Análisis de la comprensión de la derivada desde el enfoque gráfico en estudiantes de nivel superior

Eduardo Carlos Briceño Solís; Judith Hernández Sánchez; Angélica Espino Silva
ecbs74@gmail.com; judith700@hotmail.com; angelicaespino.s05@gmail.com
Universidad Autónoma de Zacatecas
México

Resumen. Se reporta el análisis sobre la comprensión de la derivada desde un enfoque gráfico en estudiantes de nivel superior. El propósito es indagar sobre cómo los estudiantes interpretan lo gráfico y analítico de este concepto. Nuestra revisión sustenta que el problema de estas interpretaciones radica por la centración en fórmulas y técnicas de derivación sin relacionarlas con su aspecto visual. Para ello se adaptó un cuestionario de actividades para identificar en nuestra institución cómo el estudiante comprende gráficamente la derivada. El resultado muestra que los estudiantes tienen dificultades en la interpretación y comprensión desde un enfoque gráfico; además, la existencia de un error que se repite a lo reportado en nuestra revisión a pesar de ser de diferentes contextos académicos.

Palabras clave: aspecto gráfico, aspecto analítico, derivada, dificultades

ABSTRACT. The analysis of the understanding of the derivative is reported from a graphic approach in higher level students. The purpose is to investigate how students interpret the graphic and analytical aspects of this concept. Our review supports that the problem of these interpretations lies in the focus on formulas and derivation techniques without relating them to their visual aspect. To this end, an activity questionnaire was adapted to identify in our institution how the student graphically understands the derivative. The result shows that students have difficulties in interpretation and comprehension from a graphic approach; in addition, the existence of an error that is repeated to the one reported in our review despite being from different academic contexts.

Keywords: graphic aspect, analytical aspect, derivative, difficulties

1. Introducción

El concepto de derivada es importante para los cursos del nivel superior como ecuaciones diferenciales, variable compleja, física o estadística; donde el aspecto visual es un apoyo para su comprensión. Sin embargo investigaciones sostienen que en la enseñanza de la derivada se le da un mayor énfasis al tratamiento algorítmico, empleando de forma memorística las reglas de derivación, dejando de lado su comprensión mediante otras representaciones (Artigue, 1995; Dolores, 2000; Sánchez, García y Llinares, 2008 y Ramos, Briceño, y Zaldivar (2014)). Esta manera de abordar la derivada puede causar algunos conflictos como se menciona en Artigue (1995):

> Numerosas investigaciones realizadas muestran, con convergencias sorprendentes, que si bien se puede enseñar a los estudiantes a realizar de forma más o menos mecánica algunos cálculos de derivadas y primitivas y a resolver algunos problemas estándar, se encuentran grandes dificultades para hacerlos entrar en verdad en el campo del cálculo y para hacerlos alcanzar una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos de pensamiento que son el centro de este campo de las matemáticas. (p. 97).

Así, los estudiantes pueden resolver ejercicios donde se les pida derivar o integrar, pero estas operaciones carecen de significado para ellos. Es decir, los estudiantes presentan dificultades al usar las interpretaciones de la noción de derivada; a través de su expresión analítica o geométrica, como límite del cociente incremental o como pendiente de la recta tangente, respectivamente (Artigue, 1995). Por lo que no es suficiente para su comprensión, el hecho de saber operar la derivada algebraicamente, sugiriendo complementar su enseñanza mediante su representación geométrica.

Por otra parte Zandieh (2000), considera teóricamente dos componentes principales en el concepto de derivada:

1- Representaciones múltiples y contextos asociados al concepto de derivada:

- Gráficamente, como la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto.
- Verbalmente, como la taza instantánea de cambio.
- Físicamente, como la velocidad o rapidez.
- Simbólicamente como el límite del cociente diferencial.

2. Capas de pares proceso-objeto. Si se considera la definición simbólico formal de la derivada como $f^{\prime}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ se observa que la derivada de $f, f^{\prime}$, es una función cuyo valor en un punto está definida como el límite de una razón (función, límite, razón), los cuales se pueden ver desde un punto dinámico y otro estático.

Este autor sugiere que un estudiante no tiene una compresión completa sobre el concepto derivada, si no puede reconocer y construir cada uno de los tres procesos (razón, límite y función) involucrados en algún contexto relevante. Luego, para lograr una mejor comprensión de la derivada se propone abordarla desde diferentes significados, representaciones y contextos. Pero, cómo se enseña generalmente la derivada y cuáles son los enfoques utilizados por los profesores. A continuación se habla al respecto.

En Desfitri (2016), se analiza la comprensión de la derivada en veinte profesores y cómo éstos la enseñan a sus alumnos. En la tabla 1 se presentan las respuestas sobre la enseñanza de la derivada y el límite así como los enfoques que los profesores consideran para la misma. Estos enfoques se basan en gran parte en los libros de texto, por lo que se introduce la derivada utilizando el concepto de límite.

Introduciendo límite	**Introduciendo Derivada**
Por definición de límite	Empieza de nuevo con puntos límite
Por definición de límite y algunos ejemplos	Introduce la tasa de cambio
Pregunta a los estudiantes que midan un objeto hasta que tenga un tamaño más pequeño	Usa la gráfica
Proporciona a los alumnos un número que luego se aproxima de izquierda a derecha	Explicar la definición de derivada
Al usar oraciones con una palabra “casi, cerca, cerca de”	Dar ejemplos de la vida cotidiana
Usando la recta numérica	Motivar a los estudiantes con el objetivo y la ventaja de aprender derivadas

Tabla 1. Enfoques utilizados por los profesores al introducir el concepto de límite y derivada

(Fuente: Desfitri 2016, pp. 6-7)

Las aplicaciones de la derivada utilizados por los profesores se presentan en la tabla 2. Aunque la tabla muestra que la aplicación más utilizada por los profesores para el concepto de derivada es en la física (velocidad y aceleración), en la entrevista, responden que tiene serios problemas para explicar a sus estudiantes su aplicación.

Tópico	**Respuestas**
Distancia, velocidad, aceleración	20
Altura máxima de la bola arrojadiza	3
Cálculo del punto marginal	3
Cálculo de la tasa de crecimiento	7
Especificar gradiente y línea tangente	4
Plazo y tiempo límite para que los estudiantes terminen la tarea	1
Volumen de esfera	1

Tabla 2. Aplicación de la derivada que generalmente enseñan a los estudiantes

(Fuente: Desfitri 2016, p. 8)

Así, el 50% de los profesores presentan problemas para la significación del concepto de derivada, dando las mismas explicaciones y presentando dificultades al momento de llevar acabo su aplicación. Esto podría complementarse utilizando otras formas de interpretar a la derivada, una de ellas es mediante su representación gráfica a la que dedicamos la siguiente sección. Sin embargo, Park (2015) menciona que una forma de enseñar la derivada de una función es por medio del análisis del comportamiento gráfico relacionándolo en cada momento, con su notación simbólica.

