# ¿Relación, función ó ecuación?

**Josefina M. Cribeiro**
**Humberto Madrid**
**José Luis Fraga**
**Universidad Autónoma de Coahuila**
**México**

**Resumen**

**Palabras claves:** Relación, función, ecuación

## 1. Introducción

Los autores hacen un análisis reflexivo sobre algunas de las preguntas formuladas en las encuestas y entrevistas realizadas, así como de las respuestas de los estudiantes y profesores. Las preguntas formuladas se convierten en planteamiento de problemas. Antes de responder a la pregunta ¿es relación, función ó ecuación? se enfatizan los elementos que caracterizan a los tres conceptos. Se discuten los motivos por los cuales los estudiantes subestiman los conjuntos donde se establecen la ley que vincula a los elementos, por qué no pueden reconocer la diferencia entre función y ecuación y la forma de evitar que los estudiantes se queden con alguna de las representaciones, creyendo que ese es el concepto. Se expone también la forma en que se han logrado aclarar las confusiones conceptuales, las posibles causas que motivaron esas confusiones y se hace una propuesta para tratar cada uno de los conceptos identificando las características de cada uno de ellos, enfatizando aquellas que habitualmente son minimizadas. Se hacen unas reflexiones finales sobre la importancia de estos conceptos en la comprensión de otras materias y se hace una propuesta para la presentación de contenidos.

## 2. Antecedentes

Los autores Cribeiro y Madrid han dirigido y/o participado de forma sistemática a lo largo de más de veinte años en diferentes investigaciones sobre la forma en que los estudiantes y profesores perciben los conceptos de relación, función y ecuación; las dificultades existentes para la comprensión de los conceptos; los aspectos que docentes y libros de texto no enfatizan y las confusiones que se presentan por no tener claridad conceptual. Estas investigaciones se han realizado con estudiantes de ingeniería, licenciatura en ciencias biológicas, licenciatura en matemáticas y maestría en matemática educativa, profesores de matemáticas de nivel pre universitario y universitario. Las investigaciones se realizaron en: Universidad de la Habana (1989-1998), Universidad Autónoma de Coahuila (1987-2014) Instituto Tecnológico de la Región Carbonífera de Coahuila (1999-2004) [ 4,5,6,14, 15, 16]

En las investigaciones realizadas por los autores durante más de veinte años sobre los conceptos de función, relación y ecuación, ha existido un elemento común en todos los niveles educativos: al inicio de cada curso escolar donde se trató el concepto de función o de relación se hizo un examen diagnóstico para determinar si los estudiantes podían dar las definiciones, si eran capaces de identificar las características y si dada una expresión matemática, podían reconocer entre función, relación y ecuación. En todos los casos, independientemente del nivel educativo de alumnos o profesores, se observó que no tomaron en cuenta los conjuntos donde se establecían la relación entre variables, consideraron que trabajan del conjunto de los números reales en el conjunto de los números reales y no pudieron justificar adecuadamente el que considerasen que una expresión correspondía a una ecuación ó una función. Se orientaban por tener una igualdad a cero, a un número ó tener despejada la variable dependiente. Es muy difícil que acepten que para una misma expresión matemática con pares de conjuntos diferentes se puede tener indistintamente una relación, una función, ningún vínculo o una ecuación. Es necesario trabajar destacando las características de los conceptos en cada una de las diferentes representaciones y visualizando que para pares diferentes de conjuntos se tienen resultados totalmente distintos.

## 3. Preguntas convertidas en problemas

**Prregunta 1. La curva que se ve a continuación es descrita por el rastro de un caracol. Ese rastro ¿es relación ó función?**

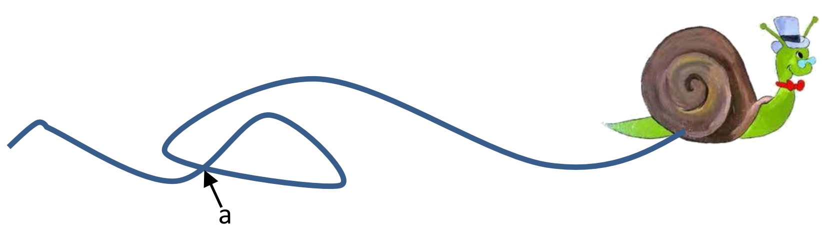



Figura1

Incluyendo egresados de Licenciatura en Matemáticas, profesores de Matemáticas de bachillerato y de Ingeniería, así como alumnos de Maestría en Matemática Educativa piensan inmediatamente en funciones reales de variable real. Como a un valor dado en el eje x le corresponde más de un valor de y, responden que no es función, es solo una relación. ¿Por qué los estudiantes presuponen que se está trabajando de los reales en los reales? Al tener una curva en el plano del piso, los estudiantes de forma natural presuponen que se está trabajando de los reales en los reales. Si se analizan los problemas y ejercicios de los diferentes libros de Cálculo se puede constatar que el énfasis se encuentra en declarar las variables que se presentan en el problema, establecer el vínculo entre ellas, hallar el dominio y codominio y justificar si a cada valor de la variable independiente le corresponde un único valor de la variable dependiente.

Poco o ningún trabajo se realiza en destacar que los conjuntos donde se trabaja son dos de los aspectos fundamentales que determinan funciones o relaciones diferentes de acuerdo a los conjuntos y variables utilizados. Es por consiguiente lógico y natural que los estudiantes en el ejemplo del caracol, sigan esa misma forma de razonamiento de considerar que trabajan de los reales en los reales y no pregunten cuáles son las variables que se tienen ni los conjuntos donde se encuentran dichas variables.

