La integral de funciones de una variable: Enseñanza actual

Juan Antonio Alanís Rodríguez, Efraín Soto Apolinar
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey
México

Resumen. El trabajo que aquí se presenta es el punto de partida de una investigación que forma parte de un proyecto que tiene como objetivo mejorar la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo. Quienes participan en ese proyecto, al igual que otros matemáticos educativos, consideran que las causas de los nada halagadores resultados de la enseñanza tradicional de las matemáticas, no son sólo de carácter psico-pedagógico, sino también de carácter epistemológico. En tal sentido, se han dado a la tarea de elaborar una propuesta de qué enseñar en los cursos de Cálculo, y no sólo de cómo enseñar en esos cursos. Conscientes de la importancia de conocer la realidad que se desea transformar, las primeras investigaciones de ese proyecto han tenido como objetivo caracterizar la enseñanza del Cálculo. En este trabajo se reporta lo que se ha avanzado en cuanto a la caracterización de la enseñanza del Cálculo Integral.

Palabras clave: Cálculo integral, funciones de una variable, enseñanza.

1. Introducción

En por lo menos las últimas cuatro décadas han predominado dos enfoques de enseñanza del Cálculo: la formalista y la mecanicista.

La enseñanza formalista enfatiza los rasgos formal y riguroso de la matemática bajo el supuesto de que los estudiantes entienden un concepto con sólo darle su definición en términos de otros conceptos previamente definidos y que los estudiantes comprenden un resultado al presentarle su "demostración" (es decir, su deducción lógica a partir de otros resultados previamente demostrados) y, que tal entendimiento y tal comprensión les permitirá aplicar las matemáticas. Sin embargo, todos los datos empíricos disponibles contradicen este supuesto (Gascón, 2001).

La enseñanza mecanicista tiende a centrarse en una práctica algorítmica y algebraica del Cálculo. Si bien con este tipo de enseñanza se logra disminuir sustancialmente el porcentaje de reprobados, con él no se logra que los estudiantes comprendan de manera satisfactoria los conceptos y métodos de pensamiento propios del Cálculo; los estudiantes acreditan los cursos por llevar a cabo, de manera más o menos mecánica, algunos cálculos de derivadas y primitivas y por resolver ciertos problemas estereotipados (Artigue, 1995).

Tall (2002) indica que bajo estos escenarios los estudiantes aprenden a desarrollar procedimientos estandarizados para obtener ciertas respuestas, lo cual les provee de un conocimiento matemático sin la metodología que guía al matemático al utilizar ese conocimiento en la resolución de problemas en diferentes contextos. Este autor argumenta que la discrepancia observada entre lo que se espera y lo que muestran los estudiantes se debe a que los profesores no se dan cuenta de la cantidad de experiencia que éste utiliza (generalizar, abstraer, formalizar) cuando trabaja con diferentes procesos matemáticos, algo que la mayoría de los estudiantes no tiene entre sus herramientas y habilidades.

Ante esta situación, alto porcentaje de reprobados y aprendizaje sin comprensión, por una parte, se han generado y se siguen generando un sinnúmero de investigaciones tendientes a explicar, entre otras cosas, las dificultades que tienen los estudiantes cuando intentan aprender las nociones sobre las cuales se ha logrado estructurar el campo conceptual del análisis, en (Sánchez-Matamoros, García y Llinares, 2008) se presenta una revisión y organización de los aportes de las investigaciones sobre las dificultades de los estudiantes para comprender la derivada.

Por otra parte, se han generado y se siguen generando una gran cantidad de innovaciones en la enseñanza del Cálculo; en particular, están aquellas innovaciones inscritas en la Reforma del Cálculo en los Estados Unidos cuyo objetivo era el de presentar al Cálculo "más esbelto y lleno de vida" y "como una bomba y no como un filtro" en el trayecto educativo (Steen, 2003).

Contra lo que se podría pensar y desear, la mayoría de las innovaciones en la enseñanza del Cálculo se han hecho de manera independiente de las investigaciones en la didáctica de esa rama de las matemáticas (Artigue, 1995).

