

## Test sobre imágenes mentales y conceptuales con uso de software sobre asíntotas de funciones

**Roxana Scorzo**

**Adriana Favieri**

(Universidad Nacional de La Matanza. Argentina)

*Fecha de recepción: 7 de noviembre de 2019*

*Fecha de aceptación: 22 de mayo de 2019*

---

### Resumen

En el presente artículo presentamos un Test, que aplicamos entre estudiantes de primer año, para determinar las imágenes mentales y conceptuales sobre rectas asíntotas de funciones cuando se trabaja con el software “Mathematica”. Explicaremos cómo lo implementamos en un curso de Análisis Matemático I de carreras de ingeniería de la Universidad Nacional de La Matanza. Este test fue elaborado y se utilizó como insumo para una Tesis de Maestría sobre Enseñanza de las Ciencias Exactas. Explicitamos también la experiencia previa que inspiró esta actividad y los resultados que se obtuvieron en ella que impulsaron en parte el diseño del test que presentamos.

### Palabras clave

Asíntotas-Test-Software Mathematica-Imágenes mentales y conceptuales

---

### Title

**Test about mental and conceptual images with the use of software about asymptotes of functions**

### Abstract

In the current article we present a Test applied to first-year students, which objective is to determine the mental and conceptual images about straight asymptotes of functions when working with Mathematica software. We will explain how we implemented it in the Mathematical Analysis I course in the engineering careers of the Universidad Nacional de La Matanza (UNLaM). This test was developed and used as an input for a Master's Thesis about Teaching of Exact Sciences. We also explain the previous experience that inspired this activity and the results obtained in it, which in part boosted the design of the test that we presented.

### Keywords

Asymptotes-Test-Mathematica Software-Mental and conceptual images

---

## 1. Introducción

En el presente artículo presentamos un Test para determinar las imágenes mentales y conceptuales sobre rectas asíntotas de funciones cuando se trabaja con el software “Mathematica”. Haremos referencia a las líneas teóricas en las cuales nos apoyamos para comprender y explicitar dicho concepto a partir de la aplicación del Test. Explicitaremos también la forma de implementación del mismo. La aplicación del Test tiene por objetivo recabar información para un trabajo de investigación vinculado con el trabajo final de tesis de quien suscribe, para obtener título de Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas.



Para fundamentar la comprensión y explicitación del concepto de rectas asíntotas a una función, cuando se usa software específico, nos basamos en una teoría cognitivista que versa sobre imágenes conceptuales, cuyos referentes principales son Tall y Vinner, para lo cual hemos realizado una exhaustiva indagación bibliográfica. El mismo fue aplicado a la totalidad de un curso de primer año de carreras de Ingeniería de la cátedra Análisis Matemático I de la Universidad Nacional de La Matanza.

Vinner (1983) define imagen mental relacionada con un concepto matemático como el conjunto de todas las imágenes que están asociadas al mismo y que puede incluir cualquier representación visual del concepto, incluso símbolos, gráficos o palabras. El diseño de la primera parte del test fue inspirado en un trabajo del autor que versa sobre funciones y en el cual, a partir de una pregunta abierta, categoriza las imágenes mentales que los estudiantes tienen del concepto antes de definirlo formalmente.

Con respecto a las imágenes conceptuales, Vinner (1983) las define como el conjunto de propiedades asociadas con el concepto junto con la imagen mental. Tall y Vinner (1981) desarrollaron el concepto de imagen conceptual o imagen del concepto, contrastándolo con la definición de los conceptos. La imagen del concepto se define como la estructura cognitiva que se asocia con el concepto, que incluye todas las imágenes mentales, las propiedades y procesos asociados. Cambia a medida que el individuo experimenta nuevos estímulos, y las imágenes mentales desarrolladas pueden producir conflictos futuros.

Por otra parte, se verá en el Test que los ejercicios se presentan en diferentes registros de representación ya que como lo expresa Duval (1993) los pasajes de un registro a otro enriquecen las imágenes conceptuales que un sujeto tiene sobre un determinado concepto.

Como planteamos anteriormente este Test se aplicó en un curso de la materia Análisis Matemático I, a cargo de quien suscribe este artículo. La asignatura se cursa en forma cuatrimestral, con dos parciales y un trabajo práctico obligatorio para acreditar la materia, que los estudiantes realizan usando el software “Mathematica”. El contenido de este trabajo práctico abarca los siguientes temas: funciones, límites, asíntotas y continuidad. Es decir, los estudiantes conocen la herramienta informática, cuentan con tutoriales de libre acceso, realizados por los docentes de la cátedra, donde se explicitan los principales comandos del software.

La experiencia se llevó a cabo tres semanas después de haber comenzado el dictado de la materia, y no habiéndose enseñado el tema de rectas asíntotas a gráficos de funciones en los laboratorios de la Universidad. Los alumnos trabajaron en forma grupal y fueron observados y orientados por tres docentes.

