UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2007, Número 12, páginas 157-170
ISSN: 1815-0640

Coordinado por
Agustín Carrillo de Albornoz

La calculadora gráfica como recurso didáctico en la enseñanza de las matemáticas: resolución de sistemas de ecuaciones lineales

Elena Díaz Domínguez

Resumen

La introducción en el aula de las Tecnologías de la Información y Comunicación, TIC, permite la creación de un entorno interactivo de enseñanza-aprendizaje que fomenta, entre otras, el pensamiento lógico-matemático, la motivación y el autoaprendizaje de los alumnos.
En este artículo se presenta el uso de la calculadora gráfica como herramienta para la resolución de los sistemas de ecuaciones lineales que se estudian en la Educación Secundaria Post-obligatoria.

Introducción

La utilización de la calculadora gráfica en el aula de matemáticas resulta interesante por varios motivos, entre otros:

- Es muy útil en actividades de ampliación tales como situaciones más complicadas y que requieran la aplicación de métodos aproximados.
- Los alumnos la pueden usar de manera autónoma como herramienta auto-correctora y de comprobación para la revisión de los ejercicios que han realizado.
- Permite dedicar más tiempo a trabajar aspectos interpretativos al simplificar los cálculos.

Su uso didáctico se organiza a través de actividades de aprendizaje diseñadas por el profesor. De este modo, los alumnos aprenden con la calculadora y de la calculadora los contenidos escolares (conceptos, hechos, principios, procedimientos, estrategias, etc.), alcanzando así la consecución de los objetivos del currículo correspondiente a las distintas unidades didácticas.

A continuación se exponen una serie de actividades que se pueden realizar con ayuda de la calculadora gráfica ClassPad 300 para el desarrollo de los contenidos correspondientes a la unidad didáctica “Resolución de sistemas de ecuaciones lineales” de la asignatura Matemáticas II que se imparte actualmente en el 2º curso de Bachillerato (16-17 años) de la modalidad de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud / Tecnología, del sistema educativo español.

Resolución de sistemas lineales con la calculadora

En el currículo de Bachillerato se contempla la discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales de dos o tres incógnitas pudiendo éstos depender de un parámetro. La discusión de dichos sistemas se realiza utilizando el criterio de compatibilidad que proporciona el teorema de Rouché-Fröbenius, mientras que su resolución se puede llevar a cabo mediante los métodos de Gauss, de Gauss-Jordan, la regla de Cramer y la matriz inversa.

Las siguientes actividades muestran todas las posibilidades que se pueden presentar en un sistema lineal de tres incógnitas. En algunas de ellas se indica la resolución por todos los métodos.

ACTIVIDAD 1: Resolución de un sistema incompatible:

$$\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 2x+y+2z=2 \\ 3x+3y+3z=4 \end{cases}$$

Creamos la matriz del sistema y el vector de los términos independientes. Combinándolos mediante la función augment obtenemos la matriz ampliada:

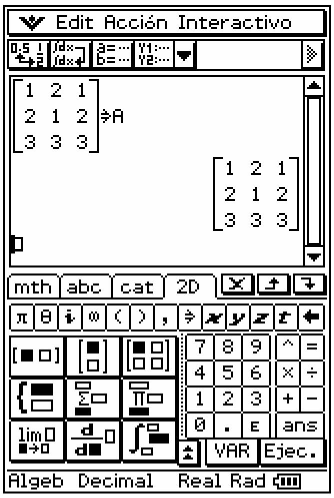


Fig. 1

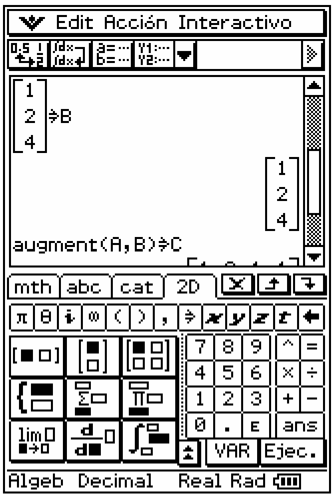


Fig. 2

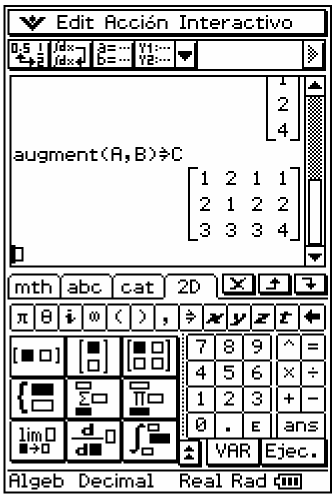


Fig. 3

Hallamos los rangos de ambas para estudiar la compatibilidad del sistema según el criterio que proporciona el teorema de Rouché-Fröbenius. Dos formas:

La primera sería calculando el determinante de la matriz de los coeficientes y el determinante de los menores de orden 3 de la matriz ampliada (función det). Obtenemos dichos menores mediante la función submat combinada con las funciones trn –trasponer- y swap –intercambiar dos filas de una matriz.