2. El aspecto visual de la derivada

El aspecto visual de la derivada, como recurso de apoyo, es un factor que influye en la comprensión de conceptos matemáticos. Al respecto Vrancken y Engler (2013) reportan que la visualización, en cierto tiempo, era primordial para algunos matemáticos; ya que constituía una herramienta común de su actividad matemática. Uno de ellos fue Fermat en sus isoperimétricos de máximos y mínimos propone un segmento donde el punto que lo divide en dos partes su producto es el máximo (Aguilar y Riestra 2009).

Sin embargo, para el siglo XVIII se comienza a desconfiar de la intuición y de lo visual; perdiendo el carácter geométrico a favor de lo aritmético y lo algebraico. Para mediados del siglo XIX los matemáticos empiezan a trabajar de una manera más rigurosa la fundamentación del cálculo; causando que la estructura de los libros de texto en todos los niveles de la enseñanza sea más analítica, dejando de lado la intuición y lo visual.

Esta postura ha sido criticada, ejemplo de ello es lo expuesto en Monge (2013) donde para comprender el concepto de derivada, se debe tomar en cuenta la perspectiva analítica y gráfica para un análisis global y local de la misma. Aquí la visualización es una herramienta importante, considerando el uso de gráficos, diagramas o formas geométricas para una mejor apreciación del concepto matemático que se quiere aprender. En este caso la visualización se convierte en un lenguaje de seguridad para que el estudiante pueda transmitir un resultado matemático. Es decir, "el lenguaje visual, como todos los lenguajes no verbales, es particularmente apto para la transferencia de emociones, sensaciones, afectos que a menudo las palabras no logran expresar con la misma precisión" (Lazotti 1983, Tomado de Monge, 2013, p. 6745).

Otro autor que considera importante la visualización en la enseñanza de la derivada es López (2008), pues asegura que facilita su comprensión y permite ampliar el significado del concepto. Para dar evidencia de esto, realizó un estudio aplicando un examen diagnóstico a 190 alumnos de sexto semestre que ya habían cursado la asignatura de cálculo diferencial. Lo resultados fueron preocupantes dado que se obtuvo un nivel de 0.07 en una escala del 0 al 10. Por lo tanto, diseñó y aplicó una secuencia didáctica donde se potencia la visualización del concepto de derivada. El promedio aumento hasta 5.4 marcando una diferencia significativa con los resultados iniciales. Además, señala que los estudiantes lograron reflexionar sobre el concepto de derivada con el apoyo de la interpretación geométrica y las relaciones entre pendiente, línea recta, tangente y secante.

Por otra parte Schivo, Sgreccia y Caligaris (2014), abordan el concepto de derivada con el uso de la tecnología aprovechando sus ventajas dinámicas y visuales.

Lo anterior permite manipular la gráfica de f(x) para observar los cambios que ocurren en un intervalo al tomar distintos puntos x_o, mostrando la recta tangente y la primera derivada en ese punto. Además, se van marcando los intervalos donde la derivada es positiva, negativa o nula (ver figura 1).

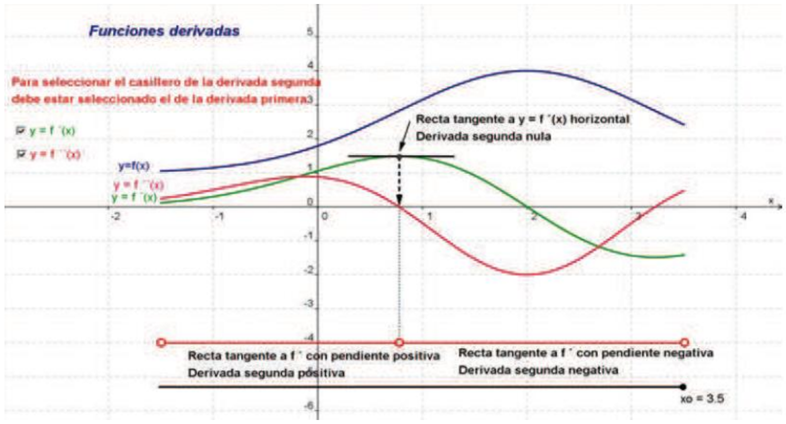


Figura 1. Representación gráfica de la derivada con uso de tecnología

(Fuente, Schivo et al., 2014, p. 2080)

Otro estudio donde se trabaja con la gráfica de la derivada es en Dolores, Chi, Canul, Cantú y Pastor (2009). En esta investigación analizaron las representaciones gráficas que hacen los estudiantes sobre la rapidez de la variación, considerando que las gráficas, son elementos importantes para la escuela y para la vida cotidiana. Aquí se reporta que los estudiantes no son capaces de representar la rapidez utilizando la noción de pendiente, a pesar de haber estudiado el tema tanto en física como en matemáticas. Además, los estudiantes confunden la secante con la tangente, es decir no consideran una sucesión de secantes que tiende hacia la tangente en un punto. Lo anterior obstaculiza el desarrollo de conceptos matemáticos relacionados con la variación. Luego, “una de las dificultades en la formación del concepto de derivada por la vía geométrica es la concepción griega de tangente formada en los estudiantes desde la escuela elemental” (Cantoral 1983, citado en Dolores C, 2000, p. 4).

Esto es confirmado por Orton (1977) y Sierpinska (1985) que afirman que, existen evidencias empíricas que muestran la grandes dificultades de los estudiantes en entender que del límite de una familia de secantes proviene la pendiente de la recta tangente (Tomado de Dolores, 2000).

Otro ejemplo se reporta en Cantoral y Farfán (1998) citado en Caballero (2012), donde menciona que los profesores dada una gráfica, saben argumentar sobre el significado gráfico de la primera y segunda derivada (pendiente, concavidad, curva creciente), pero que desconocen el significado de la tercera derivada (Figura 2).