El Test se dividió en dos partes que denominamos Actividad 1 y 2 respectivamente. La primera actividad se resolvió antes de la enseñanza del concepto de asíntotas siendo el objetivo de la misma obtener imágenes mentales acerca del tema y la segunda, luego de explicarlo, para describir las imágenes conceptuales vinculadas al uso de la herramienta informática. Ambas instancias se desarrollaron en las computadoras del laboratorio donde está instalado el software “*Mathematica*®”. que utilizaron para realizarlas. Ambas actividades se llevaron a cabo en forma grupal, participaron de la experiencia 57 alumnos divididos en 20 grupos.

La Actividad 1 fue igual para todos los grupos, en cambio la segunda se presentó en cuatro grupos denominados A, B, C y D en cada uno de ellos había cuatro ejercicios en diferentes registros de representación: algebraico, gráfico, verbal y combinando los dos primeros. Esto se decidió dada la gran cantidad de alumnos y además porque no hubieran podido analizar las dieciséis funciones

seleccionadas, fundamentadas a la luz de nuestro marco teórico y en virtud de experiencias previas llevadas a cabo con actividades vinculadas con asíntotas y uso de software.

## 2. Experiencia previa

Un trabajo previo al diseño del instrumento que presentamos en este artículo fue una actividad sobre funciones racionales realizada con el software matemático “*Mathematica*®”. Dicha actividad formó parte de un trabajo práctico del denominado taller de informática de la cátedra Análisis Matemático I, del Departamento de Ingeniería e Investigaciones Tecnológicas de la Universidad Nacional de la Matanza. En la misma indagamos las ideas que tienen los alumnos sobre las raíces de funciones racionales y las intersecciones de la asíntota oblicua y la función, como así también el desempeño de los mismos al resolver la actividad con el software mencionado. Nos planteamos como objetivos de dicha actividad:

- Conocer la postura de los alumnos de Análisis Matemático I, ante una proposición falsa con respecto a las raíces de una función racional.
- Analizar el desempeño de los alumnos de Análisis Matemático I, al calcular dominio y raíces de una función racional usando software “*Mathematica*®”.
- Establecer la incidencia que tiene la resolución anterior realizada con el software en la revisión de la postura dada por el alumno ante la proposición falsa con respecto a las raíces de una función racional.
- Identificar la opinión de los alumnos de Análisis Matemático I, con respecto a una proposición falsa con respecto a la intersección de asíntotas oblicuas a funciones racionales y la propia función.
- Describir las resoluciones hechas por los alumnos de Análisis Matemático I al calcular las asíntotas verticales y oblicuas de una función racional y la intersección con dicha función usando software “*Mathematica*®”
- Examinar la incidencia que tiene la resolución anterior realizada con el software en la revisión de la postura dada por el alumno ante la proposición falsa con respecto a la intersección de asíntotas oblicuas a funciones racionales y la función.

### 2.1 Actividad propuesta

Describimos a continuación el enunciado de la actividad, para cumplir con los objetivos antes enumerados, que los alumnos resolvieron utilizando el software *Mathematica*®.

**Responder V ó F. Justificando tus respuestas.**

1. Las raíces de una función racional son siempre los valores que anulan el numerador.
2. La intersección entre una asíntota oblicua y la función siempre es vacía.

**Resuelve el siguiente ejercicio:**

Dada la función: 
$$f(x) = \frac{x^7 - 2x}{-3x + 4x^6}$$
 Determinar:

- a. Dominio. Raíces.
- b. Vuelve a analizar lo respondido en el ítem 1 y explicar si mantienes o no tu respuesta.
- c. Ecuaciones de las asíntotas



- d. Determinar si existe punto de intersección entre la asíntota oblicua y la función en forma analítica usando el software.
- e. Vuelve a analizar lo respondido en el ítem 2 y determinar si sostienes o no tu respuesta dada previamente.

## 2.2 Algunos resultados de la experiencia

Analizamos 209 trabajos, de los cuáles a modo de ejemplo, mostramos una producción y algunas conclusiones que pudimos obtener a partir de dicha experiencia. Nos parece importante describir esta experiencia ya que fue el antecedente que nos inspiró para profundizar el tema y diseñar el instrumento que haremos explícito en el presente artículo.

### 2.2.1. Ejemplo de producciones

Se muestra una imagen de una de las producciones de los estudiantes, aclaramos que éstos intercambiaron la numeración de los ejercicios el 1 corresponde al 2 y viceversa.

**EJERCICIO 2**

**V ó F**

1. F, si bien la asíntota oblicua es una asíntota puede ser que en alguno de los puntos toque a la función.

Ej.:  $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$  asíntota oblicua definida por:  $y = x + 2$

Solve[ $x^3/(x-1)^2 == x + 2, x$ ]  
 $\{\{x \rightarrow 2/3\}\}$

2. F, puede ocurrir que una raíz de una función racional no pueda anular el numerador.

$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

Solve[ $x - 2 == 0, x$ ]  
 $\{\{x \rightarrow 2\}\}$

Solve[ $x^2 - 4 == 0, x$ ]  
 $\{\{x \rightarrow -2\}, \{x \rightarrow 2\}\}$

Se puede ver que  $x=2$  no anula el numerador porque está excluido del dominio de  $f(x)$ .