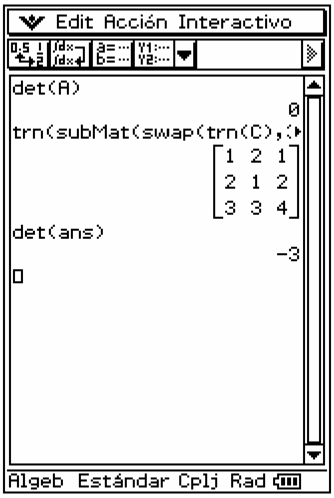


Fig. 4

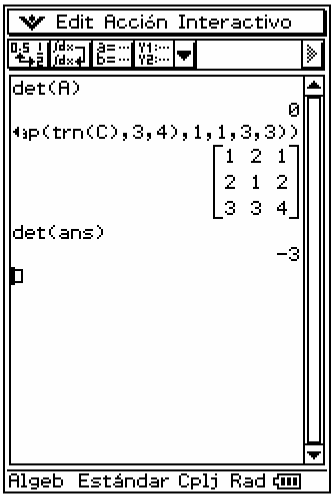


Fig. 5

La segunda mediante la forma escalonada de ambas matrices que se obtiene al usar la función ref.

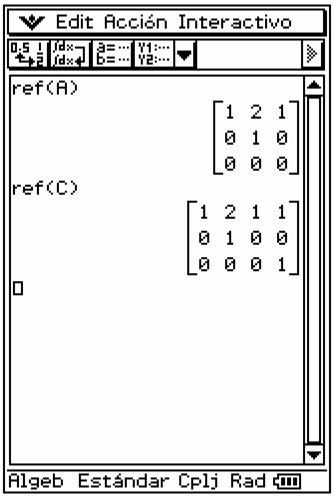


Fig. 6

Puesto que el rango de la matriz de los coeficientes es 2 (su determinante es nulo y al hallar la forma escalonada de la matriz obtenemos una fila de ceros, lo que significa que ésta es linealmente dependiente de las otras dos) mientras que el de la matriz ampliada es 3 (al menos un menor de orden 3 tiene determinante distinto de cero), deducimos que el sistema es incompatible.

Si quisiéramos que los alumnos trabajasen el método de Gauss o el de Gauss-Jordan para la obtención de la forma triangular de la matriz, también lo podríamos hacer a través de las opciones que ofrece la calculadora (mrow multiplica los elementos de una fila de una matriz por una expresión y con mrowadd sumamos ese resultado a otra fila):

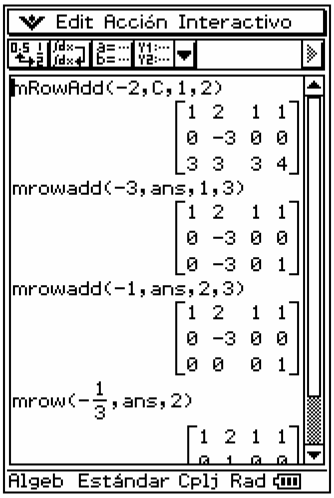


Fig. 7

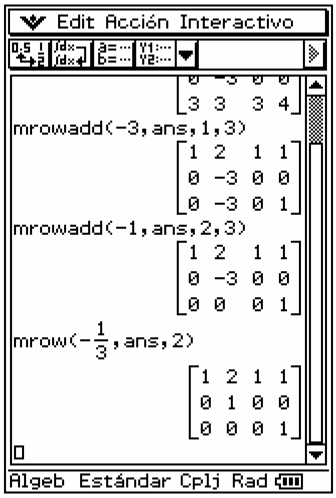


Fig. 8

ACTIVIDAD 2: Resolución de un sistema compatible determinado:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 5 \\ x - y + 2z = -3 \\ 3x - 2y + z = -2 \end{cases}$$

Formamos la matriz del sistema y la ampliada:

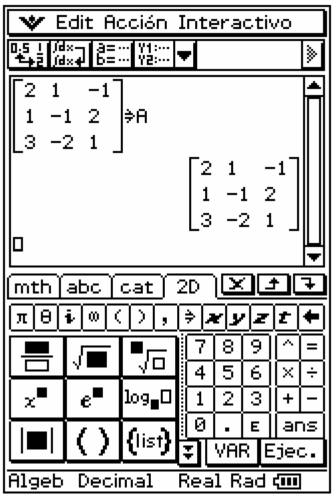


Fig. 9

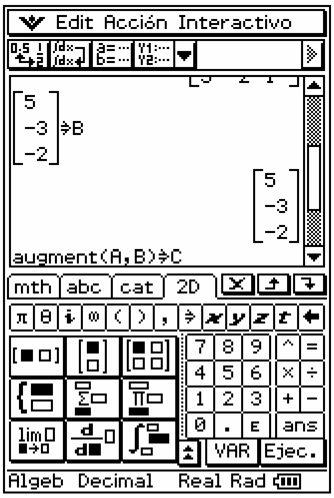


Fig. 10

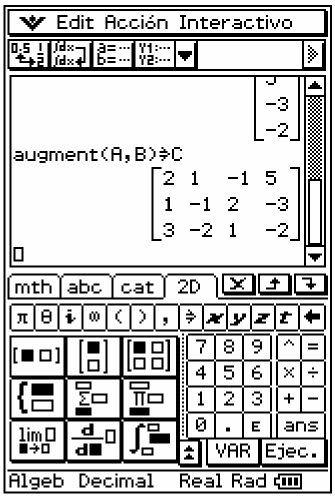


Fig. 11

Determinamos la compatibilidad/incompatibilidad del sistema mediante los rangos de la matriz de los coeficientes y de la ampliada:

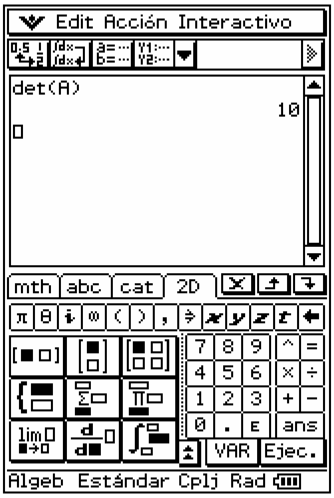


Fig. 12

Puesto que el determinante de la matriz de los coeficientes es no nulo, significa que tanto su rango como el de la matriz ampliada es 3, que es el número de incógnitas, luego por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, esto es, tiene solución única.

Resolvemos por todos los métodos:

- Método de Gauss: podemos hallar el sistema equivalente triangular superior mediante la función ref aplicada a la matriz ampliada, por lo que por sustitución regresiva obtenemos la solución:

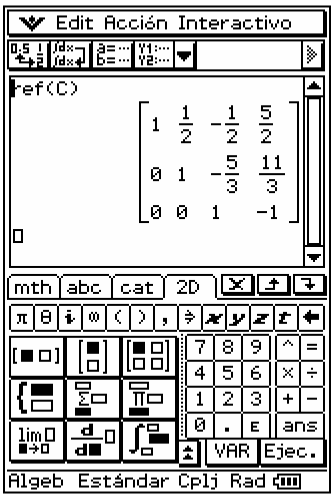


Fig. 13

$$z = -1$$

$$y = \frac{11}{3} + \frac{5}{3}z = \frac{11}{3} - \frac{5}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

$$x = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}y = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} - \frac{2}{2} = 1$$

Fig. 14

- Método de Gauss-Jordan: con la orden rref aplicada a la matriz ampliada se obtiene el sistema reducido de Gauss-Jordan, por lo que por sustitución directa se halla la solución:

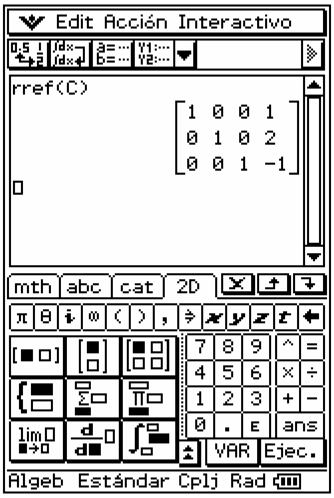


Fig. 15

$$z = -1, y = 2, x = 1$$

- Resolución por la matriz inversa: $AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$

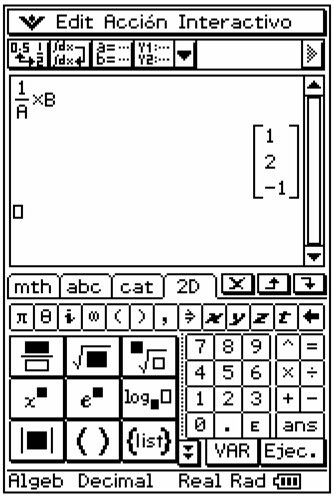


Fig. 16

- Regla de Cramer: lo primero es verificar que el sistema es de Cramer, esto es, mismo número de ecuaciones que de incógnitas y determinante de la matriz del sistema no nulo (ya lo hemos comprobado al hallar el rango). Una vez verificado, hallamos las soluciones de Cramer:

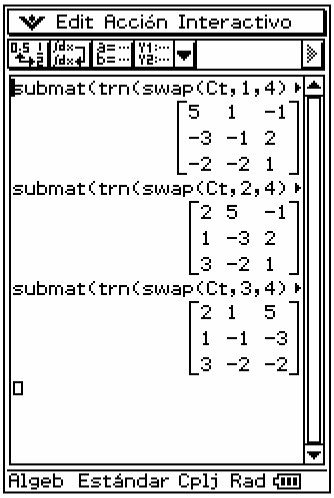


Fig. 17

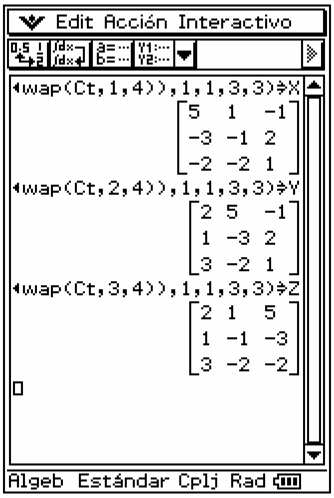


Fig. 18

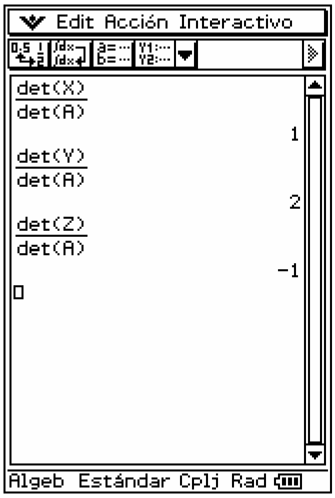


Fig. 19

ACTIVIDAD 3: Resolución de un sistema compatible indeterminado:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 4 \\ x - y + 2z = 6 \\ 4x - 3y + 5z = 16 \end{cases}$$

Formamos la matriz de los coeficientes y la ampliada y hallamos sus respectivos rangos:

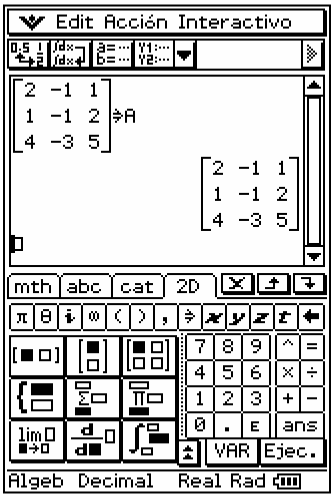


Fig. 20

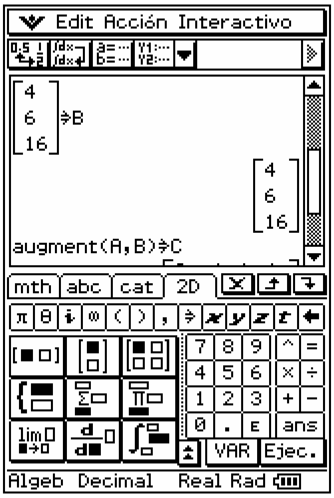


Fig. 21

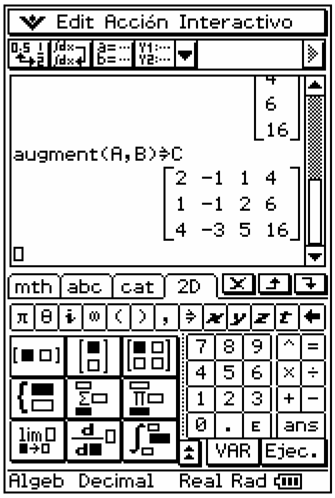


Fig. 22

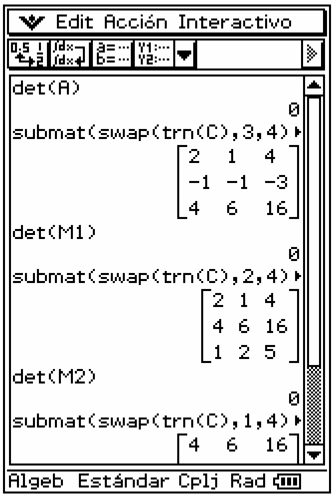


Fig. 23

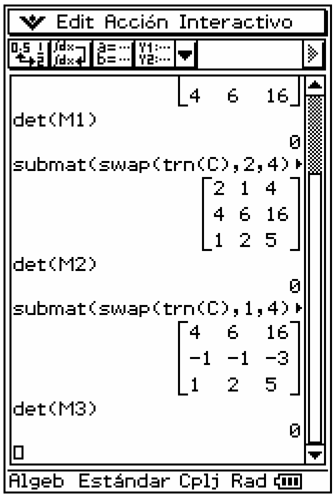


Fig. 24

Tanto el determinante de la matriz de los coeficientes como el de los menores de orden 3 de la ampliada son nulos, lo que significa que ambos rangos son menores que 3. Los hallamos con la función rref.