La misma pregunta puede presentarse dando lugar a tres situaciones diferentes si se presenta como un problema de la siguiente forma:

> *La marca que deja un caracol al caminar sobre una hoja de papel de color negro está dada por la figura 1. Si se mide el tiempo y la posición que ocupa en cada minuto. Quiero saber si*
>
> *1. ¿Puedo determinar la posición a partir de conocer el tiempo?*
> *2. ¿Puedo determinar el tiempo conociendo la posición?*
> *3. A partir del desplazamiento horizontal ¿puedo determinar el desplazamiento vertical?*
>
> *En caso de que las respuestas sean afirmativas ¿tienes relaciones o funciones? y ¿qué tipo de relaciones o funciones son, de una variable, de varias variables, escalar o vectorial? Expresa los conjuntos donde se definen las variables.*

Lo interesante de este problema es que permite presentar simultáneamente funciones de una variable, de varias variables, funciones vectoriales y funciones paramétricas con un ejemplo muy simple que no requiere conocimientos de física, química, economía u otra ciencia. Al ser un problema de desplazamiento su comprensión puede dar lugar a motivar situaciones análogas para aviones, barcos, autos, robots, etc

**Pregunta 2. ¿Cuál es la diferencia entre función lineal, ecuación de primer grado y ecuación de la recta?**

La pregunta aparece ligada a una expresión matemática, por ejemplo $y = 3x + 2$. Las respuestas más comunes se asocian a que es función porque a un valor de la variable independiente le corresponde un único valor de la variable dependiente. No aclaran los conjuntos donde varían las variables. Reconocen que es una ecuación de primer grado porque las variables están elevadas a exponente uno y además plantean que la expresión corresponde a la ecuación de la recta. La confusión aparece al tener que decir la diferencia entre los tres conceptos pues las justificaciones no cuentan con elementos sólidos, debido a la deficiente comprensión de los conceptos.
Para ayudar a que los estudiantes lleguen por si mismos a encontrar el camino para responder la diferencia se pueden realizar previamente, otras preguntas adicionales tales como:

1. Si $x \in A$ , $y \in B$ expresar el subconjunto del producto cartesiano A x B que satisface la expresión dada y = 3x + 2 para los siguientes pares de conjuntos.
   i. A = $\mathbb{N}$ ; B = $\mathbb{N}$
   ii. A = $\mathbb{Z}$ ; B = $\mathbb{Z}$
   iii. A = $\mathbb{R}$ ; B = $\mathbb{R}$
2. Si se cambia la expresión y = 3x + 2 por la expresiones y – 3x = 2; y – 3x – 2 = 0 y se toman los mismos pares de conjuntos vistos en el inciso 1 ¿cambia el subconjunto del producto cartesiano? Explica los resultados obtenidos.
3. ¿Cuál es el subconjunto del producto cartesiano, en cada caso, cuando se toma el caso particular en que y = 0?
4. Halla el conjunto solución para cada una de las ecuaciones de los incisos 1, 2 y 3 con los tres pares de conjuntos.
5. ¿Qué relación existe entre el subconjunto de A x B que satisface la expresión matemática y el conjunto solución?
6. ¿Qué relación existe entre la expresión matemática que relaciona las variables y la expresión que establece una ecuación?

**Pregunta 3. La expresión dada ¿es relación, función ó ecuación?**

Al preguntar a los estudiantes sobre la expresión dada por $x^2 + y^2 = 9$ si corresponde a una relación, una función ó una ecuación se provocan discusiones muy interesantes. En general responden que es una relación porque a un valor de x le corresponden dos valores de y. Algunos responden que es una ecuación, que es la ecuación de la circunferencia.
Realmente la pregunta está mal formulada porque no se puede determinar nada si no se declaran los conjuntos donde x e y varían. Para aclarar las ideas se ponen varios casos.

1. $x^2 + y^2 = 9$ , x está en el intervalo [-3,3], y está en el intervalo [-3,3]
2. $x^2 + y^2 = 9$ , x está en el intervalo [-3,3], y está en el intervalo [-3,0]
3. $x^2 + y^2 = 9$ , x está en el intervalo [-3,3], y está en el intervalo [0,3]
4. $x^2 + y^2 = 9$, x está en el intervalo [-3,0], y está en el intervalo [-3,0]
5. $x^2 + y^2 = 9$ , x son los enteros que están en el intervalo [-3,3], y está en el intervalo [-3,0]
6. $x^2 + y^2 - 9 = 0$ , x está en el intervalo [-3,3], y está en el intervalo [-3,0]
7. $y = \pm\sqrt{9 - x^2}$ , x está en el intervalo [-3,3], y está en el intervalo [-3,3]
8. $y = \pm\sqrt{9 - x^2}$ , x está en el intervalo [4,30], y está en el intervalo [0,30]
9. $y = \pm\sqrt{9 - x^2}$ , x está en el conjunto de los números naturales, y está en el intervalo [0,30]
10. $y = \pm\sqrt{9 - x^2}$ , x está en el conjunto de los números reales, y está en el conjunto de los números reales

La respuesta puede ser cualquiera de las tres posibilidades, relación, función o ecuación de acuerdo a los conjuntos A y B que se consideren.

## 4. Aspectos que caracterizan a los tres conceptos

Existe una terna básica común a los tres conceptos (A,B, R) los dos conjuntos en los que se establecen las variables y el vínculo entre ellos.

*Relación:*

Basta con poder relacionar algunos elementos del primer conjunto con algunos del segundo conjunto, para tener una relación entre los conjuntos. No importa si se relacionan todos los elementos o solamente algunos de los elementos del primer conjunto, con uno o varios elementos del segundo conjunto. Se le llama dominio de la relación a los elementos del primer conjunto que se vinculan con elementos del segundo conjunto. Se le llama codominio a los elementos del segundo conjunto (variables dependientes) vinculados con elementos del conjunto de partida (variables independientes).

*Función:*

Para tener una función se necesita además que se cumplan dos propiedades adicionales:

P1 La primera propiedad pide que **todos** los elementos del conjunto A de partida (variables independientes) estén relacionados con algún elemento del segundo conjunto de llegada (variables dependientes).

