UNA PROPUESTA DE INGENIERÍA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Carlos Armando Cuevas Vallejo
DME- CINVESTAV-IPN.
México

François Pluvinage
IREM de Straousburgo
France

RESUMEN

En este artículo se propone una didáctica para la enseñanza de las matemáticas aplicable a un nivel post-elemental (nivel medio superior y superior). Este modelo extrae los principios didácticos propuestos, a partir de los planteamientos teóricos de Dewey, Aebli, Claparède, Brousseau, Duval y de la psicología de la inteligencia de J. Piaget. Para ejemplificar la propuesta daremos algunos ejemplos.

Introducción.

> Didáctica es el arte de enseñar algo a alguien que no desea aprenderlo
> G. Brosseau.

Uno de los problemas fundamentales de nuestra sociedad, lo constituye la educación y de ésta, una de las partes cruciales es la enseñanza de las matemáticas. Para todos es conocido cómo alrededor de la enseñanza de las matemáticas, se ha creado un cierto ambiente de temor, que se refleja en los altos índices de reprobación y en la baja matrícula de carreras de alto contenido matemático.

> *Since scholastic mathematics that is cut from phisics is fit neither for teaching nor for application in any other science, the result was the universal hate towards mathematicians – both on part of the poor schoolchildren (some of whom in the meantime became ministers) and of the users (Arnold, 1996. p. 1)*

No obstante, es frecuente que a pesar de ejercer o haberse ejercido la docencia en matemáticas, la pregunta: ¿cómo enseñar matemáticas? sea una cuestión hasta hoy no considerada por la mayor parte de los profesores.

Dada la vasta experiencia docente, era como preguntarle a un individuo que ha caminado durante toda su vida ¿cómo caminas? ¿qué fuerzas actúan y en que forma para producir el movimiento?

Para responder a semejante cuestionamiento fue necesario:

1) Indagar en la sicología del aprendizaje, que tipo de operaciones intelectuales o mecanismos se pueden activar para lograr una mejor comprensión en los conceptos matemáticos.

2) Realizar un examen crítico de nuestra propia actuación como maestros de matemáticas.

La primer tarea que podría ser la experiencia natural de cualquier estudiante, en un matemático se convierte en una tarea verdaderamente titánica puesto que como Uds. conocen las formas y objetos de estudio son totalmente diferentes y chocan de manera frontal con la forma de ser de un matemático.

Y la segunda se puede decir que, una vez realizados los estudios de sicología, al examinar nuestra actuación como maestros, lo más capitalizable de la experiencia docente, fueron los propios errores.

Es decir, hemos encontrado en la sicología que más que indicar “la forma de enseñar”, lo que se puede sugerir es como evitar una enseñanza inadecuada.

En otras palabras, más que decir: ¡que hacer¡ es señalar ¡que no hacer!

Por ejemplo: No es el maestro quien debe de llevar la actividad en el salón de clases, sino el alumno. No es obtener “la mejor manera” de enseñar, sino lograr que los alumnos comprendan o asimilen los conceptos matemáticos.

Así pues el propósito de este artículo, no es el plantear una prescripción acerca de cómo enseñar matemáticas, sino el ofrecer elementos para la construcción de un programa didáctico, orientado a la enseñanza de las matemáticas en un nivel post-elemental (nivel medio superior y superior), que evite que la enseñanza de las matemáticas se conduzca de una forma rutinaria y memorística.

Los principios de nuestra propuesta didáctica se irán presentando conforme se avance en la exposición y fundamentación de la misma.

La Enseñanza Tradicional. Por enseñanza tradicional nos referimos a un sistema derivado de la escuela sensorio-empirista, en donde en síntesis, esta corriente supone que acudiendo a los sentidos y con una actuación meramente pasiva por parte del estudiante, se pueden aprender conceptos matemáticos. En este tipo de enseñanza, el profesor muestra a los estudiantes el conocimiento o el saber y se espera que mediante la repetición de lo hecho por el maestro los estudiantes aprendan.

Un primer inconveniente, para este tipo de enseñanza, es el desconcierto en los estudiantes cuando los problemas que se plantean se salen del esquema en el que fueron "enseñados". Por ejemplo cuando se solicita calcular la pendiente de una recta y en los datos no se dan los dos puntos de la recta explícitamente, el alumno en general se confunde, empieza a repetir verbalmente la fórmula del cociente y en muchos de los casos protesta, porque considera que al no darse los dos puntos en forma explícita, el ejercicio planteado es un problema incompleto.

Con este tipo de enseñanza se aniquila el concepto y se le substituye por su cálculo numérico. Y la repetición verbal como un reflejo, constituye el llamado hábito sensoriomotor o dicho de otro modo, las palabras constituyen así los *signos*,[1] solo que carentes de *significado*.

Con este tipo de enseñanza es frecuente encontrar desconcierto en el educando cuando surgen preguntas del tipo: significado de una operación; o de problemas de aplicación; o en problemas rutinarios

[1]El signo es un símbolo arbitrario. El "símbolo" (en el sentido estricto del término) se asemeja al objeto que significa. La palabra es un signo, el dibujo un símbolo (Aebli, 1958).

presentados con literales no usuales para las variables; problemas que en su resolución contengan tanto la operación directa como la operación inversa. Así pues, este tipo de enseñanza a lo más que puede aspirar es a producir hábitos en el individuo, esto es, adiestrar al educando a repetir procesos matemáticos que se enuncien y se escriban en la misma forma en que el maestro los realizó.