Esto se refleja también en estudiantes donde dada la gráfica de f(x), se deben marcar sobre ella la porción en la que se cumpla solo uno de los siguientes tres incisos:

1. *f(x)>0,*
2. *f ’(x) > 0,*
3. *f ’’(x) > 0,*

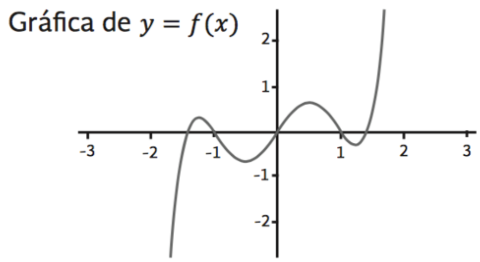


Figura 2. Gráfica de f(x) para argumentar derivadas sucesivas (Fuente Caballero 2012 p. 17)

Sin problema, los estudiantes responden al significado gráfico, pero ninguno pudo responder el último inciso $f^{(3)}(x)$. Esto refleja un discurso carente de argumentos sobre la derivada en su forma gráfica.

Con la revisión de estas investigaciones rescatamos que el aspecto visual de la derivada no es explotado como herramienta de apoyo en la enseñanza de la derivada, dándole preferencia al uso de fórmulas de derivación mediante procedimientos algorítmicos. Esto ha provocado que los estudiantes tengan dificultad para entender a la derivada en su representación gráfica y geométrica como la pendiente de la recta tangente. Sumado a la dificultad de algunas aplicaciones, como la rapidez en física, donde la parte visual es fundamental. En esta investigación nos centramos en explorar la forma en la que es interpretado lo gráfico de la derivada en el terreno de la educación matemática. Es en ese sentido el estudio de corte institucional en estudiantes de una licenciatura en matemáticas de nuestra institución.

3. Contexto de aplicación

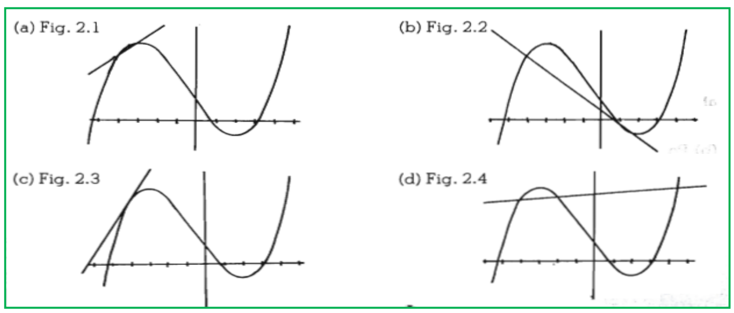
Para la aplicación de las actividades se contó con la participación de estudiantes del segundo semestre de la Licenciatura en Matemáticas de la Unidad Académica de Matemáticas (UAM) de la Universidad Autónoma de Zacatecas (UAZ). El total del grupo fue de 11 estudiantes (seis mujeres y cinco hombres), todos dijeron haber tomado el curso de cálculo diferencial en preparatoria. La profesora encargada del curso de cálculo hizo mención de que apenas estaban viendo el tema de derivada. Lo que en nuestra opinión nos permitió indagar sobre los conocimientos previos de los estudiantes sobre el concepto de derivada.

4. Aplicación del cuestionario diagnostico

El cuestionario de tipo exploratorio al tema de la derivada desde un enfoque Geométrico-variacional, ocupó una sesión de 1 hora, en la cual 10 minutos se destinaron para presentación y explicación de la actividad y el resto para resolver el cuestionario. El propósito es identificar las ideas, pensamientos y conceptos que tienen los estudiantes sobre la derivada desde su enfoque geométrico- variacional y así, percibir situaciones en las que se reflejen las dificultades, nociones, estrategias y procedimientos que emplean los estudiantes al resolver y dar respuesta a las seis actividades. Las primeras cuatro tienen el objetivo de que los alumnos se familiaricen con la derivada. Además se aprovechó para rescatar qué saben y/o han comprendido conceptos relacionados con la derivada desde un aspecto visual; algunos de estos conceptos son: secante, pendiente y tangente. En las otras dos actividades restantes se pretende que el alumno al resolverlas puedan comparar o apoyarse en sus respuestas de las actividades anteriores. Las actividades son tomadas de Balderas (1993), Dolores et al. (2000) y Engler, et al. (2008), este último citado en Cantoral y Caballero (2013). Algunas de las preguntas que complementaron la secuencia fueron realizadas por nosotros con el propósito de encuadrarlas con las expectativas de este trabajo

A continuación se presenta el cuestionario con sus respectivas actividades:

Actividad 1*. Elige de las figuras la que corresponda a la secante trazada por los puntos P [-4, f (-4)] y Q (-4+1, f (-4+1)]*. (Fuente: Balderas, 1993, p.127)



¿Qué aspectos consideraste para poder decidirte por una de las cuatro figuras?

Con esta actividad se quiere indagar qué saben o que noción tienen los estudiantes sobre la secante de una curva. Tomando las consideraciones de Dolores (2000), Engler y Vrancken (2013) y López (2008) sobre la confusión entre la secante con la tangente.

Actividad 2. *La pendiente de la recta secante que pasa por los puntos P [-4, f (-4)] y Q [-3, f (-3)] de la figura 1 es*:

$a)\ \frac{f(-3)}{f(-4)}$ b) $\frac{f(-3)-f(-4)}{-3-(-4)}$ c) $\frac{-3-(-4)}{f(-3)-f(-4)}$ d) Ninguna de las anteriores

¿Qué entiendes por pendiente? Graficar la pendiente. (Fuente: Balderas, 1993, p.127)

Con esta actividad se quiere indagar cómo obtienen y representan a la pendiente por medio de la gráfica.

Actividad 3. *La expresión que permite calcular la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto P [-4, f (-4)] es* (Fuente: Balderas, 1993, p.128):

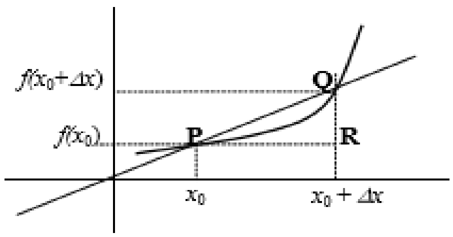
a) $\frac{f(x)-f(-4)}{x-4}$ *b)* $\lim_{h\to\infty}\frac{f(-4+h)-f(-4)}{h}$ *c)* $\lim_{h\to\infty}\frac{f(-4+h)}{h}$ *d) Ninguna de las anteriores*

¿Por qué elegiste esa opción? ¿Qué entiendes por tangente?