P2 La segunda propiedad establece que a cada elemento del conjunto de partida (variables independientes) le corresponde un único elemento del conjunto de llegada (variable dependiente).

En caso de que no se cumpla la primera propiedad se restringe el conjunto A al subconjunto $A_1$ de elementos que se relacionan con elementos de B y a este subconjunto se le llama dominio de la función. Esto hace que esta propiedad no sea determinante para tener una función, pues basta restringir el conjunto y en este subconjunto se tiene una función. Dado que la segunda propiedad es la que determina que el vínculo entre las variables sea función o no lo sea, los docentes y los libros de texto hacen énfasis en la comprobación de que se cumpla esta propiedad, minimizando la importancia de los conjuntos donde se establece el vínculo entre variables.

*Ecuación:*

La ecuación expresa la relación (ley ó vínculo) existente entre elementos del dominio de la relación o función, con un **único** elemento del codominio (puede considerarse el 0 como ese elemento de B). El objetivo de una ecuación es hallar el conjunto solución, el cual es el subconjunto del dominio de la función o relación, relacionado con el valor dado del codominio. La ecuación y el conjunto solución son dos objetos matemáticos diferentes.

Expresado en términos formales con notación matemática se presenta de la siguiente forma:

Relación: Terna (A, B, R)

$$R = \{(x, y) \in AxB : y = R(x)\}$$

Función: Terna (A, B, R) y dos propiedades P1 y P2 (A, B, R, P1, P2)

$$R = \{(x, y) \in AxB : y = R(x) \text{ , } se\ cumple\ P1\ y\ P2\}$$

Ecuación: R: $A \rightarrow B; 0 \in B$ R(x) = 0

Conjunto solución: S = $\{x \in A : R(x) = 0 ; 0 \in B\}$

**5. ¿Por qué los estudiantes no consideran los conjuntos donde se establecen la ley que vincula a los elementos?**

Ni los libros, ni los docentes destacan los conjuntos en igual medida que la propiedad $P_2$. Una expresión matemática puede ser función o solo relación dependiendo de la elección de los conjuntos de partida y llegada. Es imprescindible presentar la misma expresión matemática con diferentes pares de conjuntos. Por ejemplo con el enunciado siguiente.

Determinar si la relación es función. Hallar el dominio y el codominio. Hacer el gráfico de cada una de las relaciones dadas en la tabla para todos los pares de conjuntos A y B. Señalar en el gráfico el Dominio en color rojo, el Recorrido en color verde y los pares ordenados que forman la relación en color azul.

| ***Relación***<br>x R y | $x \in A$ | $y \in B$ | ***Dominio***<br>$A_1$ | ***Codominio***<br>$B_1$ | $P_1$ | $P_2$ | F |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y = x^3$ | {2,3,5}<br>{1,2,3,4, 5}<br>N<br>N<br>**R** | {8,27,125}<br>{1,15, 27,125}<br>$R_-$<br>**N**<br>**R** | | | | | |

Tabla 1

A continuación se puede comprobar la diferencia de la ley $y = x^3$ con triadas diferentes

I.

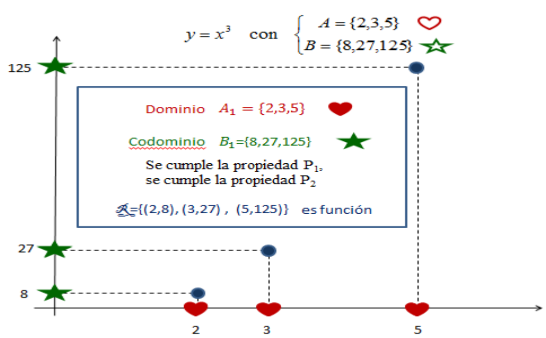



Figura 2

II.

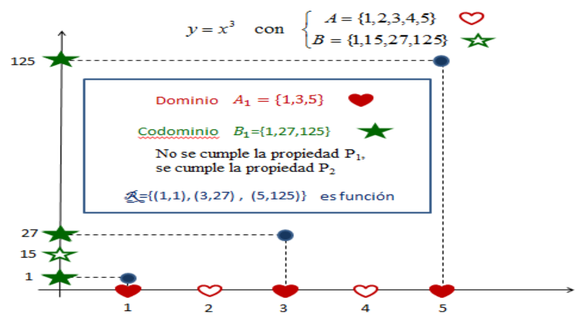



Figura 3

III. $y = x^3$ con $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{R}_-$ No existe relación entre los números naturales y los reales negativos mediante la ley de elevar al cubo.

IV.

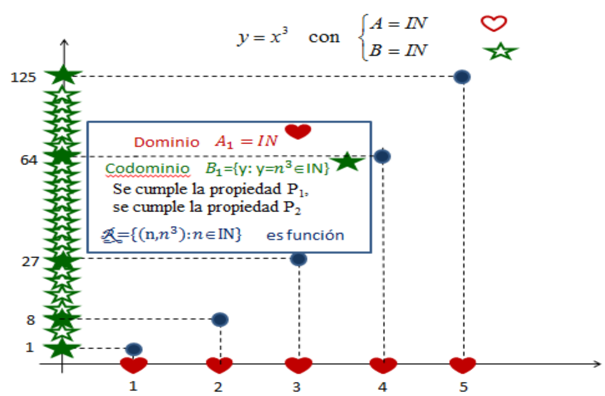



Figura 4

V.