Otra grave consecuencia, de una educación así, es crear en el individuo un "conocimiento" demasiado frágil y volátil, pues basta dejar pasar un tiempo (breve) para olvidar el hábito adquirido. Ante esto, surge la pregunta: ¿Cómo desarrollar en el aula una verdadera enseñanza, que permita un aprendizaje real en el individuo? La respuesta a esta interrogante la podemos encontrar en la sicología de Piaget.

La Escuela Activa. El surgimiento de la escuela activa en el mismo siglo XIX, nos hace notar la importancia de la actividad efectiva del individuo en el proceso del aprendizaje. Esto es, en el proceso de enseñanza aprendizaje el alumno no puede ser una parte pasiva, por el contrario, debe realizar acciones concretas en cada parte del proceso.

Además, nos hace tomar conciencia de lo importante que es para el individuo asociar la educación con el entorno en el que vive.

La escuela activa mediante sus precursores: Lay, Dewey, Claparède, Decroly, Kerschensteiner, etc. Nos hacen notar la importancia que tiene para el aprendizaje, que el individuo efectúe acciones concretas (que posteriormente retoma Piaget como acciones efectivas) para la adquisición de los conceptos o nociones que se pretendan enseñar. Sólo que al no concebir al pensamiento como esquemas de acción, no pudieron dar explicación a muchos de los procesos del mecanismo intelectual. Sin embargo, las aportaciones de esta escuela son de vital importancia para el desarrollo de la psicología que posteriormente concreta y enuncia Piaget.

Tres son los principios más importantes, bajo nuestro punto de vista, de la escuela activa y que rescatamos y anotamos como elementos de la didáctica a proponer. El primero, como ya mencionamos, es la importancia que para la enseñanza tiene ¡la acción! Que en el caso de la enseñanza de las matemáticas, no tiene por que ser necesariamente una acción física, sino por el contrario, es esencialmente mental[2] .

- Es esencial que el estudiante esté siempre desarrollando una acción. En este sentido es importante señalar que sea el propio educando quien mediante la resolución de problemas específicos, gradualmente dosificados, construya o llegue al concepto deseado. Esto es, el alumno debe estar constantemente resolviendo o intentando resolver problemas.

El segundo, que retoma la aportación más importante de la enseñanza sensorio-empirista, se refiere a que:

- Cada vez que se introduzca un concepto o noción matemática, hay que intentar partir de un problema en cierto contexto de interés para el educando. Este problema puede generar ejercicios o subproblemas cuya solución, en forma estructurada y coordinada, lleve al estudiante a definir o mostrar el concepto matemático deseado. Esto, desde luego, no es posible de realizar para cada uno de los conceptos intrínsecos a un

[2] Recuerde que estamos pensando en estudiantes de nivel medio superior y superior.

determinado tema, por lo que toca decidir al docente, cuál o cuáles son los más trascendentes. En todo caso, nunca introducir un concepto mediante su definición formal[3].

El tercero, que va unido al anterior, es:

- Una vez resuelto el problema presentado, el estudiante debe de validar sus resultados, verificando que tengan un sentido lógico, de acuerdo al problema planteado.

A continuación mencionaremos algunas de las propuestas de carácter psicológico.

Jean Piaget y El Modelo de Hans Aebli.

Una lección ha de ser una respuesta. Claparède.

Para Piaget la acción es fundamental puesto que es, a partir de las acciones concretas como se constituyen las operaciones efectivas, y de la interiorización de estas últimas, surge la operación intelectual o del pensamiento. Al interpretar la acción como la resolución de problemas, estamos obligados a incluir como una de las características fundamentales de esta didáctica motivar acciones por el educando, mediante resolución problemas adecuados.

Pero las acciones por si misma no necesariamente generan las operaciones intelectuales que coordinadamente nos lleven a la comprensión de un concepto. ¿De qué manera se pueden organizar las operaciones intelectuales? O bien ¿Con base en qué metodología, el concepto o conceptos implícitos en un problema se interiorizan en el

[3] La definición formal, corresponde al grado escolar del educando.

estudiante? Al respecto se menciona que una de las particularidades de la operación es que ésta se componga de operaciones parciales, las cuales, coordinadas en forma continua, formen un sistema coherente y móvil, de tal manera que sea posible aplicar dicha operación en situaciones semejantes.

Esto nos lleva a dos cuestionamientos, el primero a ¿Cómo descomponer una operación en las operaciones parciales que le sean propias?, y el segundo a ¿Cómo dotar de la movilidad a una determinada operación? Iniciemos dando respuesta a la primera pregunta.

Cuando se tiene el propósito de enseñar un determinado concepto matemático complejo, debemos hacer una cuidadosa inspección del mismo, con el fin de anotar qué requiere, el estudiante, para poder llegar al concepto. Agreguemos este principio a nuestra didáctica.

- Cuando se trate de enseñar un determinado tema o concepto matemático complejo, mediante la resolución de un determinado problema. Es necesario descomponer o dividir este problema en subproblemas que representen las operaciones parciales que lo constituyen y anotar todas las operaciones y/o conceptos que resulten de este análisis y que el estudiante requerirá para resolver el problema inicial. Generar así un plan de acción, el cual mediante ejercicios gradualmente dosificados, nos lleven en forma coordinada y coherente a la consecución de la meta.