Actividad 4*.El dibujo que aparece a continuación se utiliza para representar la derivada de una función en un punto y se define como* (Fuente: Dolores, 2000, p.18)*:*

$$\lim_{\Lambda x \to \infty} \frac{f(x_0+\Delta x)\ \text{-}f(x_0)}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} \quad \text{donde } y = f(x)$$

En qué punto del gráfico se da la derivada de la función:



a) en P
b) en Q
c) en P y Q
d) en R

A continuación responde las siguientes preguntas:

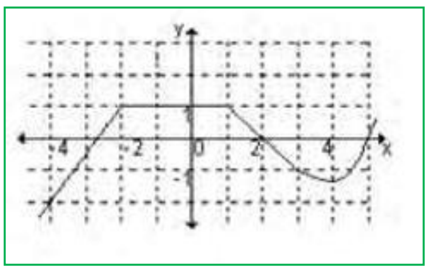
Escribe que estrategias utilizaste para elegir la respuesta.

¿Qué es lo primero que se te viene a la mente cuando escuchas el término de derivada?

Las actividades 3 y 4 pretenden que el alumno reflexione sobre la definición de la derivada desde el enfoque geométrico, además de retomar las actividad 1 y 2 para hacer sus comparaciones entre los conceptos, secante, pendiente y tangente.

Actividad 5. *La gráfica muestra el comportamiento de la función $y = f(x)$. Analice la gráfica y conteste* (Fuente: Engler et al., 2008; citado en Cantoral y Caballero, 2013)

:



¿Cuánto cambia f(x) si x cambia de -4 a -2?

¿Cuánto cambia f(x) si x cambia de 2 a 3?

¿Cuánto cambia f(x) si x cambia de -1 a 1?

Si x cambia de izquierda a derecha, para qué valores de x, se cumplen las desigualdades siguientes?

$f(x+\Delta x)\text{-}f(x) > 0;\ f(x+\Delta x)\text{-}f(x) < 0;\ f(x+\Delta x)\text{-}f(x) = 0$

Esta actividad contiene un enfoque gráfico-variacional, pues en la actividad se muestra la gráfica de una función en la cual se quiere indagar si el estudiante detecta los cambios que se producen al pasar de un punto a otro y sobre el comportamiento en algunos intervalos específicos.

Actividad 6. *Una partícula se mueve en línea recta de acuerdo con la ley $s(t) = 2t^3 - 8\,t^2 + 6t$, donde s es la distancia en metros y t el tiempo en segundos. Complete la siguiente tabla y en una gráfica representa los resultados obtenidos en la tabla* (Fuente: Engler et al., 2008; citado en Cantoral y Caballero, 2013).

Intervalos	Comportamiento de la función				
	Crece	Decrece	No cambia	Signo de s(t)	Signo de s'(t)
$0 \leq t \leq 0.5$					
$0.5 < t \leq 1$					
$1 < t \leq 1.5$					
$1.5 < t \leq 2$					

¿Qué relación existe entre el crecimiento o decrecimiento de s (t) y los cambios Δs*?*

¿Es cierto que si $s(t) > 0$ *entonces los cambios* $\triangle s > 0$ *? Justifique.*

¿Es cierto que si $s(t)$ *crece entonces* $\triangle s > 0$ *o que si* $\triangle s < 0$ *entonces* $s(t)$ *decrece? Justifique.*

En esta actividad se pretende que con la tabla, el alumno grafique los resultados obtenidos donde analice los datos sobre el comportamiento de la función en distintos intervalos. Es decir, pueda establecer relaciones entre las variables, como: si la función es creciente; si las diferencias son positivas, los cambios entre las diferencias, la función y su derivada.

5. Resultados del cuestionario

Se destacan los resultados obtenidos de las primeras cuatro actividades, ya que dichas actividades reflejan de manera cuantitativa indicios de qué tanto los estudiantes están familiarizados con la derivada desde un aspecto gráfico; es decir, qué tanto relacionan la derivada con conceptos tales como secante, pendiente y tangente. En la figura 3 se muestra el número de respuestas correctas e incorrectas por actividad. Notando que el número de respuestas incorrectas en la actividad 4 es más alto que en las otras actividades.

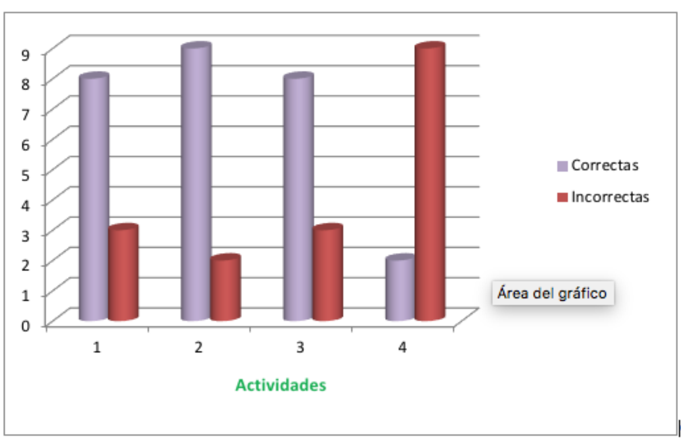


Figura 3. Respuestas correctas e incorrectas de las primeras cuatro actividades.

En la tabla 3 se presenta la frecuencia de las respuestas obtenidas para cada actividad. Nos interesa conocer la opción elegida pues cada uno de los incisos está ligado a errores o concepciones erróneas sobre la derivada. Las primeras tres actividades no resultaron conflictivas para la gran mayoría de los estudiantes. Esto podría reflejar cierto dominio sobre los conceptos de secante, pendiente y tangente; sin embargo los argumentos utilizados guardan algunas contradicciones, más adelante se presenta el análisis de los mismos. Por el momento nos centramos en las respuestas de la actividad 4, dada la frecuencia de respuestas incorrectas y su concordancia con dificultades presentadas en la sección 2.

Actividad	**Respuesta correcta**	**Correctas**	**Incorrectas**	**a)**	**b)**	**c)**	**d)**	**No contesto**
1	a)	8	3	8	1	1	1	0
2	b)	9	2	1	9	0	1	0
3	b)	8	3	2	8	0	1	0
4	a)	2	9	2	0	7	1	1

Tabla 3. Análisis cuantitativo de las primeras cuatro actividades

En la actividad 4, más del 80% de los estudiantes eligen como respuesta incorrecta el inciso *c*. En él se propone que la derivada está en los puntos P y Q. Aquí se confirma que al igual que en Dolores et al. (2009), los estudiantes confunden el concepto de tangente y secante. Aquí conviene hacer una reflexión al respecto, en la actividad 1 se establece el conocimiento de la noción de tangente desde un enfoque gráfico y en las actividades 2 y 3 desde un enfoque analítico. Sin embargo, al momento de relacionar estas dos representaciones en la actividad 4, los estudiantes eligen el aspecto analítico sobre el gráfico, en donde para calcular la pendiente se requiere de dos puntos. A nuestro parecer, el concepto de límite en la expresión que define la derivada no juega un rol que influya en la respuesta, y más cuando ahí se expresa que $\Delta x \to 0$.