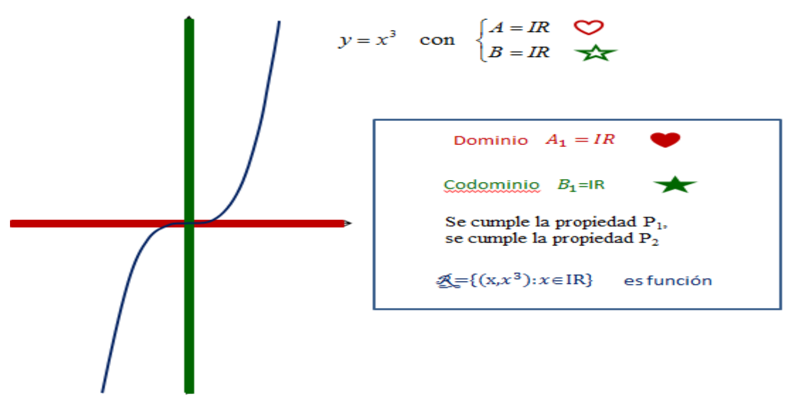



Figura 5

## 6. ¿Por qué los estudiantes no pueden reconocer la diferencia entre función y ecuación?

Los docentes y los libros de texto generalmente presentan la función y la ecuación mediante la representación de la expresión matemática que vincula las variables, restándole importancia al papel de los conjuntos de partida y llegada A y B, del dominio $A_1 \subset A$, del codominio $B_1 \subset B$ y del concepto en sí. La notación matemática en este caso ayuda a precisar los conceptos, destacando las características y diferencias entre ellos. Los estudiantes subestiman los conceptos por considerarlos innecesarios, consideran que tienen que trabajar con fórmulas y realizar algoritmos de trabajo operacionales. Confunden las expresiones matemáticas que representan el vínculo entre variables con la función y la ecuación la asocian únicamente a una expresión matemática con signo de igualdad. Se considera a la notación matemática como algo carente de importancia, más bien un capricho de matemáticos sin utilidad práctica pues lo único importante, en su criterio son los pasos operacionales que hay que dar para resolver un tipo de ejercicio en particular.

## 7. Discusión de los problemas que pueden ayudar a enfatizar la importancia de los conjuntos donde se trabajan los tres conceptos.

**Problema 1.** En este ejemplo no es necesario establecer explícitamente el vínculo entre las variables y permite destacar que el modelo específico depende de la información que se desea obtener a partir de ciertos datos.

La primera pregunta indica que la variable independiente es el tiempo y la posición la dependiente. La posición P tiene dos coordenadas, se tiene una expresión P(x(t), y(t)). Para cada valor del tiempo se tiene una posición única, por lo cual se cumple la segunda propiedad $P_2$. Se cumpla $P_1$ pues para cada tiempo se tiene una posición. Por lo cual se tiene una función vectorial de dos componentes y una variable independiente. La segunda pregunta establece hallar el tiempo a partir de conocer la posición es decir t(x,y) , t es la variable dependiente, x e y las independientes. El caracol pasa dos veces por el punto a, por lo cual se repiten las componentes para tiempos diferentes, no se cumple la propiedad $P_2$ y la expresión de dos variables no es función. En la tercera pregunta se plantea hallar y(x). Esta situación es la más común para los estudiantes donde a un valor de x le corresponden varios valores de y, por lo cual no es función. Lo interesante es que a partir de las mismas mediciones, se tienen situaciones completamente diferentes que dan lugar a considerar una relación vectorial, una de dos variables y otra de una variable.

**Problema 2.** Al responder las preguntas, el estudiante puede apreciar que para la misma expresión matemática¸ los subconjuntos de los productos cartesianos varían de acuerdo al par de conjuntos que se consideren. Sin embargo si se mantienen los pares de conjuntos A y B, se puede tener más de una expresión que da lugar al mismo subconjunto del producto cartesiano. Por lo cual se puede plantear siempre la ecuación en la forma $R(x) = 0$ sin alterar el conjunto solución. Otro aspecto interesante al que se llega es que para un valor específico de y se tiene una ecuación de primer grado de una variable pero si no se tienen valores dados se tiene una ecuación de primer grado de dos variables, la cual corresponde a la ecuación de la recta solamente cuando se trabaja para $A = B = \mathbb{R}$ .

**Problema 3.** Trabajaremos inicialmente con los primeros 6 incisos. Existen dos posibilidades para la expresión implícita $x^2 + y^2 = 9$ y los conjuntos donde varían x e y.

i. x R y Se vinculan dos variables x e y pero no se sabe cuál es dependiente de la otra Para facilitar la comprensión se considera primero la relación entre las variables x e y con la expresión implícita $x^2 + y^2 = 9$ y diferentes pares de conjuntos.

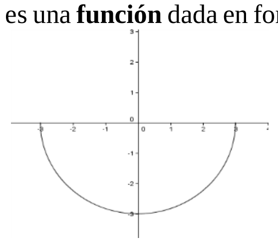
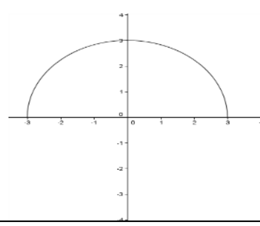
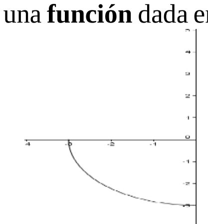
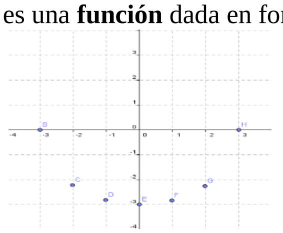
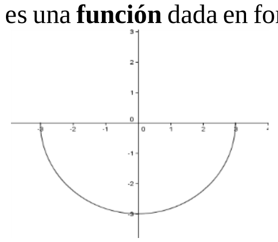
| | |
|---|---|
| 1. R: [-3,3] → $[-3,3]$<br>R $= \{(x,y) \in [-3,3]X[-3,3] \mid \; x^2 + y^2 = 9\}$<br>La expresión es una **relación** dada en forma implícita<br> | 2. R: [-3,3] → $[-3,0]$<br>R $= \{(x,y) \in [-3,3]X[-3,0] \mid \; x^2 + y^2 = 9\}$<br>La expresión es una **función** dada en forma implícita<br> |
| 3. R: [-3,3] → $[0,3]$<br>R $= \{(x,y) \in [-3,3]X[0,3] \mid \; x^2 + y^2 = 9\}$<br>La expresión es una **función** dada en forma implícita<br> | 4. R: [-3,0] → $[-3,0]$<br>R $= \{(x,y) \in [-3,0]X[-3,0] \mid \; x^2 + y^2 = 9\}$<br>La expresión es una **función** dada en forma implícita<br> |
| 5. R: $\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$ → $[-3,0]$<br>R =<br>$\{(x,y) \in \{-3,-2,-1,0,1,2,3\}\, X\, [-3,0] \mid x^2 + y^2 = 9\} = \{B, C, D, E, F, G, H\}$<br>La expresión es una **función** dada en forma implícita<br> | 6. R: [-3,3] → $[-3,0]$<br>R $= \{(x,y) \in [-3,3]X[-3,0] \mid \; x^2 + y^2 - 9 = 0\}$<br>La expresión es una **función** dada en forma implícita<br> |