3.  $f(x) = \frac{x^7 - 2x}{-3x + 4x^6}$

a. Solve[ $(-3)x + 4x^6 == 0, x$ ] // N  
 $\{\{x \rightarrow 0.\}, \{x \rightarrow -0.763783 - 0.554921 i\}, \{x \rightarrow 0.944088\}, \{x \rightarrow -0.291739 + 0.897881 i\}, \{x \rightarrow -0.291739 - 0.897881 i\}, \{x \rightarrow -0.763783 + 0.554921 i\}\}$

Solve[ $f[x] == 0, x$ ] // N  
 $\{\{x \rightarrow -0.99475 - 0.479046 i\}, \{x \rightarrow 1.10409\}, \{x \rightarrow -0.688389 + 0.863212 i\}, \{x \rightarrow -0.245683 - 1.07641 i\}, \{x \rightarrow -0.245683 + 1.07641 i\}, \{x \rightarrow -0.688389 - 0.863212 i\}, \{x \rightarrow -0.99475 + 0.479046 i\}\}$

Dominio:  $f(x)$ : R-  $\{\{x \rightarrow 0.\}, \{x \rightarrow 0.944088\}\}$ , Raíces:  $\{x \rightarrow 1.10409\}$

Figura 1. Imagen de una producción

### 2.2.2 Conclusiones de esta experiencia

- La idea que las raíces de una función racional son iguales a las raíces del polinomio del numerador persistió en un 20% de los alumnos a pesar de toda la actividad propuesta.
- El software por más poderoso que sea no suple la falta de conocimiento matemático puesto de manifiesto a la hora de plantear el sistema de ecuaciones para determinar la intersección de la asíntota oblicua con la función.
- El software propició mejorar las respuestas de los estudiantes, con respecto a la intersección de la asíntota oblicua y la función racional propuesta en el ejercicio.
- Contradicciones en la rectificación o ratificación de los valores de verdad que le asignaron a las dos primeras proposiciones dadas.
- Dificultad para justificar respuestas, si bien plantearon contraejemplos las explicaciones brindadas fueron incompletas a pesar de contar con la herramienta informática que facilita el cálculo algebraico.

Esto nos motivó a seguir profundizando el tema asíntotas de funciones y uso de software matemático a la luz de un Enfoque Cognitivista que explicitaremos en el marco teórico. Por otra parte, nos vimos en la necesidad de diseñar un test propio ya que de acuerdo a la indagación bibliográfica no hemos encontrado un modelo que verse sobre el tema en cuestión, con el uso de la herramienta informática elegida y a la luz de nuestro enfoque teórico que se apoya en tres pilares: imágenes mentales y conceptuales, registros de representación y uso de tecnología en los procesos de aprendizaje.

Este Test, será insumo de un trabajo de investigación para una tesis de Maestría de quien suscribe, motivo por el cual consideramos pertinente la elección de este marco teórico y poder aportar nuevas consideraciones acerca de imágenes conceptuales sobre asíntotas de funciones cuando se usa software específico, en nuestro caso “Mathematica” y cuando los ejercicios se presentan en diferentes registros de representación.

## 3. Marco teórico

### 3.1. Imágenes mentales y conceptuales

Tall y Vinner (1981) sostienen que la matemática, a diferencia de otras disciplinas, la definición de sus conceptos requiere de una gran precisión ya que toda la teoría se desarrolla a partir de estos. Muchos conceptos matemáticos tienen denominaciones similares a las ya conocidas por el alumno en su vida cotidiana antes de ser definidos formalmente en la disciplina, estas ideas previas a la enseñanza formal de un concepto las denominan *imágenes mentales*. Dado que la estructura cognitiva de cada individuo es compleja, es posible que se generen diferentes imágenes mentales al evocar un concepto que se pretende aprender, definir o indagar. Estos autores acuñaron el término *imagen conceptual* para describir la estructura cognitiva que se asocia con un concepto matemático, que incluye todas las imágenes mentales, propiedades, concepciones espontáneas y procesos asociados en la elaboración del mismo. Esta *imagen conceptual* se construye a lo largo de los años, a través de experiencias de todo tipo, y la misma se va modificando a medida que la persona recibe nuevos estímulos y afina el concepto. Diferencian las *imágenes conceptuales* de las *definiciones conceptuales*, cuando hacen referencia a éstas últimas expresan que se trata de un conjunto de términos o palabras que son usadas para especificar cierto concepto que puede ser aprendido de memoria o en forma significativa por parte de la persona. Los autores también señalan que en las *imágenes conceptuales* hay un claro predominio de la representación visual de un concepto sobre la verbal, ya que sostienen que en la mente de un individuo primero aparece la imagen o representación del objeto y luego lo verbalización.



Otros conceptos que usan los autores es el de imágenes evocadas, estas son las que aparecen más visibles en la mente del sujeto cuando piensa en un determinado concepto. Pueden ser contradictorias o erróneas y esto es lo que genera lo que Tall y Vinner (1981) llaman *conflicto*. Así, señalan que ciertas imágenes mentales que un sujeto tiene acerca de un concepto, elaborada en su primera infancia, se transforman en obstáculos a la hora de definir un concepto de manera formal.