A continuación se presenta el análisis cualitativo de las respuestas y justificaciones de los estudiantes a las seis actividades propuestas. Estas respuestas brindan mayor información sobre las nociones de los estudiantes sobre la derivada y conceptos relacionados.

Para la actividad 1 aunque la mayoría de los estudiantes respondió correctamente, se les pidió que argumentaran su elección. La mayoría de los estudiantes usan la definición de secante como recta que corta en dos puntos a la gráfica de la curva (ver figura 4). Uno de los estudiantes la confunde con la recta tangente y la define como aquella que toca a la curva en un punto (ver figura 5)

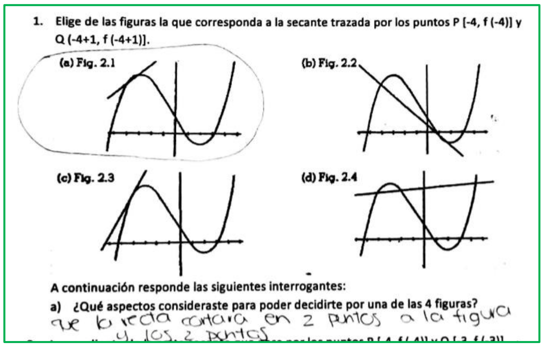


Figura 4. Argumentación de estudiante en su respuesta correcta

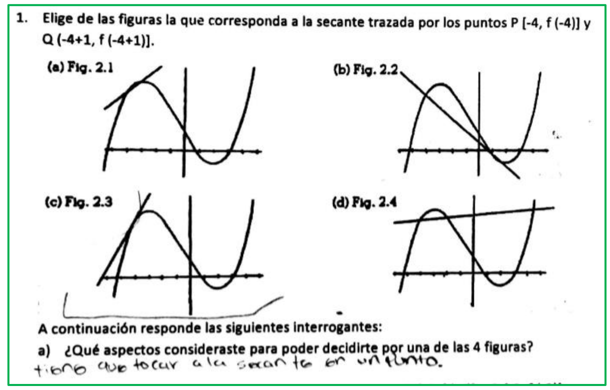


Figura 5. Argumentación de estudiantes en su respuesta incorrecta

Respecto a la actividad 2, dos estudiantes contestaron de forma incorrecta. Uno de ellos entiende la pendiente como la recta tangente a un punto de la curva (ver figura 6). Por tal motivo determina que ninguna de las expresiones corresponde a la pendiente, esto tiene sentido pues ninguna de las expresiones tiene la forma de una recta. Otro estudiante opta por el inciso a), aunque la respuesta es incorrecta la noción de pendiente parece correcta. Sin embargo, la gráfica dibujada en la figura 7, evidencia que existe cierta desarticulación en lo que el asume como representación gráfica de la pendiente y su representación simbólica, interpretando el triángulo como una división entre dos longitudes de segmento, es por ello que elige el inciso a).

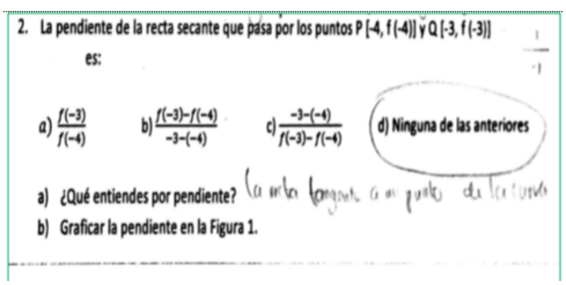


Figura 6. Respuesta errónea a la Actividad 2, caso 1

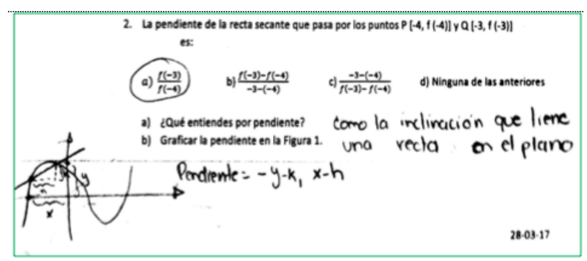
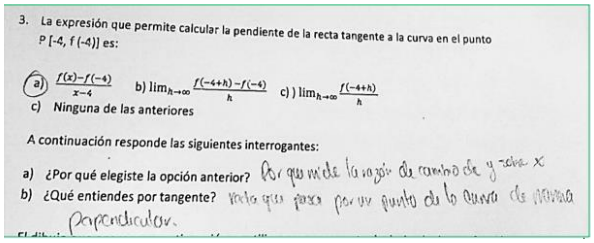


Figura 7. Respuesta errónea a la Actividad 2, caso 2

Para la actividad 3, el 27% de los estudiantes contestaron incorrectamente. Mostramos las respuestas de los 3 estudiantes y explicamos una posible interpretación de las mismas. El primer estudiante (figura 8) tiene la noción de razón promedio de cambio, en donde el límite no parece tener sentido para él. De esta manera el estudiante se queda solo con el concepto de pendiente como una razón de cambio y no busca la relación, a través del límite, con pendiente de la recta tangente, de manera que tiene una noción de lo que es la derivada, desde su aspecto geométrico.



3. La expresión que permite calcular la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto P [-4, f (-4)] es:

a) $\frac{f(x)-f(-4)}{x-4}$ b) $\lim_{h\to\infty}\frac{f(-4+h)-f(-4)}{h}$ c)) $\lim_{h\to\infty}\frac{f(-4+h)}{h}$

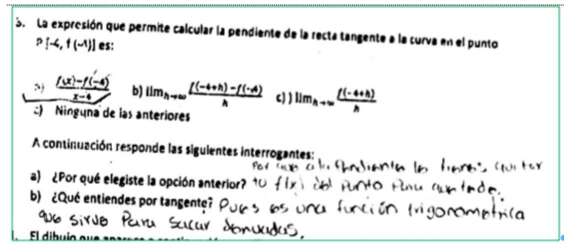
c) Ninguna de las anteriores

A continuación responde las siguientes interrogantes:

a) ¿Por qué elegiste la opción anterior? Por que mide la razón de cambio de y sobre x

b) ¿Qué entiendes por tangente? Recta que pasa por un punto de la curva de manera perpendicular.