Tabla 2

ii. (x,y) R z. Se vinculan tres variables, z depende de dos variables independientes (x,y). El lugar geométrico es una superficie (cilindro circular recto). Al considerar que z = 0 ó z = 9, se fija el plano XY ó un plano paralelo y se obtiene una circunferencia como conjunto solución de la ecuación

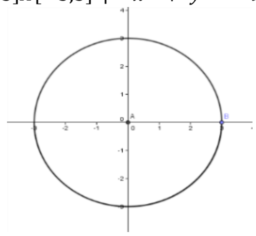
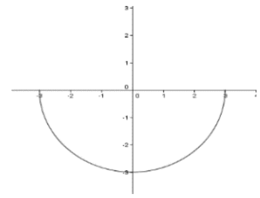
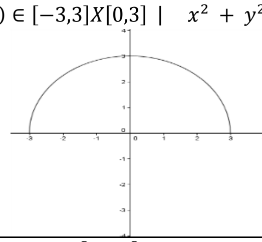
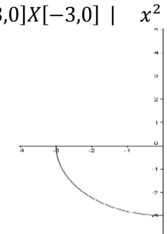
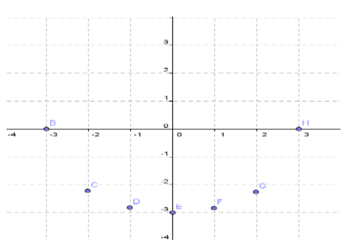
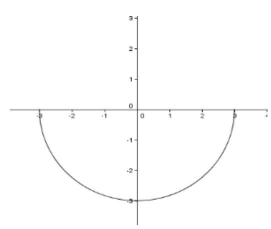
| | |
|---|---|
| 1. $x^2 + y^2 = 9$<br>R: [-3,3] $X[-3,3] \to \mathbb{R}$<br>R $= \{((x,y),z) \in [-3,3]\ X\ [-3,3]\ X$ R $\mid\ x^2 + y^2 = z\}$<br><br>b = 9 Ecuación $x^2 + y^2 = 9$<br>Conjunto solución S<br>S = $\{(x,y) \in [-3,3]X[-3,3] \mid\ x^2 + y^2 = 9\}$<br> | 2. $x^2 + y^2 = 9$<br>R: [-3,3] $X[-3,0] \to \mathbb{R}$<br>R $= \{((x,y),z) \in [-3,3]\ X\ [-3,0]\ X$ R $\mid\ x^2 + y^2 = z\}$<br><br>b = 9 Ecuación $x^2 + y^2 = 9$<br>Conjunto solución S<br>S = $\{(x,y) \in [-3,3]X[-3,0] \mid\ x^2 + y^2 = 9\}$<br> |
| 3. $x^2 + y^2 = 9$<br>R: [-3,3] $X[0,3] \to \mathbb{R}$<br>R $= \{((x,y),z) \in [-3,3]\ X\ [0,3]\ X$ R $\mid\ x^2 + y^2 = z\}$<br><br>b = 9 Ecuación $x^2 + y^2 = 9$<br>Conjunto solución S<br>S = $\{(x,y) \in [-3,3]X[0,3] \mid\ x^2 + y^2 = 9\}$<br> | 4. $x^2 + y^2 = 9$<br>R: [-3,0] $X[-3,0] \to \mathbb{R}$<br>R $= \{((x,y),z) \in [-3,0]\ X\ [-3,0]\ X$ R $\mid\ x^2 + y^2 = z\}$<br><br>b = 9 Ecuación $x^2 + y^2 = 9$<br>Conjunto solución S<br>S = $\{(x,y) \in [-3,0]X[-3,0] \mid\ x^2 + y^2 = 9\}$<br> |
| 5. $x^2 + y^2 = 9$<br>R: $\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}\ X[-3,0] \to \mathbb{R}$<br>R =<br>$\{((x,y),z) \in \{-3,-2,-1,0,1,2,3\}\ X\ [-3,0] X\ R \mid\ x^2 + y^2 = z\}$<br><br>b = 9 Ecuación $x^2 + y^2 = 9$<br>Conjunto solución S =<br>$\{(x,y) \in \{-3,-2,-1,0,1,2,3\}\ X\ [-3,0] \mid\ x^2 + y^2 = 9\} =$<br>$\{B, C, D, E, F, G, H\}$<br> | 6. $x^2 + y^2 - 9 = 0$<br>R: [-3,3] $X[-3,0] \to \mathbb{R}$<br>R $= \{((x,y),z) \in [-3,3]\ X\ [-3,0]\ X$ R $\mid\ x^2 + y^2 - 9 = z\}$<br><br>b = 0 Ecuación $x^2 + y^2 - 9 = 0$<br>Conjunto solución S<br>S = $\{(x,y) \in [-3,3]X[-3,0] \mid\ x^2 + y^2 - 9 = 0\}$<br> |