Como respuesta a la segunda pregunta, para Piaget (1987, pp. 50, 51) la movilidad se dota mediante: la reversibilidad y la asociatividad. Además se contrapone al esquema de hábito

De esta forma, aunque no nos indica específicamente cómo enseñar, la caracterización anterior nos define en forma clara, cómo establecer una didáctica que se oponga a la creación de hábitos en el individuo. Es decir, si bien no nos dice que hacer, si nos indica que no hacer. Anotemos dos puntos más, a nuestra propuesta didáctica.

- Intentar en lo posible, cada vez que se realicen operaciones que nos lleven a conceptos matemáticos, implementar la operación inversa.
- Cuando se ilustre una forma o método para resolver un problema, intentar dar una forma de solución alternativa. En todo caso, nunca imponer una forma de solución.

Para ilustrar lo anterior mostraremos tres ejemplos:

Ejemplo 1.

El concepto de pendiente: Se propone para introducir el concepto de pendiente, como un proyecto de acción práctica, plantear problemas de construcción de escaleras, ver fig.3.

Dando valores a la sombra, la altura y el número de escalones de la misma, o bien, el número de escalones, el peralte y la huella de un escalón, y al ir variando estos datos, en el problema propuesto, el estudiante podrá "ver" la variación en la inclinación de la escalera, así como la posibilidad de construcción de la misma.

Por ejemplo se pueden proponer los siguientes problemas:

1) Dibuje una escalera de altura $\boldsymbol{h}$ = 168 cm., sombra $\boldsymbol{s}$ = 168 cm. y con $\boldsymbol{n}$ = 4 escalones iguales.

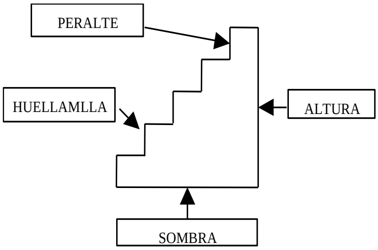


Figura 3

i) ¿Cuánto mide la huella de cada escalón?

ii) ¿Cuánto mide el peralte de cada escalón?

iii) ¿Cuál será la inclinación ?

2) Dibuje ahora una escalera de altura $\boldsymbol{h}/2$, sombra $\boldsymbol{s}/2$ y con $\boldsymbol{n}$ escalones

i) ¿Está más o menos inclinada (empinada) que la anterior?

ii) ¿Cómo se modificaron las dimensiones del escalón?

iii) ¿Es posible o tiene problemas?

3) Dibuje ahora una escalera de altura $\boldsymbol{h}/2$, sombra $\boldsymbol{s}$ y con $\boldsymbol{n}$ escalones

i) ¿Está más o menos inclinada (empinada) que la 1?

ii) ¿Cómo se compara con la inclinación anterior?

iii) ¿Cuáles serán las dimensiones del escalón?

4) Dibuje ahora una escalera de altura $\boldsymbol{h}$, sombra $\boldsymbol{s}/2$ y con $\boldsymbol{n}$ escalones

i) ¿Cuál será ahora la inclinación?

ii) ¿Cómo se compara con la inclinación de la escalera dibujada en 1?

iii) ¿Cómo se compara con la anterior?

iv) ¿Cuáles serán las dimensiones del escalón?

5) En los ejercicios anteriores, ¿Qué escalera tiene una inclinación mayor? ¿Qué escalera tiene una inclinación menor?

Y se siguen planteando problemas semejantes al ir variando los datos de altura y sombra; hasta que se considere pertinente definir la pendiente en términos de la inclinación de una escalera.

Una vez definida la pendiente, podemos elaborar preguntas del tipo:

6) ¿Es posible construir una escalera con los siguientes datos?

i) Pendiente = 3; peralte = 8; huella = 5

ii) Pendiente = 2; altura = 180; sombra = 90

iii) Pendiente = 5; peralte = 30; huella = 5

Muestre en una figura ¿por qué no? o ¿por qué si?

7) Dada una inclinación **x** = 0.8

Dé un valor para la sombra y uno para la altura de una escalera con esa inclinación.

¿Para una escalera con esa inclinación ¿Podría dar las dimensiones de un escalón?

¿Son únicos estos valores? o ¿puede construir varias escaleras con esta inclinación?

8) Dada una determinada inclinación $\boldsymbol{Z} = 0.30$

i) Construir una escalera con 20 escalones dando dimensiones para la huella y el peralte del escalón, sabiendo que la proporción del escalón a la escalera es la misma.

ii) ¿Es posible construir una escalera con dicha inclinación, pero de peralte $\boldsymbol{W} = 34$ y huella $\boldsymbol{Y} = 60$?

Una vez realizado lo anterior, se extiende la definición de pendiente en la forma siguiente: se le muestra una línea recta dispuesta en un sistema cartesiano. Se sitúa un punto en la recta y se le permite al estudiante realizar desplazamientos del punto en la recta, que originen segmentos dirigidos en cada eje cartesiano; De nuevo, en forma natural, se define la pendiente como el cociente formado por la longitud de los desplazamientos verticales entre los horizontales. Salvo que al ser segmentos dirigidos se tendrá que tomar en cuenta el signo. Este hecho amplía la definición a pendientes negativas. Se continúa, con problemas en donde el estudiante pueda contrastar la inclinación de la recta con los valores obtenidos del cociente. Una vez que el estudiante se familiarice con esta forma de ver la pendiente, se puede plantear el mismo problema, dando las coordenadas sin referencia explícita a una determinada escala, con ello, los desplazamientos quedarán definidos en términos de las diferencias de sus respectivas coordenadas. Con lo cual obtenemos la tradicional fórmula de pendiente.