Tall (1995) distingue dos clases de pensamiento matemático: el Pensamiento Matemático Elemental (PME) y el Pensamiento Matemático Avanzado (PMA). El primero se refiere al pensamiento matemático vinculado con la escuela primaria y secundaria, que incluye aritmética, álgebra y geometría. El segundo se refiere a la definición de los conceptos de manera más formal, incluyendo deducciones lógicas, propias del nivel universitario. Afirma que el paso del PME al PMA requiere una reconstrucción cognitiva que supone una transición que consiste por un lado describir un objeto matemático y por otro definirlo.

### 3.2 Registros de representación

Desde las teorías cognitivistas las *representaciones* son consideradas como cualquier signo, conjunto de símbolos del mundo exterior o bien del interior, que tienen algún significado para un sujeto. Cualquier elemento que percibamos a través de cualquiera de nuestros sentidos, la mente lo transforma en una representación. Mapas, diagramas, dibujos, palabras, símbolos son considerados *representaciones externas* que el sujeto produce en forma intencional para cumplir un determinado propósito. A estas representaciones externas se las denomina *representaciones semióticas*. En cambio, las *representaciones internas* están en la mente del sujeto, pueden ser conceptos, nociones, imágenes mentales, entre otras, que nos permiten, a pesar de no tener la presencia tangible del objeto, verlo (Tamayo, 2006).

Duval (1998) asegura que en la formación de un concepto matemático con uso de tecnología, ésta no es el elemento central sino que las *representaciones semióticas* son el medio para actuar sobre los objetos matemáticos y poder de esta forma romper con la *paradoja cognitiva del pensamiento matemático* donde por un lado se encuentra la comprensión conceptual del objeto matemático y por el otro la representación de dicho objeto.

Por otra parte, Duval (1993) marca la importancia del pasaje de un registro de representación semiótica a otro en la construcción de un concepto matemático, sin darle primacía a uno por encima de otro, especialmente cuando se refiere al lenguaje algebraico.

Prieto y Vicente (2006) dan una clasificación de registros de representación:

**Registro verbal:** El lenguaje coloquial es el utilizado para representar situaciones que pueden ser modeladas en cualquiera de los otros registros.

**Registro analítico:** Se expresa analíticamente un concepto recurriendo a notaciones matemáticas adecuadas utilizando símbolos acordados.

**Registro gráfico:** Es la representación en el plano cartesiano o eje real o espacio de acuerdo a qué objeto se está tratando.

**Registro figural:** Implica el uso de esquemas o dibujos simplificados de una situación problemática. (Prieto, Vicente, 2006, pp. 205-206)

En nuestro test solo usamos los tres primeros registros mencionados.

### 3.3 Uso de tecnología en la enseñanza universitaria

Codes y Sierra (2005) señalan que existen dos líneas teóricas principales que orientan las investigaciones sobre el uso de sistemas algebraicos computarizados: el constructivista y el instrumental. Ambos tienen un objetivo común que es mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje, pero coincidentemente con Goldenberg (2003) la discrepancia entre ambos es el modo de llevar a cabo la mejora. El enfoque instrumental, basado en la Teoría Antropológica de lo Didáctico de Chevallard (1999), sostiene que la forma de interactuar con los objetos matemáticos es a través de las actividades y técnicas como mediadores del conocimiento matemático. Los autores explican que el elemento central de este paradigma es el denominado “Génesis Instrumental” que Trouche (2003, citado en Codes y Sierra 2005, p. 4) define como “un proceso complejo, que requiere tiempo y conexiona las características de la herramienta (sus potencialidades y sus restricciones) con la actividad del individuo (su conocimiento), formando un método de trabajo” (p.4). En cambio, el enfoque constructivista no otorga el mismo valor a las técnicas ya que centra su atención en el aspecto cognitivo del aprendizaje, es decir en la comprensión del objeto de estudio y no a la automatización del conocimiento. Por otra parte, algunos autores señalan algunas condiciones previas necesarias para que la incorporación de la tecnología influya favorablemente en el proceso de aprendizaje, Martínez (2003) enumera cinco necesidades básicas que las llama acceso práctico, técnico, operativo, relacionado con lo científico tecnológico y criterial. El primero de ellos se refiere al tiempo de preparación tanto del docente como del estudiante para incorporar el medio tecnológico al aprendizaje, el acceso técnico es disponer de esos medios en los ámbitos de enseñanza, el operativo al conocimiento de la herramienta que se va a usar, el acceso científico es el conocimiento del tema académico a tratar y finalmente el criterial es el que responde a la pregunta por qué es importante la incorporación de cierta tecnología en el proceso de enseñanza para que nos permita ser criteriosos en su elección.