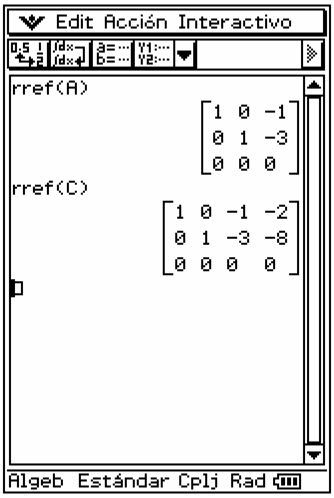


Fig. 25

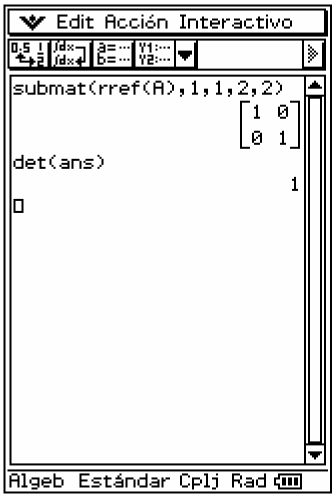


Fig. 26

Observamos que los rangos son iguales a 2 pero el número de incógnitas es 3, luego por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado. Fijándonos en un menor no nulo de orden 2 (el formado por la submatriz 1,1,2,2) podemos resolver el sistema (para ello pasamos la variable z al término independiente convirtiéndola así en un parámetro). Así pues, por sustitución directa al aplicar el método de Gauss-Jordan, obtenemos las infinitas soluciones:

$$\begin{cases} x = -2 - z \\ y = -8 - 3z \\ z \in \Re \end{cases}$$

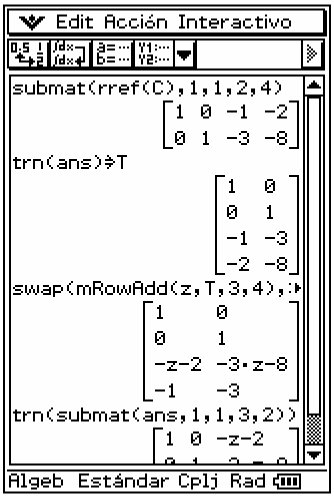


Fig. 27

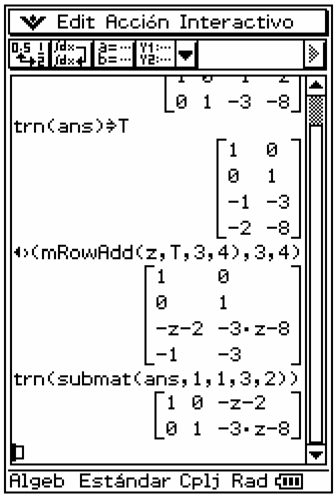


Fig. 28

ACTIVIDAD 4: Estudio de la compatibilidad del siguiente conjunto de sistemas dependientes del parámetro a:

$$\begin{cases} x + ay - z = 1 \\ 2x + y - az = 2 \\ x - y - z = a - 1 \end{cases}$$

Formamos la matriz del sistema y la ampliada y con la función solve determinamos los valores del parámetro para los cuales el determinante de la matriz del sistema se anula:

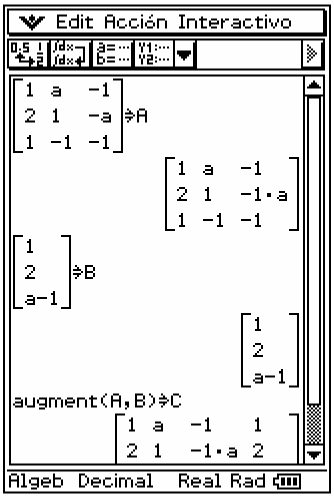


Fig. 29

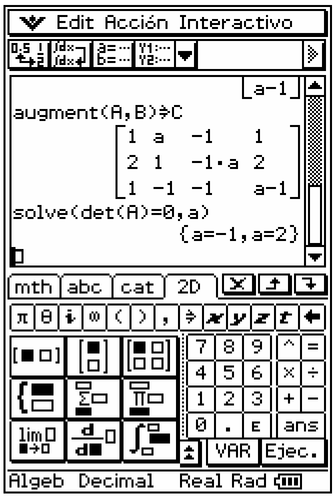


Fig. 30

Discusión:

- ✓ Si $a = -1$, el sistema es incompatible puesto que el rango de la matriz de los coeficientes es 2 (-1 es un valor de los que anulan el determinante) mientras que el de la ampliada es 3 (lo vemos al usar su forma escalonada reducida por filas que proporciona la función rref) Fig. 31:

✓ Si $a = 2$, sistema compatible indeterminado (ambos rangos son 2) Fig. 32:

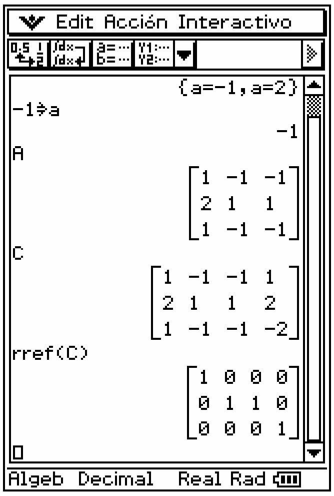


Fig. 31

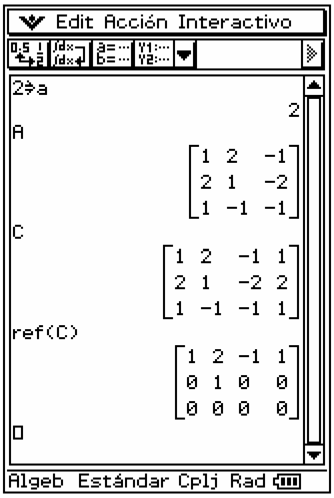


Fig. 32

Resolviendo por Gauss (y sustitución regresiva):

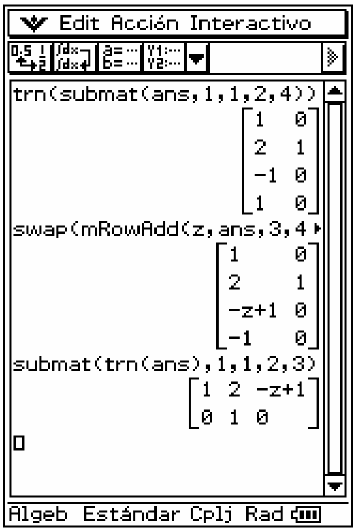


Fig. 33

$$y = 0$$
$$x = 1 - z - 2y = 1 - z$$
$$z \in \Re$$

- ✓ Si $a \neq -1,\ 2$, el sistema es compatible (pues el determinante de la matriz de los coeficientes es no nulo y, por tanto, el de la ampliada también). Podemos resolverlo por el método de Gauss-Jordan o bien con la función solve:

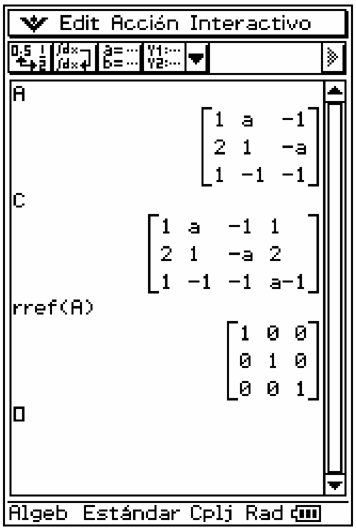


Fig. 34

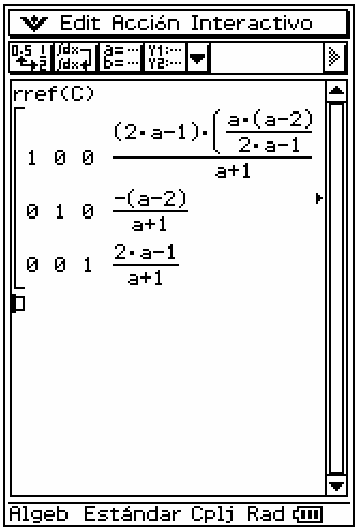


Fig. 35

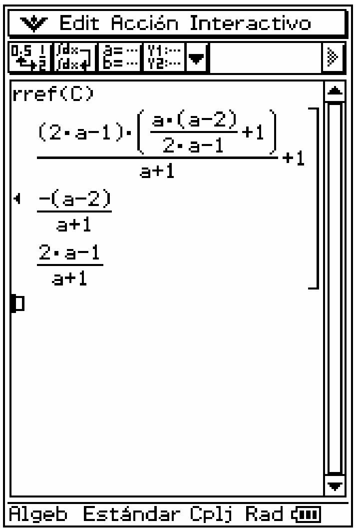


Fig. 36

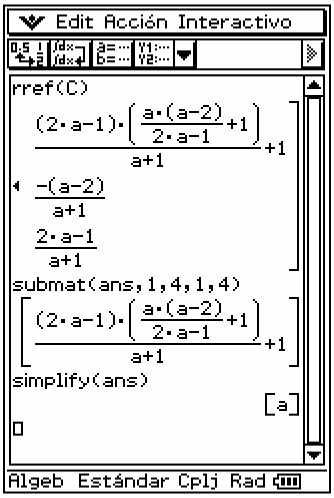


Fig. 37

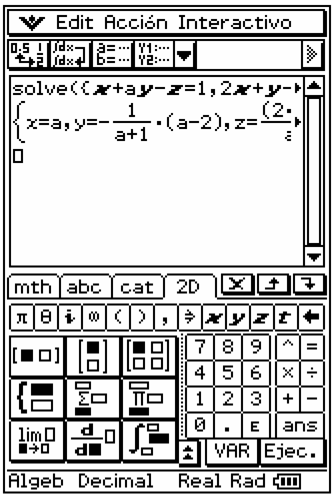


Fig. 38

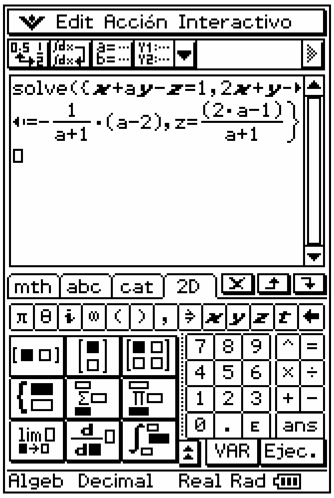


Fig. 39

ACTIVIDAD 5: Discusión y resolución del sistema dependiente de un parámetro:

$$\begin{cases} -3x + ky - 5z = -4 \\ 2x + ky - 5z = -4 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

Matriz de los coeficientes y ampliada y determinante de la primera:

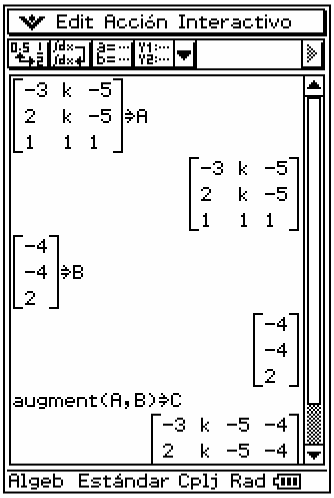


Fig. 40

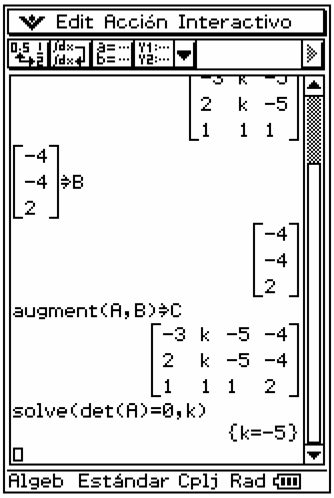


Fig. 41

Discusión:

i) Si $k \neq -5,\quad r\begin{pmatrix} -3 & k & -5 \\ 2 & k & -5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} -3 & k & -5 & -4 \\ 2 & k & -5 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 3$

y por tanto, el sistema es compatible determinado:

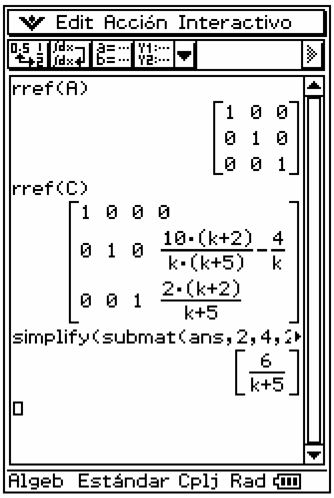
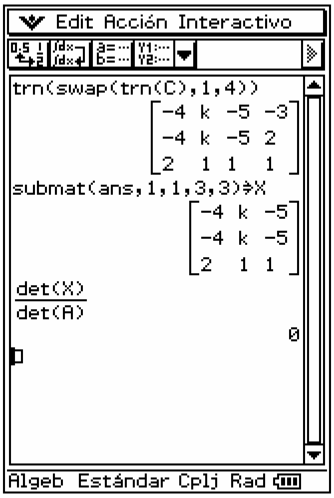
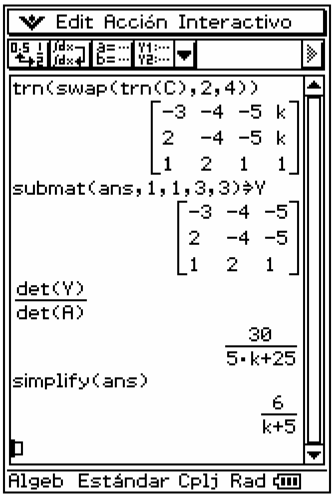


Fig. 42

Al haber calculado los rangos a través de Gauss-Jordan tenemos directamente la solución. Podríamos también calcularla por Cramer:





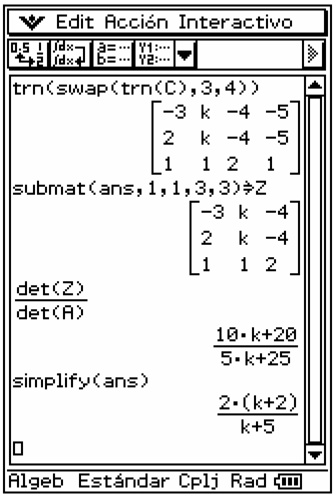


Fig. 43 Fig. 44 Fig. 45

$$x=\frac{\begin{vmatrix}-4 & k & -5\\ -4 & k & -5\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-3 & k & -5\\ 2 & k & -5\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}}=\frac{0}{-5(k+5)}=0 \qquad y=\frac{\begin{vmatrix}-3 & -4 & -5\\ 2 & -4 & -5\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-3 & k & -5\\ 2 & k & -5\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}}=\frac{-30}{-5(k+5)}=\frac{6}{(k+5)} \qquad z=\frac{\begin{vmatrix}-3 & k & -4\\ 2 & k & -4\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-3 & k & -5\\ 2 & k & -5\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}}=\frac{-10(k+2)}{-5(k+5)}=\frac{2(k+2)}{(k+5)}$$

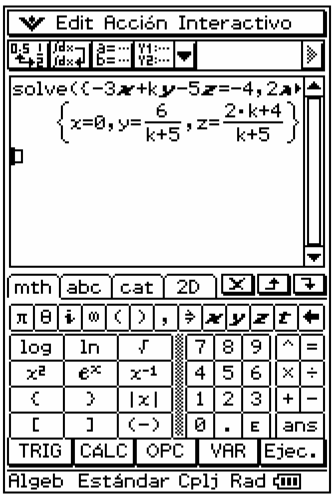


Fig. 46

ii) Si $k=-5$, $r\begin{pmatrix} -3 & -5 & -5 \\ 2 & -5 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 3 = r\begin{pmatrix} -3 & -5 & -5 & -4 \\ 2 & -5 & -5 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

y por tanto, el sistema es incompatible:

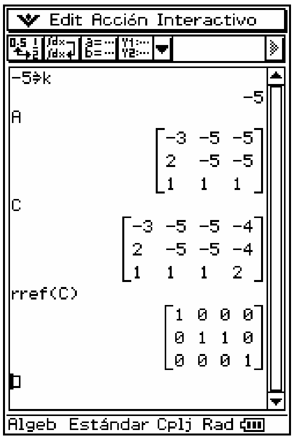


Fig. 47

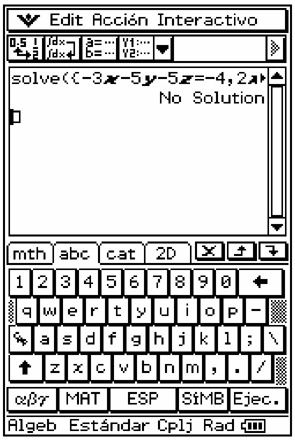


Fig. 48

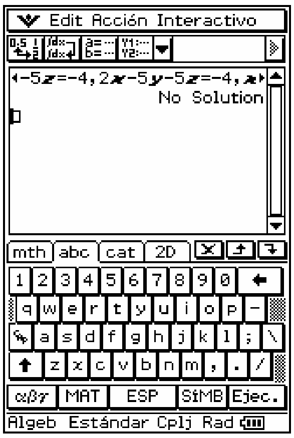


Fig. 49

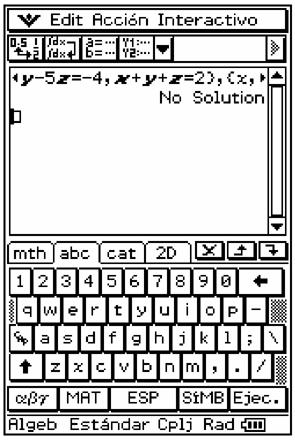


Fig. 50

Bibliografía

▪J.R. Vizmanos, M. Anzola (2005): “Algoritmo matemáticas II”. SM Bachillerato, Madrid, España.

▪Material del curso de formación a distancia Thales-CICA 2007 “La calculadora CLASSPAD 300 como recurso didáctico en el área de matemáticas”.

Elena Díaz Domínguez es Licenciada en Matemáticas y Máster en Ingeniería Matemática por la Universidad Complutense de Madrid. Ha trabajado en el campo de la Investigación de Mercado y en la actualidad es técnico en bioestadística de la Fundación para la Investigación Sanitaria en Castilla-La Mancha (FISCAM). Interesada en la enseñanza de las Matemáticas obtuvo el Certificado de Aptitud Pedagógica de la Universidad Complutense y ha realizado varios cursos de formación de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.