Ejemplo 2. Introducir los conceptos de: variables, tipo de variables, muestra, agrupación de datos y medidas de tendencia central, en estadística descriptiva. En este caso, proponemos como plan de acción práctica: la construcción de una silla.

Problema: En la primera fase se propone diseñar y construir una silla. De inicio se muestran con ejemplos comunes como las sillas de aviones, de autobuses, de tranvías, de metro, de escuelas, la diferencia del concepto de silla. A partir de ello se inicia una discusión en la idea de buscar los factores más importantes para el diseño de una silla. Ello nos lleva a considerar variables se diferente índole como: Estatura, ingresos, peso, edad, colores, costos, material, etc.

Segunda fase: Se seleccionaron los datos más importantes y para distinguirlos se tuvo la necesidad de clasificar los mismos como: nominales, ordinales, y de intervalo. En una tercera fase, se discutió la manera de obtener una cantidad suficiente de datos para conseguir "representantes válidos" de la altura, ingreso, color, etc. Esto nos condujo, en forma natural, al concepto de muestra y posteriormente al de agrupación de datos.

Una vez realizado lo anterior nos vimos en la necesidad de elegir un dato como representante de las diversas muestras y variables, lo cual nos llevó, en forma directa, a definir y obtener las diversas medidas de tendencia central.

Cabe anotar que en todo este proceso siempre se diseñaron ejercicios con problemas inversos, y se dio la libertad para encontrar los valores respectivos por diferentes métodos y uso de tecnología. Por ejemplo, se les proporcionaba un conjunto de datos y se les preguntaba si eran de tal cual categoría; después se invertía solicitando datos de tipo nominal, ordinal etc. Al calcular las diversas de medida de tendencia central se les solicitaba ver cuantitativa y cualitativamente el problema. Inversamente, se les proporcionaba una medida de tendencia central y se les solicitaban datos que condujeran a esa medida. Cabe anotar que se diseñaron apartados, mediante lecciones especiales a conceptos como: variable, variable aleatoria, etc. conceptos que resultaron del análisis de conceptos previos y necesarios para el tema. Así como para la media por considerarlo uno de los más importantes.

También cuando se construyeron las tablas de distribución de frecuencias, aparecía paralelamente un histograma que los estudiantes tenían que "dibujar", a partir de los datos de la tabla e inversamente se les propusieron ejercicios de la forma: a partir de un histograma, llenen una tabla. Además se identificaron en el histograma a las medidas de tendencia central. Para facilitar las tareas anteriores se utilizó la hoja de cálculo Excel.

Podría suceder que lo anterior establezca un serio problema para el docente, puesto que las dificultades de llevar a cabo una metodología como la descrita, requeriría de un esfuerzo adicional por parte del profesor. Pero, a cambio, las ventajas son enormes:

Primero, se da oportunidad a que todos los alumnos, que por diversos motivos no hayan asimilado bien las nociones anteriores, puedan seguir este nuevo desarrollo.

En segundo término, nos permite evitar, de entrada, el simbolismo especial que se requiere para la solución del problema. Además, si uno logra despertar el interés en el estudiante en el problema que se propone de inicio, o en el proyecto de acción práctica, el conocimiento a enseñar surge como una necesidad en el estudiante y no como algo impuesto por el profesor.

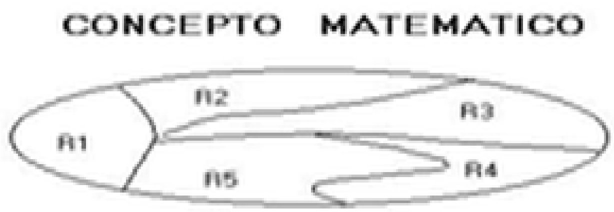
En otras palabras, si uno plantea de inicio problemas interesantes para el estudiante el papel del maestro en el salón de clases será, más como el de un entrenador de nado, que el poseedor del saber que intenta delegar en el estudiante.

En tercer lugar; se establece una asociación entre la operación que se desea enseñar y los dominios de su aplicación en la existencia cotidiana. Dicho de otra forma, el planteamiento del problema debe de estar dentro de las posibilidades de la estructura cognoscitiva del alumno, logrando con ello que el nuevo conocimiento se relacione con los conocimientos previos ya aprendidos en forma significativa, con lo que se produce de inicio un mayor afianzamiento de las nuevas ideas (Ausubel et al, 1998. p. 111).

Sistemas de Representación. Un considerable número de investigadores (Kaput, Janvier, Duval, Pluvinage, etc.), han dado cuenta de la importancia de poderle ofrecer a un estudiante, la posibilidad de analizar un problema utilizando diferentes representaciones. Más aún, en las investigaciones se ha logrado detectar que un estudiante puede resolver un determinado problema dentro de un determinado registro y extraviarse en otro Duval (1988, p. 125).

Cabe anotar que el término “representación”, tiene muchas connotaciones. No es el deseo del presente trabajo abrir una discusión alrededor del significado de representación, que para muchos constituye un estudio que lleva a la construcción de una teoría semiótica-matemática. Sino sencillamente, referirnos a una representación en el mismo sentido que Duval se refiere a lo que denomina registro de representación semiótica (Duval, 1998, p. 175).