En nuestra opinión, antes de innovar es necesario caracterizar aquello que se quiere cambiar. En tal sentido, entre las investigaciones que han de fundamentar las innovaciones deberá haber una cuyo objetivo sea precisamente caracterizar la enseñanza actual.

2. Características de la enseñanza de la Integral

En cuanto a la enseñanza del Cálculo, Artigue (2002) comenta que la situación actual se caracteriza por un sentimiento general de crisis que, aunque no sea percibido de la misma manera, sí parece trascender las diferencias culturales y que las dificultades en el aprendizaje no han cambiado de manera sustancial. Una breve descripción de esta situación la podemos encontrar en (Salinas y Alanís, 2009).

En esta sección vamos a resaltar lo que algunos investigadores han señalado de esta situación en lo que concierne a la enseñanza de la integral de funciones de una variable, a fin de encontrar áreas de oportunidad para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de tan importante concepto.

Muñoz (2000) caracteriza la problemática de la enseñanza del Cálculo Integral como un desequilibrio entre lo conceptual y lo algorítmico. Señala que en los cursos donde se enseña esa rama del Cálculo, hay un énfasis excesivo en el cálculo de antiderivadas, integrales indefinidas; y, que poca atención se presta a la conceptualización de la integral (definida), reduciéndose ésta a la definición de Cauchy o a la de Riemann y que es hasta que se abordan las llamadas aplicaciones cuando se estudian algunos aspectos de las nociones asociadas a este concepto. Sin embargo, en las prácticas predominantes de la enseñanza del Cálculo, los problemas en los que se aplica la integral son muy estereotipados y sin comprensión el estudiante puede ver cuál es la integral en juego, reduciéndose la evaluación al cálculo de dicha integral vía el teorema fundamental del Cálculo, de ahí el excesivo tiempo dedicado al cálculo de antiderivadas.

Es claro lo que nos dice Muñoz: no basta dar la definición de un objeto matemático para comprenderlo y consecuentemente aplicarlo. A este respecto, recordamos una de las observaciones didácticas que hace Kleiner (2002) como resultado de su estudio de la historia del Cálculo: deberíamos dar a los estudiantes ejemplos –muchos ejemplos en diferentes contextos– antes de definir, generalizar o demostrar.

En la misma dirección de Muñoz, Artigue (2002) considera que se ha dado una excesiva orientación algebraica a la enseñanza del Cálculo con el consecuente demérito de la parte gráfica y geométrica y como resultado los estudiantes no pueden dar su significado real a los procesos de derivación o integración. Otros investigadores coinciden en estos puntos (Czarnocha, et al, 2001; Labraña, 2000)

Por el contrario, Li (2004) defiende la enseñanza mecanicista argumentando que se requiere que los estudiantes practiquen la resolución mecánica de ejercicios matemáticos bajo el supuesto de que la formación de conceptos por parte del estudiante tiene su origen en la práctica manipulativa.

A propósito de la formación de conceptos, resultados de diversos trabajos de investigación indican que presentar el concepto de integral basado en la noción de área únicamente puede resultar contraproducente al querer generalizar a otros contextos. Por ejemplo, Calvo (1997) reporta dificultades en la comprensión del concepto de integral definida con el acercamiento mencionado. Turégano (1996) apunta a una posible explicación de la raíz del problema: los estudiantes ligan la noción de área a una fórmula; esto es, no consideran al área como un objeto geométrico, sino como un objeto aritmético (un número).

Czarnocha et al (2001) advierten que las dificultades en los significados de los conceptos del Cálculo están íntimamente relacionados con el proceso del paso al límite. Turégano (1996) agrega que los conceptos abstractos que sirven para explicar el Cálculo (límite, infinito, etc.) aparecen junto a ideas formales que los caracterizan matemáticamente. Aunado a esto, la teoría rara vez se vincula con experiencias previas. Thompson y Silverman (2007), ante las dificultades que tienen los estudiantes para comprender la definición formal de la integral como el límite de sumas de Riemann, plantean la conveniencia de conceptualizar primero la función de acumulación y, en tal sentido, se abocan a estudiar las dificultades que se presentan en los estudiantes en esta conceptualización auxiliar.