Figura 8. Respuesta errónea a la Actividad 2, caso 1



3. La expresión que permite calcular la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto P [-4, f (-4)] es:

a) $\frac{f(x)-f(-4)}{x-4}$ b) $\lim_{h\to\infty}\frac{f(-4+h)-f(-4)}{h}$ c)) $\lim_{h\to\infty}\frac{f(-4+h)}{h}$

c) Ninguna de las anteriores

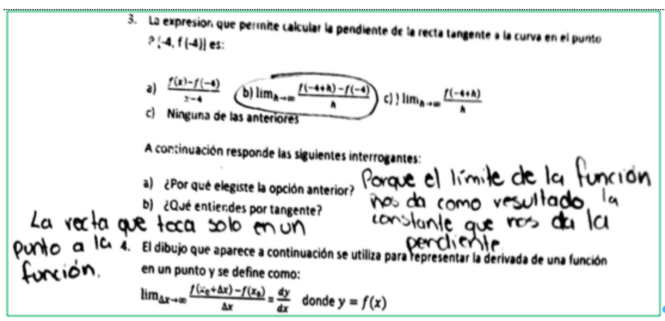
A continuación responde las siguientes interrogantes:

a) ¿Por qué elegiste la opción anterior?

b) ¿Qué entiendes por tangente? Pues es una función trigonometrica que sirve para sacar derivadas.

Figura 9. Respuesta errónea a la Actividad 2, caso 2

También se observó que aunque los estudiantes respondieron correctamente la actividad 3, siguen teniendo una noción errónea de lo que es la recta tangente (figura 8, 9 y 10). En su gran mayoría, los estudiantes asocian a la definición de tangente una recta que toca o corta en un punto a la gráfica de la función. O bien como el estudiante de la figura 10 que lo asocia a la definición de tangente de un círculo en geometría. Estas dificultades asociadas a nociones incorrectas de la recta tangente son claramente explicadas en Tall (2013).



3. La expresión que permite calcular la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto P [-4, f (-4)] es:

a) $\frac{f(x)-f(-4)}{x-4}$ b) $\lim_{h\to\infty}\frac{f(-4+h)-f(-4)}{h}$ c)) $\lim_{h\to\infty}\frac{f(-4+h)}{h}$

c) Ninguna de las anteriores

A continuación responde las siguientes interrogantes:

a) ¿Por qué elegiste la opción anterior? Porque el límite de la función nos da como resultado la constante que nos da la pendiente

b) ¿Qué entiendes por tangente? La recta que toca solo en un punto a la función.

4. El dibujo que aparece a continuación se utiliza para representar la derivada de una función en un punto y se define como:

$\lim_{\Delta x\to\infty}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}$ donde $y=f(x)$

Figura 10. Respuesta correcta de un estudiante

En las actividades anteriores propusimos la definición de la derivada representada simbólicamente. En la actividad 4 se propone su representación en forma gráfica, para evidenciar si los estudiantes la identifican correctamente y los argumentos que utilizan para lograrlo. Aquí se observa que la derivada como resultado de un proceso límite no es comprendido por completo a partir de su representación gráfica. Los estudiantes no se dan cuenta de que la justificación que dan se contradice con el inciso que eligieron (ver figura 11 y 12). En su mayoría eligieron la opción *c* para explicar que para ellos la derivada es la pendiente en dos puntos, pero su argumentación para elegir esa respuesta fue porque la recta toca en un punto a la gráfica y aunque escribe la fórmula de límite, no se relaciona con su representación como recta tangente en x_0, es decir, en P.

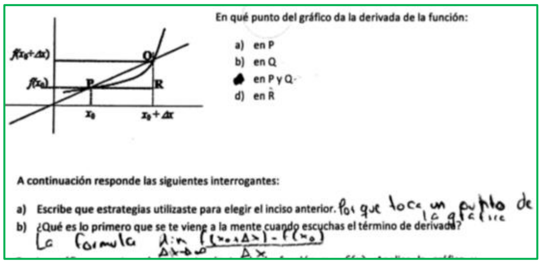


Figura 11. Respuesta errónea a la Actividad 4, caso 1

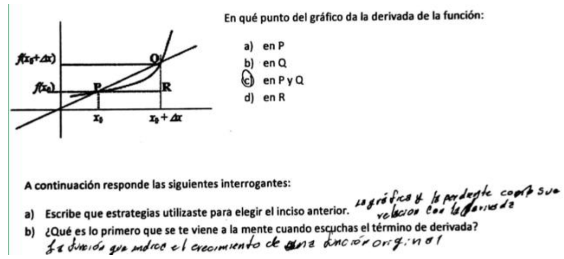


Figura 12. Respuesta errónea a la Actividad 4, caso 2

Los resultados de la actividad 4 de cierta forma coinciden con lo reportado en Dolores et al. (2000), en ambos estudios se encuentra que la mayoría de los estudiantes consideran que la derivada está dada en dos puntos y no en uno solo.

Respecto a la actividad 5, los estudiantes muestran conocimientos sobre el comportamiento de la función, es decir, dónde f(x) crece o decrece, sin embargo, no cuantifican los cambios que ocurren en la función cuando x cambia de un punto a otro. Además sus respuestas en cuanto al comportamiento no son del todo correctas (ver figura 13 y 14), lo que consideramos ocasiona que en el inciso d) sus respuestas tampoco sean correctas.