Más específicamente, hacemos uso de los registros de representación semiótica, en el ánimo de identificar los elementos participativos de un determinado registro de representación, y de la necesidad de que un concepto matemático pueda ser instanciado y resuelto en los diversos registros de representación. En este sentido coincidimos totalmente con Duval, cuando señala la necesidad de varios registros de representación y el carácter central de la actividad de conversión para el funcionamiento cognitivo del pensamiento (Duval, 1998, p. 199), puesto que como el mismo afirma cada registro de representación semiótica, aporta ciertos aspectos cognitivos que no cubre otro registro, es decir, que *toda representación es parcial cognitivamente con respecto a lo que ella representa* (Duval, 1998, p.185). En otras palabras, los registros se complementan.



Para poder visualizar un concepto matemático es necesario reconocerlo en los diversos registros de representación semiótico (R1, R2, ..) que le sean propios

Pero también nos apunta que la existencia de los registros no basta, es necesaria la conversión de un registro en otro, afirmando que para la aprehensión conceptual de los objetos es necesaria la coordinación de los diversos registros (Duval, 1998, págs. 176, 181, 185, 189).

> *Se puede observar en todos los niveles un encasillamiento de los registros de representación en la gran mayoría de los alumnos. Estos no reconocen al mismo objeto a través de las representaciones que se dan de él en sistemas semióticos diferentes (Duval, 1998, p.191).*

Janvier (1987) también menciona al respecto que, uno de los principales problemas es el poder articular o trasladarse de un registro de representación semiótica a otro, señalando la importancia de poder ofrecer diferentes registros a una noción o concepto.

Bajo mi personal punto de vista, además del problema señalado, persiste el problema de ¿cómo lograr la interiorización de un cierto concepto matemático en un registro de representación semiótico? Y claramente estos dos problemas van relacionados puesto que, como ya hemos mencionado e insistido, la educación tradicional tiende hacia la creación de hábitos en el individuo, de ahí que una noción o concepto enseñado de esta manera pierda o carezca de sentido en un registro de representación semiótica distinto del que se enseñó.

Como es conocido, el poder manejar en una clase tradicional los diversos registros semióticos, asociados a un determinado concepto matemático, no es una tarea sencilla; y personalmente creo que la computación podría brindar una ayuda invaluable. En el ejemplo de la pendiente podemos reconocer, al menos, a cuatro registros semióticos: Aritmético (Variación proporcional); Algebraico (como parte de una ecuación lineal); Geométrico (Cociente de segmentos dirigidos); Figural (Inclinación de escaleras).

Ahora bien, ¿Cómo promover la articulación de los diferentes registros de representación semiótica, para introducir un determinado concepto? Aquí nuestra propuesta es siguiendo el mismo esquema que propone Piaget para la adquisición de un concepto, esto es, mediante la realización de operaciones concretas que nos lleven de un registro de representación semiótica a otro y de este último al primero.

Todo lo anterior se debe realizar con cuidado y seleccionando lo relevante del concepto que se pueda ilustrar en otro registro, puesto que evidentemente, no se tiene traslación en todos los registros de representación, ni mucho menos es posible trasladar todos los pasos de solución de un determinado problema en un cierto registro a otro registro.

Elaboremos, a manera de síntesis, dos elementos más para nuestra propuesta:

- Cada vez que enseñemos un determinado concepto de las matemáticas, en un cierto registro de representación semiótica, trabajar el mismo (si el concepto lo permite) en los diversos registros de representación que le sean propios.
- Si un concepto matemático se opera en más de un registro de representación semiótico, instrumentar operaciones directas e inversas que promuevan la articulación (traslación) entre los diferentes registros.

Continuando con el ejemplo de pendiente, uno puede asociar tres registros de representación simultáneamente, como podrían ser:

- Dibujar una recta en un sistema cartesiano (registro geométrico (R-G)) y a partir de la visualización e interpretación de los datos

geométricos, inferir el valor de la pendiente (registro aritmético (R-A)) y la ecuación (registro algebraico (R-Al)) de dicha recta.
- Dar un valor para la pendiente (R-A) y obtener ecuaciones de rectas (R-Al) que tengan este valor como pendiente y dibujar las rectas correspondientes (R-G).
- Dar dos parejas de coordenadas (R-G) y obtener el valor de la pendiente (R-A), de la recta que pasa por esos puntos. Inversamente, dar un valor para la pendiente (R-A) y obtener y dibujar una pareja de coordenadas que satisfagan este valor. Modificar en una ecuación de recta (R-Al), el valor de la pendiente y reflejar el cambio en la inclinación de la recta en el plano (R-G).

Finalmente, una de las partes más importantes en la teoría de la inteligencia de Piaget, es la del equilibrio. Esta teoría nos proporciona una componente importante para lograr la total y cabal comprensión de un concepto matemático.

En un breve resumen, esta teoría sostiene que, en el ser humano, existen dos procesos gemelos que operan simultáneamente: la asimilación y la acomodación. Como ambas son en cierta forma opuestos se hace necesario una compensación que conduzca en forma progresiva a niveles de entendimiento superiores. "*A esta compensación intelectual activa con el medio ambiente Piaget le llama equilibrio"* (Labinowicz, 1998, p. 36). Ahora bien cada nivel superior de entendimiento produce una estructura más amplia o patrones de pensamiento más complejos. "*Cuando las posibilidades para la interacción con el medio ambiente se extienden, el niño puede asimilar con mayor facilidad el ingreso de la información externa a un marco de referencia que no sólo se ha* *agrandado, sino que también se ha integrado más*" (Labinowicz, 1998, p. 41). Todo ser humano posee una estructura cognitiva interna con la cual interpreta y actúa en el mundo exterior. Cuando surge una perturbación externa al individuo, como puede ser la presentación de un nuevo concepto matemático, éste provoca un cierto desequilibrio en su estructura interna, mediante la resistencia al cambio (asimilación) y la necesidad del mismo (acomodación) este forcejeo entre ambos procesos y el equilibrio de los dos provoca una nueva estructura cognitiva interna.