## 4. Test y Fundamentación

### 4.1. Organización del trabajo

A fines operativos se decidió trabajar con un blog. Muchos autores señalan la importancia de esta herramienta tecnológica gratuita y de fácil acceso para realizar tareas en la enseñanza en general y en particular en la universitaria (Salinas y Viticcioni, 2008). En el mismo se encontraba todo el material que era necesario para el trabajo en el laboratorio de informática de la Universidad. Estaba dividido en dos partes. La primera entrada del blog tenía el texto completo de la Actividad 1 y por último un enlace a un formulario online en el cual los alumnos podían ingresar sus datos personales, nombre y apellido y subir el archivo generado con el software, por cada uno de los grupos que intervinieron en la experiencia.



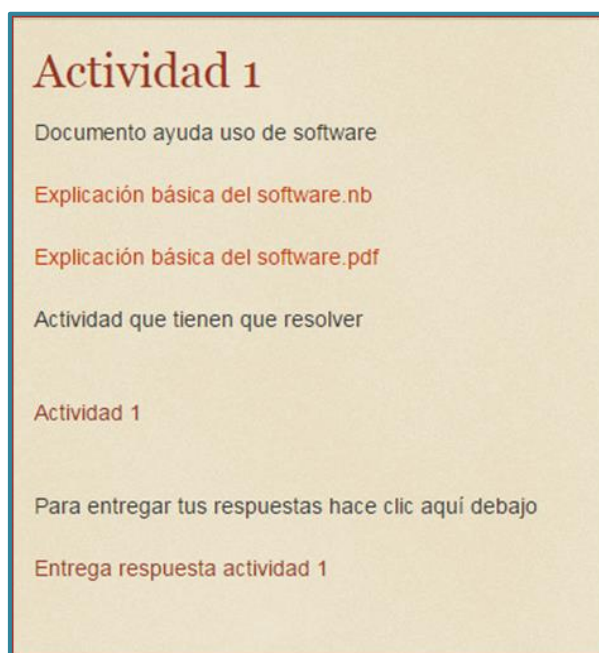


Figura 2. Imagen de la primera entrada al Blog

En la segunda entrada del Blog figuraba un documento con la explicación de asíntotas que se realizó inmediatamente después de concluida la Actividad 1. Otro archivo con los comandos básicos del software: definir funciones, resolver ecuaciones e inecuaciones, calcular límites y graficar. El mismo se encontraba disponible en dos formatos: pdf y nb y finalmente los cuatro grupos de actividades. Los grupos los designamos con las letras A, B, C y D respectivamente. En cada grupo había 4 ejercicios para resolver cada uno de ellos en distintos registros de representación: uno en registro gráfico, otro en algebraico, otro en verbal y finalmente uno donde se combinaban los registros gráficos con algebraico. También en esta entrada los alumnos contaban con un enlace para poder enviar sus producciones. Cada grupo enviaba una sola producción, en total se formaron 20 grupos de trabajo y participaron de la experiencia 57 alumnos. Todas las producciones de los alumnos eran recolectadas en una carpeta virtual de Google Drive, servicio gratuito que permite desarrollar tareas grupales, facilita la gestión de la clase, la entrega de las producciones y economiza papeles (Barrios y Casadei, 2014). Los grupos de trabajo los formaron los propios alumnos según sus preferencias por lo que hubo grupos con dos, tres o cuatro integrantes.





Figura 3. Imagen de la segunda entrada al Blog

#### 4.2. Actividad 1 del Test

Para justificar esta actividad evocamos una experiencia de Vinner (1983) donde el autor realiza con un grupo de estudiantes una pregunta abierta para indagar acerca del concepto de función y donde describe cuáles son las imágenes que manifiestan y las agrupa en cuatro categorías. También pretendemos nosotros, a partir de una pregunta abierta, describir qué imágenes mentales surgen sobre rectas asíntotas de funciones usando un software específico. Queremos establecer también categorías como lo hizo Vinner mostrando como evidencia con el software las imágenes del concepto antes de ser enseñado y qué registros de representación utiliza. El texto de la pregunta de la Actividad 1 es:

¿Podrían explicar, haciendo uso del software, qué es para ustedes una recta ASÍNTOTA a una función?  
 ¿Qué tipo de asíntotas conocen? En este ejercicio tiene la libertad de explicar con palabras sueltas, frases o párrafos, con gráficos, con expresiones con símbolos o números o cualquier otra forma que consideren apropiada para exponer sus ideas. Nos interesa saber cómo representan sus cabezas las rectas asíntotas a una función y siempre usando el software.

Nota: es importante que para responder a esta actividad no usen libros, apuntes, o sitios web, sólo expliciten en detalle lo que conocen ustedes.

#### 4.3. Actividad 2 del Test

Como hemos explicitado anteriormente esta actividad la dividimos en cuatro grupos con el mismo encabezado como se observa en la Figura 3. Las razones por las cuales hemos dividido el trabajo de esta forma son:

- La gran cantidad de alumnos que participaron de la experiencia.
- El tiempo de duración de la clase: no hubieran podido analizar las 16 funciones propuestas en detalle y discutiendo en los grupos de trabajo.
- Consideramos importante repetir los mismos registros de representación en cada grupo, pero plantear funciones con diferentes características que fundamentamos para cada una en función de experiencias previas como la descrita en el presente artículo.

