidos, configuran los diversos significados para el sistema de los números naturales.

4. Significado del número entero

El sistema de los números enteros se nota por $\mathbb{Z}$, y comprende los números positivos y los negativos. Surge como resultado de simetrizar el conjunto de los números naturales respecto a la operación suma, es decir, lo amplia con los elementos simétricos para la adición, por generalización de la relación parte-todo donde toda ecuación aditiva $a + x = b$, tiene solución, es decir, todos aquellos casos en que el sumando, a, es mayor que el resultado, b.

Históricamente aparece al considerar válidas las soluciones obtenidas en la resolución de ecuaciones. Al extender la operación suma y la relación de orden a los enteros, junto con sus propiedades así como la operación producto, se introduce unanueva estructura -dominio de integridad– que sintetiza las propiedades formales del nuevo conjunto e incluye los naturales como subconjunto propio, del cual es ampliación.

La riqueza de significados de los nuevos números se muestra en la contraposición de los *números enteros* y los *números relativos*, o naturales con signo. Cinco son las diferencias entre ambos conjuntos, sistematizadas y estudiadas por González-Marí (1997) y Maz (2005):

- Primera: orden total (enteros) vs. orden parcial o doble natural e inversión en los negativos
- Segunda: sin primer elemento (enteros) vs. con primer elemento (natural relativo)
- Tercera: continuidad de medida(enteros) / discontinuidad de medida al cruzar el 0 (relativos)
- Cuarta: cero único (enteros)vs. cero doble (relativos)
- Quinta: composición aditiva vs. adición natural y anulación/ compensación.

Las nociones de cantidad y de número expresan los conceptos básicos en la construcción de estos nuevos números. Entre ellas destacan: cantidad como expresión de una cualidad; signos como relaciones; signos como operaciones; signos como oposición lógica. Estos son, entre otros, algunos sentidos con que se trabajan los números con signo, no siempre coincidentes con el sentido de número entero. Dotar de sentido matemático la noción intuitiva de cantidad negativa, abstraer esa noción hasta vincularla con soluciones de ecuaciones algebraicas y dotar de interpretación formal al conjunto de entes y operaciones resultantes, es el significado logrado para estos nuevos números.

Los fenómenos que los enteros trabajan corresponden a tres tipos de situaciones:

- Fenómenos físicos (desplazamientos, deformaciones, fuerza, temperatura y capacidad).
- Fenómenos contables (contabilidad, ganancias y pérdidas), y
- Fenómenos matemáticos (naturales relativos, comparaciones ordinales, operaciones aritméticas, operaciones algebraicas, secuencias numéricas, y desplazamientos en el plano cartesiano).

Tres vías principales se consideran para construir el conjunto $\mathbb{Z}$ de los enteros: la vía aritmética inductiva, la vía algebraica y la vía formal. La complejidad conceptual de la construcción formal se muestra en lo tardío de su aparición; solo recientemente dicho concepto se formula y se justifica en términos del mantenimiento de las leyes formales y sus propiedades mediante el principio de permanencia de Hankel, enunciado y empleado desde 1867. Este conjunto está totalmente ordenado y es inductivo: todo término tiene un siguiente.

Los signos + y –, que preceden a las notaciones de los naturales representan el carácter positivo o negativo del número en cuestión. Los puntos equidistantes en la recta numérica, construidos a partir del punto 0 y de un segmento unidad, completan los dos modos convencionales comunes que expresan dichos números. Las representaciones usuales de los enteros son sencillas, intuitivas y complementarias

5. Significado del número racional

El sistema de los números racionales, que se representa por $\mathbb{Q}$, se basa en las fracciones y/o en las expresiones finitas de los números decimales, cuenta con las operaciones suma y producto y una relación de orden arquimediana y compatible con las operaciones. Surge como resultado de simetrizar el conjunto de los números enteros para la operación producto, es decir, de ampliarlo con los elementos simétricos para la multiplicación, por generalización de la relación parte-todo multiplicativa, cuando se incluyen los casos en que la unidad es mayor que el todo. Históricamente las fracciones aparecen en una relación parte-todo multiplicativa, como concepto que expresa la relación entre una parte y el todo del que procede; esta relación dota de sentido numérico las soluciones obtenidas en las ecuaciones multiplicativas. Al extender la operación producto mediante la inclusión de inversos para los números enteros (excepto 0), toda ecuación multiplicativa $a \bullet x = b$, con $a \neq 0$, tiene solución.

Algebraicamente la construcción de los racionales se hace mediante extensión por simetrización multiplicativa del conjunto $\mathbb{Z}$. La nueva estructura que se presenta –cuerpo conmutativo y arquimediano– sintetiza las propiedades formales del nuevo conjunto, el cual incluye como subconjuntos propios a los naturales y los enteros, de los cuales es extensión.

En este conjunto quedan definidas las leyes internas *resta* (suma del simétrico) y *división* (producto por el inverso). El conjunto está totalmente ordenado; es numerable; sin primer ni último elemento; es denso ya que entre dos racionales siempre hay un tercero, de donde cada elemento carece de siguiente. Este conjunto no es completo, no toda sucesión de racionales de Cauchy tiene límite racional, lo cual incluye el problema de la inconmensurabilidad.

Los conceptos de razón, operador, cociente, reparto y medida son sentidos propios del número racional, basados todos ellos en la relación parte-todo multiplicativa de la noción de fracción, en la base de los números racionales (Castro-Rodríguez, 2015).