Por otra parte, Gordon y Gordon (2007), ante lo increíble que resulta para los estudiantes el teorema fundamental del Cálculo, por la forma en la que lo presenta la enseñanza tradicional, hacen uso de la idea de ajustes de funciones con datos y de un recurso computacional discreto para favorecer el descubrimiento de dicho teorema por parte de los estudiantes.

De igual manera, con el apoyo de recursos tecnológicos Turégano (1994) realiza un trabajo de investigación donde utiliza la visualización para dar significado al concepto de integral definida basado en la idea de área bajo la curva. Calvo (1997) también sugiere el uso de materiales visuales que enriquezcan el esquema conceptual de la integral definida en el estudiante.

En otro orden de ideas, Martínez Torregrosa *et al* (2002) señalan que en contraste con la importancia que tiene el Cálculo en el estudio de situaciones físicas más cercanas a la realidad que las tratadas en los cursos elementales de matemáticas, las conclusiones de numerosas investigaciones, realizadas en la enseñanza de las matemáticas, han evidenciado la existencia de serias dificultades en estudiantes, incluso en profesores, en relación con la comprensión de las ideas del Cálculo. Ellos comparten la necesidad de llevar a cabo un cambio de enfoque en el uso del Cálculo en las clases de física, basado en una verdadera comprensión de lo que se hace y por qué se hace. Esta inquietud es en relación al uso no riguroso que hacen los físicos de los diferenciales (cantidades infinitamente pequeñas) en la construcción de las integrales con las cuales finalmente resuelven determinada clase de problemas.

Por el contrario, Arcos (2007) reivindica el uso de los diferenciales en los cursos de Cálculo, no sólo para hacer a esos cursos más afines a los de física, sino, y ante todo, por las bondades didácticas que trae consigo ese uso. Esta postura de Arcos es una respuesta a la cuestión que se deriva de lo que Kleiner (2002) piensa de los cursos de Cálculo que comienzan con la definición de límite, de ser lógicamente constructivos, pero pedagógicamente destructivos.

4. Conclusión

Vemos pues, que la enseñanza del la integral está caracterizada, entre otras cosas, por:

- un énfasis en una algoritmia desprovista de significados.
- conceptualización de la integral basada únicamente en la noción de área.
- falta de afinidad con otras ciencias de las cuales el cálculo es subsidiario.
- insistencia en la enseñanza formalista a sabiendas de las dificultades que trae consigo.
- uso de los diferenciales por sus bondades didácticas.
- el uso de la tecnología como recurso para salvar esas dificultades.

Respecto a la última de las características, cabe mencionar que la evolución de los recursos tecnológicos, de acuerdo con Moreno-Armella, Hegedus y Kaput (2008) ofrece una nueva perspectiva teórica para investigar el potencial didáctico de los ambientes tecnológicos dinámicos continuos, que pertenecen a la última etapa en tal desarrollo. Comentamos lo anterior, pues estamos convencidos de que los procesos de enseñanza y aprendizaje del Cálculo y en particular del Cálculo Integral, pueden ser mejorados de una manera importante mediante el uso de la tecnología.

5. Comentario final

Toda caracterización de una situación tan compleja como la de la enseñanza de las matemáticas resulta incompleta tanto en profundidad como en amplitud. La caracterización de la situación actual de la enseñanza de la integral de funciones de una variable que hemos presentado en la sección anterior, desde luego, no es la excepción. Aún con eso, en base a ella ya se pueden vislumbrar preguntas cuyas respuestas han de brindar elementos para construir propuestas con las cuales mejorar la enseñanza de tan importante concepto, entre otras las siguientes:

- ¿qué problemas resultarían suficientes para favorecer que los alumnos se apropien del proceso de integración?
- ¿cómo han de abordarse esos problemas para que cumplan su objetivo?
- ¿qué relaciones han de darse entre los problemas, los alumnos y el profesor a fin de que se favorezca dicha apropiación?
- ¿cómo la tecnología puede hacer más efectivo el aprendizaje del proceso de integración?