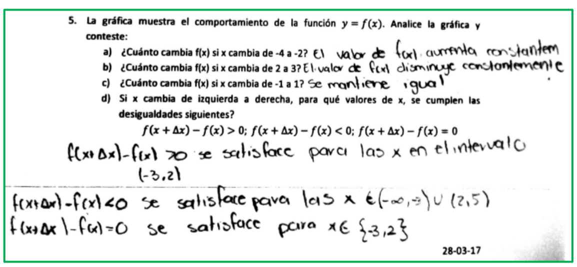


Figura 13. Respuesta errónea a la Actividad 5, caso 1

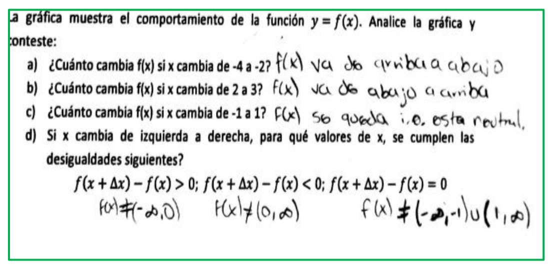
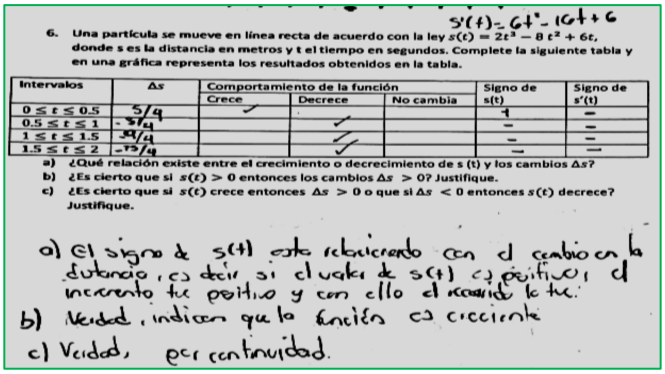


Figura 14. Respuesta errónea a la Actividad 5, caso 2

Podemos notar que uno de los estudiantes solo emplea conocimiento sobre desigualdades, otros interpretan si la función es creciente o decreciente basándose solo en los ejes (arriba del eje x creciente, debajo del eje x decreciente, en los puntos donde intersecta el eje x el incremento es cero, de igual forma respecto al eje y). En general, la mayoría de los estudiantes dio respuesta al inciso d) tomando como referencia los ejes y solo dos de forma correcta en toda la actividad. En general se puede decir, que no se tiene mucho dominio sobre el comportamiento de funciones en puntos específicos, y tampoco tomándolos como intervalos, además de las grandes confusiones respecto a dónde la función es creciente, decreciente o constante.

Respecto a la última actividad 7 de los 11 estudiantes contestaron correctamente; sin embargo, en la tabla que presenta esta actividad en el llenado respecto a qué signo tiene s(t) y que signo tiene s'(t) notamos que algunos de los estudiantes relacionan el comportamiento de la función con el signo de s(t) mientras que otros si lo relacionan con el signo de la derivada como el caso de la figura 15, donde consideran que si $s(t) > 0 \; entonces \; s'(t) > 0$ el cual no es generalizable.



$s'(t) = 6t^2 - 16t + 6$

6. Una partícula se mueve en línea recta de acuerdo con la ley $s(t) = 2t^3 - 8t^2 + 6t$, donde s es la distancia en metros y t el tiempo en segundos. Complete la siguiente tabla y en una gráfica representa los resultados obtenidos en la tabla.

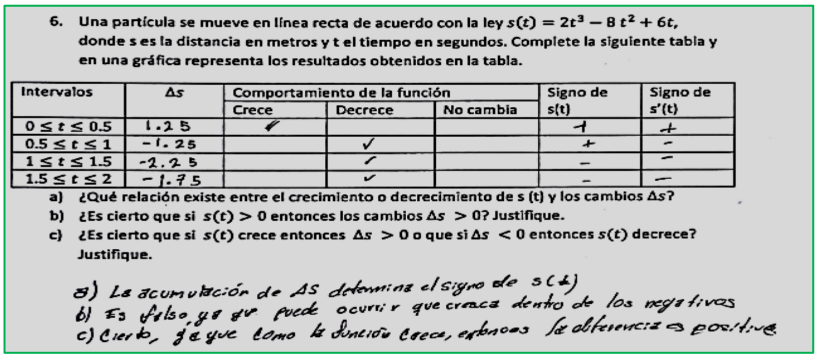
Intervalos	Δs	Comportamiento de la función			Signo de s(t)	Signo de s'(t)
		Crece	Decrece	No cambia		
$0 \leq t \leq 0.5$	5/4	✓			+	−
$0.5 \leq t \leq 1$	-5/4		✓		−	−
$1 \leq t \leq 1.5$	-9/4		✓		−	−
$1.5 \leq t \leq 2$	-7/4		✓		−	−

a) ¿Qué relación existe entre el crecimiento o decrecimiento de s (t) y los cambios Δs?
b) ¿Es cierto que si $s(t) > 0$ entonces los cambios $\Delta s > 0$? Justifique.
c) ¿Es cierto que si $s(t)$ crece entonces $\Delta s > 0$ o que si $\Delta s < 0$ entonces $s(t)$ decrece? Justifique.

a) El signo de s(t) esta relacionado con el cambio en la distancia, es decir si el valor de s(t) es positivo, el incremento fue positivo y con ello el recorrido lo fue.
b) Verdad, indican que la función es creciente
c) Verdad, por continuidad.

Figura 15. Respuesta errónea a la Actividad 6, caso 1.

Sin embargo hay casos donde el estudiante sí reconoce la relación entre $s(t)$ y $s^{\prime}(t)$ en su respuesta del inciso b, ya que pueden existir funciones crecientes donde $s(t) < 0$ y $s^{\prime}(t) > 0$ como se evidencia en la figura 16.



6. Una partícula se mueve en línea recta de acuerdo con la ley $s(t) = 2t^3 - 8t^2 + 6t$, donde s es la distancia en metros y t el tiempo en segundos. Complete la siguiente tabla y en una gráfica representa los resultados obtenidos en la tabla.

Intervalos	Δs	Comportamiento de la función			Signo de s(t)	Signo de s'(t)
		Crece	Decrece	No cambia		
$0 \leq t \leq 0.5$	1.25	✓			+	+
$0.5 \leq t \leq 1$	-1.25		✓		+	−
$1 \leq t \leq 1.5$	-2.25		✓		−	−
$1.5 \leq t \leq 2$	-1.75		✓		−	−

a) ¿Qué relación existe entre el crecimiento o decrecimiento de s (t) y los cambios Δs?
b) ¿Es cierto que si $s(t) > 0$ entonces los cambios $\Delta s > 0$? Justifique.
c) ¿Es cierto que si $s(t)$ crece entonces $\Delta s > 0$ o que si $\Delta s < 0$ entonces $s(t)$ decrece? Justifique.

a) La acumulación de ΔS determina el signo de s(t)
b) Es falso, ya que puede ocurrir que crezca dentro de los negativos
c) Cierto, ya que como la función crece, entonces la diferencia es positiva

Figura 16. Respuesta errónea a la Actividad 6, caso 2.