Tabla 3

Al preguntar si las expresiones dadas son funciones, relaciones o ecuaciones sin especificar los conjuntos de partida y llegada, se genera en el aula discusiones muy interesantes donde queda claramente evidenciado que las justificaciones que esgrimen no están basadas en el análisis de los conceptos sino en suposiciones personales o en respuestas arbitrarias carentes de análisis de cumplimiento de las características y propiedades de los conceptos. No especificar la triada porque se presupone que se trabaja de ℝ en ℝ, hace que los estudiantes no tomen en cuenta los conjuntos pues nunca cambian, siempre trabajan para los números reales. Para la triada perfectamente especificada los alumnos deben de comprobar si se cumplen las propiedades 1 y 2, escribir los conjuntos de los pares ordenados que forman la relación y representarlos gráficamente en el plano cartesiano.

puede observarse en las tablas 2 y 3 que los mismos números en ambas tablas tiene la misma relación entre variables y el mismo gráfico pero correspondiente en la tabla 2 a la relación y en la tabla 3 al conjunto solución de la ecuación. Se comprueba como la misma expresión implícita para pares de conjuntos diferentes da lugar a una relación ó a funciones diferentes, de acuerdo a los pares de conjuntos donde se trabaja.

El uso de la notación matemática aclara mucho los conceptos por lo cual los estudiantes deben escribir el conjunto de pares ordenados de la relación, la terna (R, A, B) , identificar b; expresar R: A → $B\ b\ \in B$ y distinguir si se tiene R(x) = b ó R(x,y) = b.

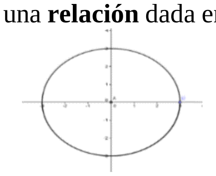
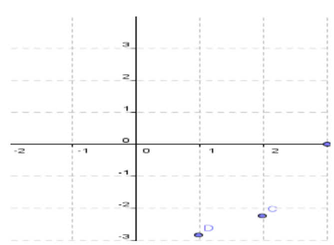
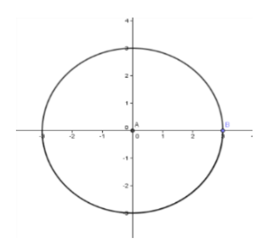
| | |
|---|---|
| 7. y = $\pm\sqrt{9-x^2}$<br>R: [-3,3] → $[-3,3]$<br>$R = \{(x,y) \in [-3,3]X[-3,3] \mid y = \pm\sqrt{9-x^2}\}$<br>La expresión es una **relación** dada en forma explícita<br> | 8. y = $\pm\sqrt{9-x^2}$<br>R: [4,30] → $[0,30]$<br>$R = \emptyset$<br>Para ese par de conjuntos no es posible siquiera establecer una relación entre sus elementos por la expresión y = $\pm\sqrt{9-x^2}$ |
| 9. y = $\pm\sqrt{9-x^2}$<br>R: $\{1,,2,3,\ 4,\dots\dots\dots\} \to [-3,0]$<br>R $= \left\{(x,y) \in \{1,,2,3,4,\dots\}\ X\ [-3,0] \,\middle\vert\, y = \pm\sqrt{9-x^2}\right\} =$ $\{(1,-\sqrt{8}),(2,-\sqrt{5}),(3,0)\}$<br> | 10. y = $\pm\sqrt{9-x^2}$<br>R: ℝ→ℝ<br>$R = \{(x,y) \in\ IR$ X IR $\mid y = \pm\sqrt{9-x^2}\}$<br>La expresión es una **relación** dada en forma explícita<br> |

Tabla 4

Puede observarse en las tablas 2 y 4 que los lugares geométricos de los incisos 1, 7 y 10 corresponden a la circunferencia de centro en el origen y radio 3, los tres casos corresponden a una relación cuyos pares ordenados son los mismos pero la expresión matemática del inciso 1 corresponde a una forma implícita mientras que la de 7 y 10 se expresan en forma explícita. En el inciso 7 el dominio de la relación coincide con el conjunto de partida y en el inciso 10 el dominio de la relación es un subconjunto del conjunto de partida. El análisis de las tablas

2, 3 y 4 demuestra que el par de conjuntos entre los que se vinculan las variables por una misma ley es determinante para tener una relación, una ecuación o una función particular. Considerar solamente el vínculo entre las variables subestimando a los conjuntos o no enfatizándolo debidamente es lo que lleva a las confusiones que presentan los estudiantes al identificar una de las tres variantes teniendo como referencia solamente la asociación de variables por una expresión matemática o fórmula como acostumbran a decir.

## 8. Uso de diferentes representaciones. ¿Cómo evitar que los estudiantes se queden con alguna de las representaciones, creyendo que ese es el concepto?

La mayoría de los docentes destacan en las diferentes representaciones del concepto únicamente la ley de correspondencia entre conjuntos y la propiedad de que a un elemento del primer conjunto le corresponda un único elemento del segundo conjunto.

En la verbal (descripción de una situación mediante palabras); no basta con pasar de las palabras a la modelación mediante la expresión matemática, se necesita destacar la importancia de seleccionar adecuadamente los conjuntos donde varían las variables y las repercusiones a la hora de dar la respuesta de haber seleccionado de forma incorrecta esos conjuntos. Muchas veces los estudiantes aunque seleccione correctamente los conjuntos, no los toman en cuenta al dar la respuesta. Tal es el caso de la respuesta a un problema donde se preguntaba el número de obreros necesarios para hacer determinada labor, donde el resultado daba 150.33 y el 70% de los estudiantes dejó el resultado obtenido sin tomar en cuenta que los hombres son unidades enteras positivas. Cuando se discutió con ellos los resultados, reían porque la razón de la omisión de ese análisis es la falta de costumbre de responder tomando en cuenta el conjunto donde se trabaja.