La reformulación de esas preguntas, al interior de uno de los marcos teóricos que se han elaborado *ex profeso* para la investigación en Didáctica de las Matemáticas, y la búsqueda de respuestas a ellas, está siendo el motor de nuestras actuales investigaciones… dejaremos para próximos encuentros el hablar de lo que hemos avanzado al respecto.

4. Referencias bibliográficas

Arcos, J. (2007). Un curso de Cálculo Infinitesimal para bachillerato. En R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte iberoamericano* (pp. 3-24). México, D.F., México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.-Díaz Santos.

Artigue, M. (1995) La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática* (un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas), pp. 97-140. México, Grupo Editorial Iberoamérica.

Artigue, M. (2002). Analysis. En Tall, D. (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (167-198). Nueva York: Kluwer Academic Publishers.

Calvo, C. (1997). *Bases para una propuesta didáctica sobre integrales*. Tesis de Maestría. Programa de Doctorat del Departament de Didáctica de la Matemática i les Ciénces Experimentals. Universitat Autónoma de Barcelona.

Czarnocha, B., Loch, S., Prabhu, V. y Vidakovich, D. (2001). The concept of definite integral: coordination of two schemas. En M. Van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. II, pp. 297-304). Utrecht, Países Bajos: Freudenthal Institute.

Gascón, J. (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 6(1), 129-159.

Gordon, S. P. & Gordon, F. S. (2007). Discovering the fundamental theorem of calculus. *Mathematics Teacher 100* (9), 597-604.

Kleiner, I.. (2002). History of the infinitely small and the infinitely large in calculus. *Educational Studies in Mathematics 48* (2-3), 137 – 174.

Labraña, P.A. (2000). *La avaliacion das concepcións dos alumnos de COU e bacharelato acerca do significado do cálculo integral*. Tesis de Doctorado, Universidad de Santiago de Compostela, España.

Li, S. (2004). Does practice makes perfect? En Fujita, H., Hashimoto, Y., Hodgson, V., Lee, P., Lerman, S., Sawada, T. (Eds.), *Proceedings of the Ninth International Congress on Mathematical Education* (165-167). Tokio: Springer Netherlands.

Martínez Torregrosa, J., López-Gay, R., Gras Martí, A., Torregrosa Gironés, G., (2002), La diferencial no es un incremento infinitesimal. Evolución del concepto de diferencial y su clarificación en la enseñanza de la física. *Enseñanza de las Ciencias, 20*(2), pp. 271-283

Moreno-Armella, L.; Hegedus S. & Kaput, J. (2008). From static to dynamic mathematics: historical and representational perspectives. *Educational Studies in Mathematics 68*, 99-111.

Muñoz, O. G. (2000). Elementos de enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el Cálculo Integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. 3*(2), 131-170.

Salinas, P., y Alanís, J. A. (2009), Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del Cálculo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *12*(3), 355-382.

Sánchez-Matamoros, G., García, M. y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 11(2), 267-296.

Steen, L. A. (2003). Analysis 2000: challenges and opportunities. In D. Coray, F. Furinghetti, H. Gispert, B. R. Hodgson & G. Schubring (Eds.), One hundred years of l'enseignement mathématique: moments of mathematics education in the twentieth century. *Monograph No. 39* (pp. 191-210). Génova, Italia: L'Enseignement Mathématique.

Tall, D. (2002). *Advanced Mathematical Thinking*. (Ed.) Nueva York: Kluwer Academic Publishers.

Thompson, P. W. & Silverman, J. (2007). The concept of accumulation in calculus. In M. Carlson & Rasmussen (Eds.), *Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics* (pp.117-131). Washington D.C.: Mathematical Association of America.

Turégano, P. (1994). *Los conceptos en torno a la medida y el aprendizaje del Cálculo Infinitesimal*. Tesis de Doctorado, Universidad de Valencia, España.

Turégano, P. (1996). Reflexiones didácticas acerca del concepto de área y su medida. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 10. Octubre.