Existen otros casos que a pesar de que contestaron correctamente, no tienen claro de qué forma pueden obtener el comportamiento de una función. En particular consideramos que esta actividad fue la que ocasionó mayor dificultad en los estudiantes para resolverla, pues se presentan más errores en la solución. Se considera que la actividad 6 fue la más alejada al discurso matemático escolar tradicional. Por lo que se sugiere abordar más actividades de este tipo dentro del aula de tal forma que ayuden al estudiante a comprender la primera derivada y las derivadas n-ésimas tanto en su aspecto geométrico como analítico.

Finalmente los estudiantes muestran tener ciertos conocimientos sobre conceptos como: secante, pendiente, tangente y sobre la derivada en su representación analítica. Sin embargo, al presentar la derivada de manera gráfica solo muestran cierta memorización en la definición; es decir, como “la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto” sin saber lo qué significa. Además se presenta dificultad en localizar la derivada en un punto y deficiencia en relacionar el concepto de tangente con su representación gráfica de la derivada.

Otras dificultades identificadas son la relación del signo de la función y su derivada. Además de que los estudiantes identificaron algebraicamente cuando una función es creciente y decreciente, no así cuando se les presentó de manera gráfica. Estas dificultades presentadas sobre todo en los aspectos geométricos de la derivada nos confirman que en la enseñanza de la derivada se potencia el aspecto algebraico de la misma descuidando su interpretación geométrica.

6. Conclusiones

Los conocimientos previos en torno a la derivada evidenciados por estudiantes del segundo semestre de una licenciatura en matemáticas algunos coinciden con lo reportado en Dolores et al. (2009) y Tall (2013). Luego, se presentan los mismos errores y las mismas dificultades abordados en la sección 2. De esta manera los estudiantes potencian la interpretación algebraica y algorítmica de la derivada, donde el límite se presenta sólo de manera memorística, pero sin ningún sentido. Además, se confirma que la noción de tangente que prevalece en los estudiantes universitarios es la misma que es promovida en el nivel bachillerato. Es decir la que define a la tangente como la recta que toca en un solo punto a la función o bien aquella que se relaciona con la tangente a un círculo en geometría.

Los argumentos utilizados por los estudiantes evidencian una preferencia en la interpretación algebraica de la derivada menospreciando la geométrica y sin evidenciar en algunos casos, las contradicciones existentes entre sus respuestas y sus argumentos. De esta manera, los estudiantes relacionan a la derivada con lo algebraico, reglas de derivación y la fórmula del límite, pero donde queda ausente su representación gráfica.

Este trabajo evidencia las dificultades que presentan un grupo de estudiantes de recién ingreso al nivel superior. Algunos de los errores y dificultades presentados coinciden con la literatura, lo que confirma que la forma en la que se sigue abordando la derivada en el bachillerato promueve una noción incompleta o errónea de ésta. Lo anterior como resultado de potenciar lo algebraico y memorístico, sobre lo geométrico-variacional. Luego, ¿Por qué no implementar actividades que involucren un enfoque geométrico con gran potencial visual?, ¿Por qué no presentar más problemas que involucren fenómenos variacionales fuera del contexto de la Física? Al respecto el nuevo plan de estudios de este nivel educativo en México parece responder a esta problemática. Tendremos que esperar para ver de qué manera llega a las aulas de matemáticas.

7. Referencias

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática (un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.*, 97–140.

Aguilar M. y Riestra J. (2009). Una introducción algebraica y dinámica al concepto de derivada. *Revista el calculo y su enseñanza*,(1),1,pp.1-12

Balderas, P. (1993). Experiencias con el Uso de un Graficador en la Enseñanza del Cálculo en la Escuela Nacional Preparatoria. *Educación matemática*, (5),3, pp.125-142.

Caballero, M. (2012). *Un estudio de las dificultades en el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en profesores de bachillerato.*Tesis de maestría no publicada, Cinvestav, México

Caballero, M y Cantoral, R (2013). Una Caracterización De Los Elementos Del Pensamiento Y Lenguaje Variacional. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 26, 1197-1205.* México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Dolores, C. (2000). Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada. En R. Cantoral (Coord), *El futuro del cálculo infinitesimal*, 155-181. Recuperado el 28 de agosto de 2016 de http://cimate.uagro.mx/pub/Crisologo/ArticuloICME8.pdf

Dolores, C., Chi, A. G, Canul, E. R, Cantú, C. A y Pastor, C.G. (2009). De las descripciones verbales a las representaciones gráficas. El caso de la rapidez de la variación en la enseñanza de la matemática. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*. (5), 18, 41-57.

Desfitri, R. (2016). n-Service Teachers' Understanding on the Concept of Limits and Derivatives and the Way They Deliver the Concepts to Their High School Students. *Journal of Physics: Conference Series*, 693, pp. 1-9.

Engler, A, Vrancker, M, Gregorini S, Muller, D, Hecklein, M y Henzenn, M, (2008). Estudio del comportamiento de una función a partir de la derivada. Análisis de una secuencia didáctica. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 21*, *466-476.* México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Park J. (2015). Is the derivative a function? If so, how do we teach it? *Educationa Studies in Mathematics*, 89, pp.233-250

López, A. (2008). Propuesta para la enseñanza del concepto de derivada, un acercamiento visual con Geogebra. En A. López (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 21*. 1166-1175. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Monge, J. (2013). Conceptualización de la derivada a través de la visualización del conocimiento. En J. Monge (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 26*. 6745-6752. Costa Rica: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Ramos, J., Briceño, E. C, Zaldivar, J. D. (2014). Estrategias variacionales en estudiantes de bachillerato de la UAPUAZ en situación experimental. *Revista el cálculo y su enseñanza, (6),6 pp. 145-166.*

Sánchez, G., García, M y Linares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 11(002), 275-284.

Schivo, M. E., Sgreccia, N., y Caligaris, M. (2014). Derivada y aplicaciones: La tecnología en el aula. En Lestón, Patricia (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 2075-2083). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Tall, D. (2013). Una aproximación sensible al cálculo. En C. A. Cuevas editor (Comps), *La enseñanza del cálculo diferencial e integral: compendio de investigación y reflexiones para profesores, formadores e investigadores en materia educativa* pp. 127-158, México: Pearson.

Vrancken, S y Engler, A. (2013). Estudio de la derivada desde la variación y el cambio. Análisis histórico-epistemológico. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática* S. (5),33, 53-70.

Zandieth, M. (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivate. In E. Dubinsky, A. Shoenfeld & J. Kaput (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education. IV CBMS Issues in Mathematics Education* (volume 8, pp. 103-127. Providence, USA: American Mathematical Society.