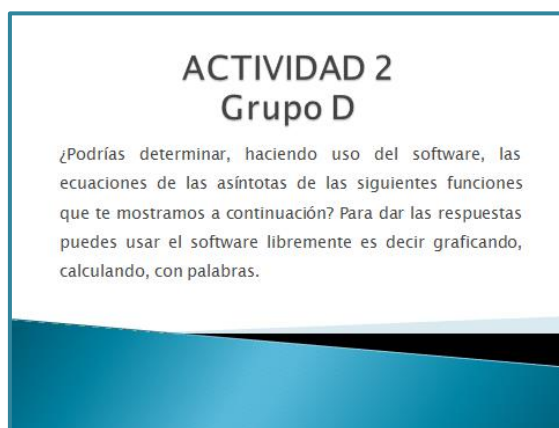


Figura 4. Encabezado de la Actividad 2

### 4.4. Consideraciones acerca del software “Mathematica” y conocimientos previos de los estudiantes

Nos parece importante señalar que si bien “Mathematica” es un software que requiere licencia y la Universidad al momento de realizar la experiencia contaba con la misma, también existe una plataforma libre, que solo requiere un correo electrónico para acceder a la misma, que los estudiantes utilizan para realizar las prácticas obligatorias que tienen en la cátedra para acreditar la materia. Al momento de realizar la experiencia los alumnos ya conocían y usaban el software, no obstante, consideramos importante incorporar un pequeño tutorial en la Actividad.

El acceso a la misma se puede realizar a través del siguiente enlace: <http://develop.open.wolframcloud.com/app/>. Los comandos que se deben utilizar para dar respuesta a los ejercicios propuestos en el Test que presentamos, están disponibles en la plataforma de manera igual a como se encuentran en el software cargado en las computadoras de los laboratorios de la Universidad.

Realizamos una breve descripción de los alcances del software:

- Permite determinar dominio e imagen de funciones a través de comandos específicos (Comando Function Domain, Function Range)
- Resuelve ecuaciones e inecuaciones en cualquier campo numérico, pudiendo elegir en cuál trabajar, en nuestro caso en Reales (Comando Reduce).
- Resuelve límites de cualquier tipo, para variables finitas e infinitas, sólo que se tiene que tener en cuenta qué si no se especifica la lateralidad del límite, sólo calcula por derecha. En caso de variables infinita: el símbolo  $\infty$  lo toma sólo como  $+\infty$ , si se quiere el cálculo en el otro sentido hay que especificarlo usando:  $-\infty$  (Comando Limit).
- Realiza gráficas de funciones expresadas en forma analítica (Comando Plot) con algunas particularidades: no muestra las discontinuidades evitables en caso que la función la posea. Suele graficar una línea vertical que une los saltos finitos o infinitos que presenta.
- Se pueden graficar rectas verticales con diversos comandos, pero no el Plot ya que solo grafica funciones, incluso todas las gráficas se pueden realizar en forma punteada, con color (Comando List Line Plot).

En cuanto a los conocimientos previos de los estudiantes, en clases anteriores se desarrolló en forma detallada las diferentes definiciones de límites, tanto finitos como infinitos. El tema de asíntotas se trabaja en el curso de admisión, pero no vinculado con el cálculo de límites, sino que se estudian funciones prototipo como las exponenciales y logarítmicas y se nombran sus asíntotas. En la escuela secundaria es un tema que pocos desarrollan, y en caso de hacerlo en general con la misma modalidad del curso de admisión, es decir a partir del estudio de funciones prototípicas agregándose las de tipo homográficas.

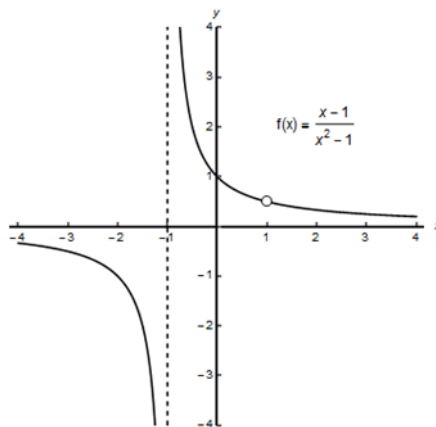
### 4.5. Detalle de la Actividad 2 del Test

Vamos a mostrar los cuatro grupos que formaron parte de la Actividad 2, con la justificación correspondiente de la elección de cada una de las funciones elegidas, con la mirada puesta en el marco teórico al cual referenciamos anteriormente.

**GRUPO A**

¿Podrías determinar, haciendo uso del software, las ecuaciones de las asíntotas de las siguientes funciones que te mostramos a continuación? Para dar las respuestas puedes usar el software libremente es decir graficando, calculando, con palabras entre otras formas que se te ocurra.

**Ejercicio 1**



**Objetivos del ejercicio:**

- Reconocer a los ejes de abscisa como asíntotas
- Analizar si en todos los puntos que se anula el denominador existe AV.
- Escribir correctamente las ecuaciones de las asíntotas
- Observar diferencias entre el gráfico propuesto y el que arroja la herramienta informática.