Mediante una didáctica como la que hemos descrito y señalado en puntos separados, en las páginas anteriores, podemos llegar a lo que consideramos, es la comprensión. Esto es, mediante la construcción de las operaciones intelectuales y su conversión en los diversos registros de representación semiótica que le sean propios se logra la interiorización y comprensión, pero no basta ilustrar el mismo concepto en los diversos registros de representación semiótica (v.gr. algebraico, aritmético, gráfico, etc.) es necesario llevar el concepto adquirido a una aplicación ulterior en donde, el mismo concepto, constituya un elemento más para el entendimiento del mundo que nos rodea.

Lo anterior agrega un punto más a la didáctica que deseamos proponer:

- Establecer problemas en donde el concepto recién adquirido sea un elemento de análisis para un tema más avanzado o complejo, o establecer problemas que requieran el concepto matemático pero fuera del contexto didáctico en el que se enseñó. I. e. idear problemas en donde el concepto enseñado sea parte de la estructura con la que el alumno debe de analizar y resolver el problema planteado.

Regresando al problema propuesto sobre la pendiente, podemos elaborar ahora problemas en donde se aplique este concepto, para ello proponemos problemas como: Encontrar ecuaciones de rectas paralelas y perpendiculares a una recta dada; la construcción de rampas con diversos grados de inclinación; la construcción de figuras geométricas con rectas; etc.

Algo muy importante que vale la pena observar es que, si bien, la mayoría de las experimentaciones que Piaget y sus colegas desarrollaron fueron con niños, y consecuentemente muchas de sus conclusiones, las obtiene para los mismos, creemos que muchos de los planteamientos psicológicos son válidos para cualquier nivel educativo; en particular, lo referente a la psicología de la inteligencia, que son los planteamientos que recogemos en este material y que aplicamos a niveles posteriores a la educación elemental (primaria y secundaria) (Aebli, 1992, p. 170; Dubinsky, 1991, p. 95).

Conclusiones.

> La educación es algo admirable, sin embargo, es bueno recordar que nada que valga la pena saber se puede enseñar. Oscar Wilde.

Se han propuesto elementos para un programa didáctico aplicable a la enseñanza de las matemáticas. Este modelo extrae los elementos teóricos, en gran parte, de la escuela activa, de la psicológica de la inteligencia de J. Piaget, y de la propuesta didáctica de H. Aebli,. La contribución más importante de esta propuesta radica en el hecho de que es un modelo particularmente dirigido hacia la enseñanza de las matemáticas, y aplicable a una educación post-elemental. Halmos (1994, p. 849), nos menciona, tal vez en el sentido del epígrafe de Wilde, que cuando más pensaba en educación, más se acercaba a la conclusión de que "*nadie puede enseñar nada a nadie de ninguna manera*" tomamos esto para significar que en la presente propuesta no se desea ofrecer la "fórmula" de cómo enseñar matemáticas. Por el contrario, apuntamos algunas recomendaciones que evitan que la enseñanza de las matemáticas se conduzca hacía una enseñanza memorística y de tipo hábito. Que la enseñanza nos conduzca más hacía algo que se pueda recordar, utilizar y entender, parafraseando al autor citado.

Tres son las dificultades más grandes encontradas al tratar de aplicar esta didáctica o principios de la misma a la enseñanza de un concepto matemático.

La primera es encontrar un problema adecuado para elaborar el plan de acción práctico, el cual debe de tener las siguientes características:

a) Debe de ser lo suficientemente explicito y sencillo para que los estudiantes lo entiendan más no necesariamente sencillo de resolver.

b) Debe de ser atractivo y provocador para la mayoría de los estudiantes.

c) Tiene que ser lo suficientemente rico para contener en su solución el(los) conceptos(s) matemáticos a enseñar.

Esto constituye un gran reto para el profesor quien debe de ser sensible a las inquietudes de los estudiantes y poder plantear problemas: de futbol, de economía, de física, de astronomía, de administración etc. que de verdad resulten atractivos a la mayoría de los estudiantes y no justificar, de inicio, la matemática con la matemática misma. La segunda gran dificultad, es realizar una inspección, por el docente, con el fin de investigar que conceptos o habilidades se requieren por parte del estudiante para lograr la comprensión del concepto a enseñar, esto en general representa una labor compleja y fastidiosa para el profesor, por que comúnmente, el docente, en forma implícita supone una serie de conocimiento y habilidades por parte del alumno que muchas de las veces no se tienen.

Es recomendable en esta parte diseñar una especie de mapa conceptual, que nos indique con claridad los conceptos matemáticos relacionados y necesarios para lograr la comprensión del concepto a enseñar.

Y por último facilidades para poder instanciar un concepto matemático en los diferentes registros de representación semiótica que le sean propios. En este sentido hemos encontrado en la computadora una herramienta invaluable para poder representar, mediante modelación los diversos registros asociados.