La expresión matemática (asociación de variables mediante una cierta ley de correspondencia); no siempre es posible establecer esa expresión matemática, hay ocasiones que se tiene el vínculo entre las variables de dos conjuntos pero ese vínculo no se puede expresar por operaciones matemáticas, sin embargo se tiene la triada y se cumplen las dos propiedades que caracteriza a una función. Es importante poner ejemplos donde se tienen situaciones de ese tipo.

En la tabular (tabla que asocia a algunos valores de la variable independiente el correspondiente valor de la variable dependiente); solamente se tiene una muestra de los pares asociados por la ley especificada. La falta de comprensión conceptual se acentúa con esta mal llamada representación del concepto pues hace pensar que la selección de unos cuantos valores de la variable independiente elegidos al azar ya constituye el concepto, con el agravante que a partir de unos valores discretos extrapolan que la representación gráfica es un trazo continuo.

La representación gráfica (representación en el plano cartesiano de una curva); sólo se puede utilizar para funciones de una y dos variables. Esta representación ayuda a la comprensión del concepto y su visualización pero se deben destacar las parejas ordenadas asociadas mediante la ley que se especifica, lo cual constituye finalmente el concepto.

Los diagramas de Venn ayudan mucho a comprender el concepto para casos donde se tiene un número pequeño de elementos. Cuando se tienen infinitos elementos puede confundir el que visualicen una muestra solamente de ellos y se necesita pasar a otro tipo de representación para destacar la forma de la totalidad de los pares ordenados.

En la conjuntual $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x) = x+ 3$ (por ejemplo) se destaca claramente la tríada pero no se visualiza el conjunto de pares ordenados. La representación mediante un subconjunto del producto cartesiano es la forma más clara de identificar las parejas ordenadas asociadas mediante la ley que se especifica. En múltiples situaciones cotidianas no es posible expresar esa ley mediante símbolos matemáticos, lo cual no significa que no se tenga una relación ó una función.

Es importante aclarar que el vínculo entre variables en cualquiera de sus representaciones no constituye la relación o función, es solamente una de las tres componentes de la triada. Por eso hay que destacar en cualquier representación los dos conjuntos donde se encuentran las variables y el vínculo expresado en forma verbal, con símbolos matemáticos mediante una expresión, en forma gráfica o mediante diagramas de Venn.

## 9. Reflexiones finales

El pensamiento funcional no es privativo del Cálculo, se necesita la claridad de estos conceptos para trabajar en otras disciplinas, tales como Probabilidad, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Ecuaciones Diferenciales Parciales, Programación, Programación Lineal y no Lineal, Investigación de Operaciones, Métodos Numéricos, Análisis Funcional, Teoría de Operadores, Sistemas Dinámicos. En estas disciplinas la claridad de los conjuntos donde se trabaja se hace vital para la comprensión de los conceptos. Analicemos algunas de ellas:

**Probabilidad.** La probabilidad es una función cuyo conjunto de partida son eventos que difieren en cada problema y cuyo conjunto de llegada es el intervalo [0,1]. $P: S \longrightarrow [0,1]$

Todos los eventos que ocurren en un experimento forman el espacio muestral S, el cual puede ser un conjunto numérico continuo ó discreto, pero también puede ser un conjunto no numérico, dado por la ocurrencia de determinados hechos, tales como el que al lanzar una moneda salga águila o sol, el que al sacar una naranja de una caja esté podrida, o el que en un lote de piezas salga una defectuosa. Ese espacio muestral está formado por todas las variantes que pueden ocurrir en un experimento.

El valor asignado en el codominio [0,1] representa la medida de que el evento ocurra, si el valor asignado es 0, indica que no ocurre nunca, si el valor asignado es 1 indica que el evento ocurre siempre. Cuando el valor asignado a un evento $s^*$ es 0.25 se dice que es posible que el evento $s^*$ ocurra una cuarta parte de las veces que se realice el experimento.

Sea F la expresión matemática que vincula a $s^*$ con 0.25 a la cual los estudiantes llaman fórmula y que varía de acuerdo a lo que se desee determinar, esa expresión F es el vínculo entre los conjuntos. Al no entenderse correctamente el concepto de función no se llega a entender que la probabilidad es el conjunto de pares ordenados de la forma ($s_i$, r) para $s_i$ $\in$ S, $1 \leq i \leq n \in N, n\ número\ de\ elementos\ de\ S$, r $\in$ [0,1] asociados mediante una F particular.

En Cálculo dado el vínculo F entre los conjuntos, se pide hallar los valores del conjunto de llegada, ó los valores del dominio asociados a un elemento específico del conjunto de llegada. Los planteamientos que se hacen en Probabilidad son de un estilo diferente a los hechos en Cálculo porque se pide hallar el valor asociado en el codominio a un determinado evento $s_i$ del dominio (espacio muestral). En este caso, se presentan dos grandes dificultades, la primera es describir el espacio muestral y la segunda dificultad consiste en que de acuerdo a las características del experimento, el estudiante tiene que hacer una buena selección de la expresión matemática F que vincula al elemento de S con un elemento de [0,1]. Al dar el concepto de función enfatizando solamente la expresión matemática, hace que se dificulte tanto el comprender cuál es el espacio muestral y cuál será la expresión matemática F apropiada, de acuerdo al tipo de experimento que se realice.