Esta función racional pero no homográfica (función prototipo) la presentamos en un doble registro gráfico y algebraico. El registro gráfico facilita la visualización de la discontinuidad evitable en  $x=1$  y, el registro algebraico permite determinar el dominio de la función y analizar los puntos en los cuales hay asíntotas verticales. El fin de este ejercicio es poner en evidencia si el alumno reconoce el eje de abscisas como asíntota horizontal y escribe correctamente su ecuación. También pretende revelar si el alumno asocia los valores que anulan el denominador como puntos por los que podrían pasar asíntotas verticales. Se suma a esto el uso del software, que tiene como característica no mostrar las discontinuidades evitables, es decir esos agujeros blancos no los realiza y si dibujan la gráfica pueden notar la diferencia con la que presentamos nosotros en donde ponemos en evidencia dicha discontinuidad.

**Ejercicio 2**

$$g(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$$

**Objetivos del ejercicio:**

- Observar si realizan análisis desde el registro gráfico o analítico al usar el software.
- Determinar dominio de la función para iniciar el análisis.
- Calcular los límites para determinar la única AV y la AO que posee la función y no sólo dar respuesta a partir de lo que se observa en el gráfico que incurriría en errores.

Esta función racional la presentamos en registro algebraico con el fin de evaluar el



comportamiento del alumno con el software, si determina el dominio, realiza la gráfica, reconoce que tiene asíntota oblicua. Ponemos el acento en esta última cuestión ya que, si solo observa el gráfico obtenido con el software no presenta la asíntota oblicua, para que ésta aparezca, es preciso calcularla e incorporarla en el comando para graficar, por esta razón se podría poner en duda la existencia de dicha asíntota. Por otro lado, existen dos valores que anulan el denominador y sólo en uno de ellos existe asíntota; pretendemos observar si calculan el límite verificando que no cumple la definición de asíntota vertical o si solo se quedan con la representación gráfica obtenida con el software.

---

### Ejercicio 3

Responder V o F Justificando la respuesta.

Si  $y=b$  es asíntota de  $f(x)$  entonces existe  $x=c$  perteneciente al dominio de la función tal que  $f(c)=b$ .

---

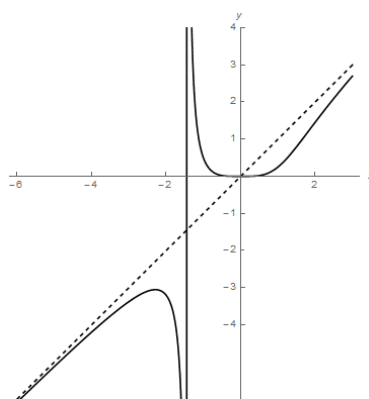
#### Objetivos del ejercicio:

- Explorar diferentes posibilidades para  $f(x)$ , que pueden transformar a la proposición en falsa o verdadera.
- Reconocer a  $y=b$  como ecuación de una AH.
- Observar si sólo recurren a ejemplos que ratifican la idea que una función no puede intersectar las asíntotas.

Esta proposición a justificar su certeza o falsedad en registro es verbal, tiene por objetivo analizar si subyacen imágenes conceptual erróneas como las siguientes: la no existencia de puntos de intersección entre la función y las asíntotas, en este caso con la asíntota horizontal; y otra, si en el conjunto imagen de la función siempre está excluido el valor de la asíntota horizontal.

---

### Ejercicio 4



#### Objetivos del ejercicio:

- Reconocer asíntotas, aunque no figuren punteadas (AV) o si existe intersección entre la asíntota y la función (AO).
- Escribir ecuaciones de las asíntotas sin contar con la expresión analítica de la función.

A través de esta función presentada en registro gráfico, pretendemos poner en evidencia varios aspectos, si los alumnos:

- Consideran a  $y=x$  como asíntota oblicua a pesar que existe un punto de intersección con la función.
-

- Son capaces de determinar la ecuación de dicha asíntota, aunque no cuenten con la expresión analítica de la función.
- Advierten la existencia de la asíntota vertical, aunque no esté graficada en línea punteada.

Logran aproximar un valor para escribir la ecuación de dicha asíntota, ya que no es un número entero y los alumnos suelen asociar las ecuaciones de asíntotas verticales con números enteros.

## GRUPO B

### Ejercicio 1

$$h(x) = \ln(-x - 3)$$

#### Objetivos del ejercicio:

- Reconocer AV en función prototípica, sólo por un lateral.