Algunos Resultados: Las aplicaciones más importantes las hemos realizado en Sistemas computacionales, mediante lecciones tutoriales en una computadora. En donde, la arquitectura del sistema queda supeditado a este esquema didáctico. Esta propuesta didáctica, ha sido probada con éxito en experimentos, en ellos se ha podido comprobar la eficacia, en cuanto al aprendizaje se refiere, elevando substancialmente el promedio de calificaciones escolar (Cuevas, 1994; Manriquez, 1995; Moreno, 1997, Bueno, 2001).

Tenemos la firme creencia que la educación matemática, o la enseñanza de los conceptos matemáticos, a cualquier nivel de profundidad, puede promoverse o mejorarse mediante una didáctica conveniente, y en particular la que proponemos. También consideramos que puede obstruirse, mediante métodos de enseñanza que produzcan en el individuo una concepción de la matemática como algo compuesto meramente de fórmulas y técnicas incomprensibles, laboriosas e inservibles. Desafortunadamente, inconsciente o conscientemente esta última concepción, es hoy por hoy, un caso común en nuestra educación, al menos en los niveles medio y medio superior.

> *Para la gran mayoría de estudiantes, el cálculo no es un cuerpo de conocimientos, sino un repertorio de patrones imitativos (E. E. Moise, citado por Tall, 1996, p. 290)*

BILIOGRAFIA

Aebli, Hans. (1958). Una Didáctica Fundada en la Psicología de Jean Piaget, decimonovena edición (Argentina, Kapelusz)

Aebli, Hans. (1995). 12 formas básicas de enseñar. NARCEA. España.

Arnold, V. I. (1996). Sur l'enseignement des mathématiques Palais de la découverta à Paris - juin 1996).

Ausubel, D. Hanesisian, H., Novak J. (1999). Psicología educativa. Ed. Trillas. México.

Bueno, G. (1999). TUTOREST, un tutor computacional para la enseñanza de la estadística descriptiva. Tesis de doctorado, CINVESTAV-IPN.

Cuevas, Armando. (1994). Sistema Tutorial Inteligente LIREC, Tesis doctoral, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Duval Raymond. (1988). Graphiques et Equations: L'Articulation de dux registres, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, IREM de Strasbourg France.

Duval, R. (1998). Didáctica, Investigaciones en Matemática Educativa II. Editor F. Hitt. Gpo. Edit. Iberoamérica. México.

Dubinsky, Ed. (1991). Reflective abstraction in Advanced Mathematical Thinking, Avanced Mathematical Thinking. Edited by David Tall. Mathematics Education Library, Kluwer Academic Publishers. Netherlands.

Halmos, Paul R. (1994). What is Teaching? American mathematical Monthly november 1994.

Janvier, Claude. (1987). Translation Processes in Mathematics Education; Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics. (USA, Lawrence Erlbaum Associates).

Labinowicz, Ed. (1998). Introducción a Piaget, Pensamiento Aprendizaje Enseñanza, Addison Weley Longman. México.

Manriquez, P. (1995). Diseño de las experiencias de aprendizaje para el desarrollo de un curso de Geometría Analítica con el auxilio del Sistema Tutorial Inteligente LIREC, Tesis de Licenciatura en Matemáticas. Universidad Michoacana de San Nicolás Hidalgo. México.

Moreno, S. (1997). Experimentación educativa en el aula: Uso del Sistema Tutorial Inteligente LIREC versus la enseñanza tradicional en Matemáticas III del sistema CCH-UNAM, Tesis de Maestría, CINVESTAV-IPN.

Piaget, J. (1974). El Estructuralismo. Edit. Oikos-tau, S. A. Ediciones, España.

Piaget, Jean. (1983). Seis estudios de psicología. Ariel. México.

Piaget, Jean. (1987). Psicología de la Inteligencia, PSIQUE, Argentina.

Tall, David. (1996). Functions and Calculus; International Handbook of Mathematics Education, chapter 8. Kluwer Academic Publishers. Holanda.

Apendice 1

Si uno plantea de inicio problemas interesantes para el estudiante, el papel del maestro en el salón de clases, será como el de un entrenador de nado. En otras palabras, la acción, fundamental para el aprendizaje, debe de corresponder al estudiante.

Ejemplo 2. Introducir el concepto de raíz de una función o polinomio. Aquí proponemos: Proyecto de acción: un globo en un recipiente cilíndrico con agua.

La situación que se propone estudiar es la de un globo inflable, que esta asido al fondo de un cilindro de radio $R=5$ cm. Cuando el globo esta desinflado, es decir, cuando el globo tiene un radio nulo, se vacía agua en el cilindro, hasta que alcance una altura h_0 (ver figura 1). Ahora bien, el experimento consiste en observar lo que ocurre cuando se infla el globo (ver figura 2) y más precisamente estudiar cuando el nivel alcanzado por el agua que llamaremos h, sea igual al diámetro del globo. Es decir, cuando el globo este exactamente sumergido.

Se tiene un recipiente de base circular y en el una cierta cantidad de agua. Dado que el radio de la base es R y la altura h_0, el volumen del agua que es constante estará dado por $V_a = \pi R^2 h_0$ (véase figura 1.1)..