Los sistemas usuales para representar racionales emplean gráficos discretos o continuos con objetos divididos o repartidos en partes iguales; representaciones simbólicas algebraicas, fraccionarias o de divisiones indicadas; notaciones decimales exactas o periódicas; operadores multiplicativos; transformaciones lineales; medidas de cantidades para distintas magnitudes; relaciones de proporcionalidad entre cantidades, tabulares o gráficas de semejanza entre figuras o entre distintas dimensiones de una misma figura; aproximaciones sucesivas mediante un algoritmo; o puntos de la recta numérica, entre otros.

6. Significado del número real

La estructura numérica más avanzada en el currículo de Secundaria es la de los números reales; con mayor precisión, la de los números irracionales. Encontramos los irracionales al comienzo de la historia de la matemática, en el problema revelado y estudiado por los pitagóricos acerca de la inconmensurabilidad entre la diagonal y el lado de un cuadrado. Los trabajos de Dedekind, Cantor y Weierstrass formalizan los reales, por tanto los irracionales, en el siglo XIX, progresando desde el álgebra hacia el análisis (Romero, 1997; Rico, 2106).

La estructura del conjunto de los reales, $\mathbb{R}$, es la de cuerpo arquimediano, ordenado, no numerable y completo. Conceptos clave que intervienen son los de cortadura y sus tipos; igualdad de números mediante cortaduras; principio de monotonía para las operaciones; axioma de Cantor: identificación entre los números reales y los puntos de la recta; exactitud formal de una medida y aproximación en la práctica; concepto de irracional, parte del marco formal; números trascendentes; aproximación racional de un irracional (Klein, 2006).

Los sistemas de representación empleados para los reales son simbólicos o gráficos. Los simbólicos utilizan en general el sistema decimal mediante expresiones decimales infinitas o vinculadas con algoritmos, algebraicos o analíticos, que generan los cifras de los diferentes órdenes de magnitud en cada número, o emplean símbolos singulares propios: π, Φ, e. Entre los sistemas gráficos destacan las relaciones de cantidades inconmensurables que identifican los irracionales cuadráticos, o bien la relación entre la longitud de una circunferencia y su diámetro que identifica el número π. La recta real es la representación gráfica por excelencia, donde cada número real viene dado por un punto y recíprocamente, sea éste o no construible.

La discusión de los términos, contextos, fenómenos y situaciones que establecen los sentidos destacados para los números reales subrayan, invariablemente, el problema de la inconmensurabilidad de cantidades que se presentó inicialmente en geometría y que impulsó a partir del siglo XIX el desarrollo del análisis y del álgebra.

Bibliografía

Bunge, M. (2008). *Semántica I. Sentido y referencia*. Barcelona: Gedisa.
Castro- Rodríguez, E. (2015). *Significados de las Fracciones en las Matemáticas escolares y Formación inicial de Maestros.* Granada: UGR.
Fefermann, S. (1989).*The Number Systems*. NY: Chelsea Publishing Company.
Frege, G. (1996). Sobre sentido y referencia. G. Frege: *Escritos filosóficos.* Barcelona: Crítica.
González-Marí, J. L. (1998). *Números naturales relativos.* Granada: Comares.

Klein, F. (2006) *Matemática elemental desde un punto de vista superior*. Madrid: Nivola.
Maz, A. (2005). *Los números negativos en España en los siglos XVIII y XIX.* Granada: UGR.
Rico, L. (1995).*Conocimiento Numérico y Formación del Profesorado.* Granada: UGR.
Rico, L. (1997).*Bases teóricas del Currículo de Matemáticas en Secundaria.* Madrid: Síntesis.
Rico, L. (2016). (Ed.) *Elementos de Didáctica de la Matemática para el Profesor de Secundaria*. Madrid: Pirámide.
Romero, I. M. (1997). *La introducción del número real en enseñanza secundaria.* Granada: Comares.
Russell, B. (1973).*Los principios de la Matemática.* Madrid: Aguilar.
Skemp, R. (1987).*Psicología del aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: Morata.

Luis Rico Romero. Nacido en Almería en 1946. Catedrático Emérito de Didáctica de la Matemática http://www.ugr.es/~lrico/. Facultad de Educación y Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, 18071 Granada. http://www.ugr.es/~dpto_did
Líneas investigación: Análisis Didáctico. Diseño, Desarrollo e Innovación del Currículo de Matemáticas. Evaluación en Matemáticas. Formación Profesores Matemáticas. Pensamiento numérico. Historia de la Educación Matemática, http://www.ugr.es/~lrico/
1988-2017. Director Grupo Investigación Didáctica de la Matemática: Pensamiento Numérico, Plan Andaluz Investigación, Desarrollo e Innovación (PAIDI), Junta Andalucía http://fqm193.ugr.es/
2006-2011. Spanish National Research Coordinator, of the Teachers Education Study in Mathematics (TEDS-M), International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA), http://www.ugr.es/~tedsm
1991-2018. Investigador principal en 8 Proyectos CNEAI, Plan Gobierno de España,
2000-2004. Miembro Grupo Internacional de Expertos en Matemáticas (EG), PISA 2003.
1998-2000. Proyecto Formación de investigadores Educación Matemática para América Latina (FIEMAL), Programa Alfa de la Unión Europea