**Ecuaciones Diferenciales.** Las Ecuaciones diferenciales son casos particulares de las ecuaciones, por lo que se necesita entender bien lo que es una ecuación para poder entender lo que es una ecuación diferencial. En el caso de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias el conjunto de partida A es un conjunto de funciones diferenciables en un cierto intervalo, que cumplen otras propiedades particulares y el conjunto B también es un conjunto de funciones. El conjunto solución estará dado por las funciones pertenecientes a un subconjunto de A que cumplen con la relación entre los conjuntos A y B. Utilizando la notación matemática, la ecuación se expresa como f: $A \rightarrow B; 0 \in B$ f(x) = 0 y el conjunto solución de la ecuación S = $\{x \in A : f(x) = 0 ; 0 \in B\}$

## 10. Propuesta

En este artículo se ha demostrado la importancia que tiene para el buen desarrollo de la vida universitaria en las carreras de Ingeniería y Ciencias, la comprensión de los conceptos de relación, función y ecuación, así como el papel que representan los conjuntos de partida y llegada en dichos conceptos. Por ese motivo hacemos la proposición de incluir al inicio de los cursos de Cálculo las diferentes posibilidades de relaciones y funciones trabajando de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$, de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$. El ejemplo del movimiento de un caracol, dado al inicio, puede ser el motivo para introducir diferentes funciones, de una variable, de varias variables, vectoriales.

Esta organización de los cursos de Cálculo permite trabajar el Cálculo Diferencial de una y varias variables en una sola asignatura lo cual brinda varias ventajas. La primera es que función queda cómo concepto único, que varía de acuerdo al par de conjuntos con los que se trabaje. La segunda ventaja es que al dar función de varias variables a continuación de las funciones de una variable, se comprende mejor las características que son modificadas al cambiar los conjuntos. Por ejemplo los conceptos de límite, continuidad, derivada y diferencial son mejor comprendidos y no se presenta la dificultad de que olvidaron los conocimientos de funciones de una variable.

Contrario a lo que pudiera pensarse que esta presentación al inicio de los cursos de Cálculo es muy difícil, está la experiencia en Ciencias Biológicas de la Universidad de la Habana. Durante la década de los 90 se trabajó en los cursos de Cálculo en dicha Facultad con un proyecto de Investigación para activar el aprendizaje Roldan R&Cribeiro J. [14], [15], [16], basado en una restructuración del plan de estudio y los programas de las asignaturas de Cálculo. Alvarez V. [1] donde se trabaja con Cálculo Diferencial para una y varias variables simultáneamente. Los resultados obtenidos en las investigaciones realizadas en la década de los 90 fue tan satisfactoria que se mantienen hasta la fecha actual, los programas de estudio propuestos.

## 11. Bibliografía

[1] Alvarez V. (1992) *Propuesta de Estructuracion del Curso de Matemática para las carreras de Biologia* Tesis doctoral no publicada. Habana Cuba

[2] Briedenbach, D. E., Dubinsky, E. Hawks, J. & Nichols, D. (1992). *Development of the process conception of function.* Educational Studies in Mathematics 23, 247-285

[3] Clement L. (2001). *What do studentes really know about functions?* the National Council of teachers of Mathematics. Vol 94. No9. P.745-748

[4] Cribeiro, J. (2000) *Cambio en la historia del aprendizaje de las matemáticas en el Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de la Región Carbonífera*. IV Seminario Nacional de Investigación en Didáctica de las Matemáticas. CIMATE Universidad Autónoma de Guerrero., CLAME. México

[5] Cribeiro, J. (2001) *Interrelación entre calidad educativa, investigación y las nuevas tecnologías de la información* 3er Foro estatal de Ciencia y Tecnología. COECYT

[6] Cribeiro J; Madrid H; Hernández A (2012) *Función: un concepto trascendental en el aprendizaje del Cálculo*. 1er Congreso Internacional de Investigación UAdeC-NAHLS. Coahuila. México

[7] Cuevas C.A.; Moreno S. ; Pluvinage F. (2005). *Una experiencia del concepto de función*. Annalesde didactique et sciences cognitivies Vol 10 p. 177-208. IREM de Strasbourg.

[8] Dubinsky, E. & Harel, G.: (1992). The Nature of the Process Conception of Function. En G. Harel y E. Dubinsky (eds.). *The Concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy.* Mathematical Association of America. Notes Series, Vol. 25, pág. 85-106.

[9] Hitt E, F. (1996). *Sistemas semióticos de representación del concepto de función y su relación con problemas epistemológicos y didácticos*. México: Ed. Iberoamérica.

[10] Hitt, F. (1998). *Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of function*. *Journal of Mathematical Behavior*, *17*(1), 123-134.

[11] Hitt E, F. (2002). *Funciones en contexto*. México: Printice – Hall.

[12] Kleiner, I., (1989). *Evolution of the Function Concept: A brief survey.* The college Mathematics Journal, 20(4), 282-300.

[13] Lambertus A.J. (2007) *Students´ Understanding of the Function Concept: Concept Images and Concept Definitions* Tesis Master of Science. North Carolina. USA

[14] Roldán R; Cribeiro J. (1995) *Sobre la activación de la enseñanza en especialidades de las Ciencias Naturales* Facultad de Matemáticas y Computación. Universidad de la Habana. Cuba.

[15] Roldán.R; Cribeiro J. (1995) *La evaluación dinámica y continua como elemento rector en la activación de la enseñanza de las Matemáticas*. Facultad de Matemáticas y Computación. Universidad de la Habana. Cuba.

[16] Roldán R; Cribeiro J. (1997) *Las Matemáticas en la Facultad de Biología de la Universidad de la Habana. Aprendizaje Vivencial versus Enseñanza Tradicional*.Facultad de Matemáticas y Computación. Universidad de la Habana. Cuba

[17] Sierpinska, A. (1992). *On understanding the notion of function. The Concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*. Mathematical Association of America. Notes Series, Vol. 25, pág. 23-58.

[18] Tall, D., & Bakar, M. (1992). Students' mental prototypes for functions and graphs. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 23*(1), 39-50.

[19] Vinner, S. & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(4), 356-366.

[20] Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image, and the notion of function. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology, 14*(3), 293-305.

[21] Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D.Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65-81). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.