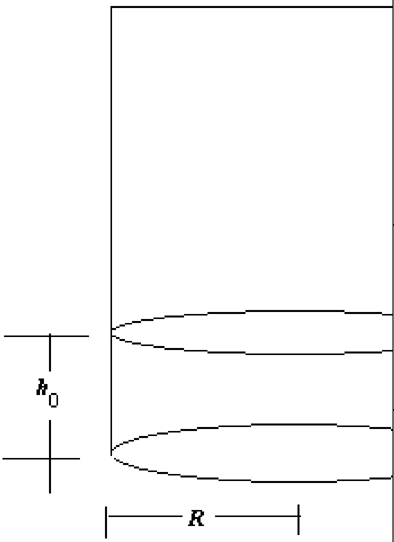


Figura 1.1. Recipiente de base circular con un volumen de agua de $V_a = \pi R^2 h_0$

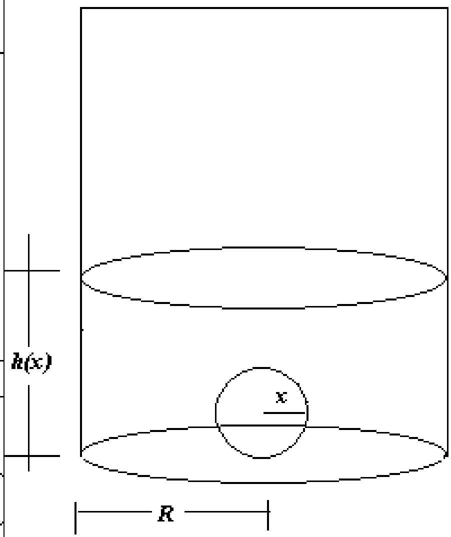


Figura 1.2. Mismo recipiente con el volumen de agua $V_a = \pi R^2 h_0$ más el volumen del globo de radio x.

Sobre el fondo del recipiente se tiene un globo esférico de radio x, el cual se puede ir inflando poco a poco (véase figura 1.2.). El volumen del globo que es variable esta determinado por la función $V_g(x) = \frac{4}{3}\pi x^3$.

Al ir inflando el globo la altura h_0 va variando conforme va aumentando el radio x del globo, de tal manera que la altura se convierte en una función que llamaremos $h(x)$. Esta función depende tanto del volumen inicial de agua como del volumen del globo. Entonces

$$\pi R^2 h(x) = V_a + V_g = \pi R^2 h_0 + \frac{4}{3}\pi x^3$$

$$\cancel{\pi} R^2 h(x) = V_a + V_g = \cancel{\pi} R^2 h_0 + \frac{4}{3}\cancel{\pi} x^3$$

$$R^2 h(x) = R^2 h_0 + \frac{4}{3} x^3$$

$$h(x) = h_0 + \frac{4}{3R^2} x^3$$

Al ir inflando el globo llega un momento en que éste es tangente a la superficie del agua (véase figura 1.3).

Nuestro primer problema es encontrar el valor de radio del globo x, que hace posible este punto de tangencia.

Es decir se desea que el diámetro del globo coincida con la altura $h(x)$. Y esto equivale a plantear: encontrar x de tal manera que:

$h(x) = 2x$.

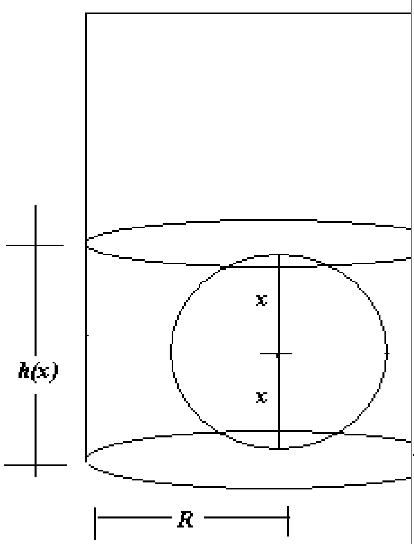


Figura 1.3. Mismo recipiente con el globo tangente a la superficie del agua.

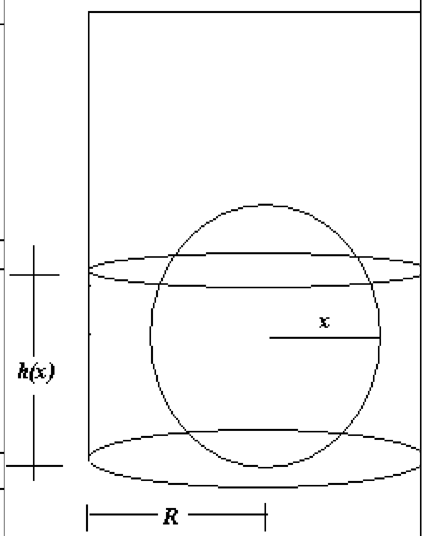


Figura 1.4. Mismo recipiente con el globo rebasando la superficie del agua.

O bien

$$h_0 + \frac{4}{3R^2}x^3 = 2x$$

reacomodando términos queda

$$\frac{4}{3R^2}\pi x^3 - 2x + h_0 = 0 \qquad 1.1$$

o visto de otra forma

$$a_3x^3 + a_1x + a_0 = 0$$

es decir una ecuación cúbica o de tercer grado.

Para encontrar las raíces de la ecuación cúbica demos los siguientes valores:

Radio de la esfera $R = 5\ mts.$; altura inicial del agua $h_0 = 1 mts.$

Con estos datos la ecuación 1.1 se transforma en

$$4.18x^3 - 2x + 1 = 0$$