Esta función es un prototipo de función logarítmica con dos transformaciones, un desplazamiento horizontal y una reflexión vertical. De acuerdo a la experiencia docente de quien suscribe, los alumnos encuentran dificultades en reconocer este tipo de funciones, aunque hayan trabajados con funciones logarítmicas desde el curso de admisión a la carrera. La particularidad presentada en este caso es que la asíntota vertical  $x = -3$  es sólo por izquierda y pensamos escenarios posibles de resolución usando el software que podrían devenir en imágenes conceptuales erróneas o diferentes a las que suelen ser frecuentes en clases tradicionales de tiza y pizarrón. Uno de ellos está relacionado con la utilización del software sólo para graficar pues, en el resultado obtenido la asíntota vertical no se hace evidente como sucede con los gráficos que tiene asíntotas verticales cuyos límites laterales son infinitos de diferentes signos. Otro escenario posible es que los alumnos pretendan graficar dicha asíntota, y esto requiere mayor conocimiento de comandos del software ya que para ello necesitarían recurrir a la gráfica de curvas paramétricas o comandos de recta que pase por dos puntos y dichos comandos no se explican durante la experiencia de clase. Pensando en escenarios más amplios que la simple obtención de gráficos, está el relacionado con el cálculo de límites. Por defecto el software sólo los calcula por derecha y en este caso en particular es preciso calcularlo por izquierda. Esta distinción debe estar incluida en el comando, aspecto que fue explicado, y pretendemos observar si lo hacen pues estaría indicando que están aplicando las definiciones de asíntotas.

### Ejercicio 2

Las conclusiones de un estudio establecen que el número de individuos de una determinada población de una especie protegida viene dado, durante los próximos años, por la función:

$$f(t) = \frac{7500t + 5000}{t + 1}, \text{ siendo } t \text{ el número de años transcurridos. Se pide:}$$

- a) Dominio e imagen bajo el contexto del problema. Tamaño actual de la población.
- b) ¿Cómo evoluciona la población entre los años 4 y 9?
- c) Si esta función fuese válida indefinidamente ¿se estabilizaría el tamaño de la población? Justificar la respuesta.

La asíntota vertical en el contexto del problema ¿tiene algún significado?

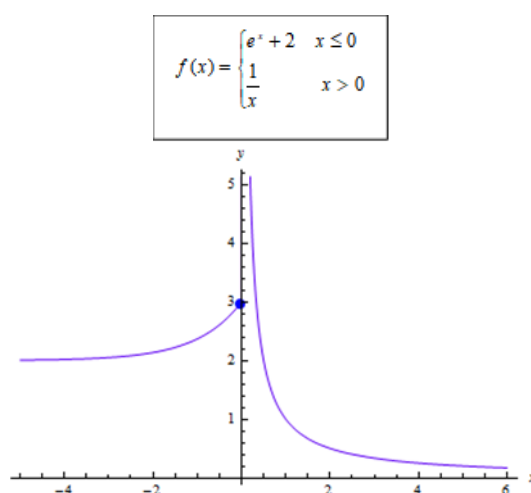


**Objetivos del ejercicio:**

- Identificar asíntotas en funciones que responden a un contexto.
- Trabajar con variables con otras denominaciones diferentes a las tradicionales.

Presentamos un problema en registro verbal y simbólico, con un modelo con prototipo de función homográfica y de variable independiente  $t$ , con la intención de saber si el alumno la reconoce y la analiza en el contexto del problema, reconociendo la validez de la asíntota horizontal sólo por derecha y la no pertinencia de la asíntota vertical. Creemos que este problema resuelto con el software nos aportaría información fundamental para identificar imágenes conceptuales de funciones con asíntotas contextualizadas en un problema, y el comportamiento del alumno al enfrentarse con una variable independiente diferente a “ $x$ ”.

---

**Ejercicio 3****Objetivos del ejercicio:**

- Estudiar la existencia de AV en puntos que pertenecen al dominio de la función.

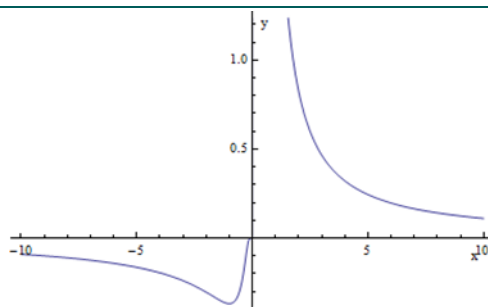
En esta oportunidad presentamos una función en dos registros, algebraico y gráfico, con el fin de poner al alumno ante una situación no trivial, la existencia de una asíntota vertical en un punto perteneciente al dominio. La utilización del software en este tipo de funciones definidas por intervalos, agiliza los cálculos de los límites laterales en  $x=0$  y para más y menos infinito. Nos interesa observar el uso del software ante esta situación, si sólo responden a partir del gráfico presentado, si confirman las asíntotas a través del cálculo de límites, teniendo en cuenta los aspectos antes mencionados.

---

**Ejercicio 4**

Tener en cuenta que el dominio de esta función es el conjunto de todos los Reales

---



**Objetivos del ejercicio:**

- Reconocer AV de un solo lateral
- Expresar la ecuación  $x=0$  como AV a pesar que el gráfico no se aproxime al eje “y”, ya que el dato del dominio contribuye a dar la respuesta correcta.

Esta función en registro gráfico tiene asíntota vertical  $x=0$  solo por derecha y asíntota horizontal  $y=0$  y este gráfico presenta características particulares: no puede precisarse si el punto  $x=0$  pertenece o no al dominio, y si la asíntota vertical por derecha es en  $x=0$  o no, ya que la distancia al eje de ordenadas no se muestra como infinitesimal. Las respuestas dadas por los alumnos utilizando el software en esta situación nos ayudarán a entender las imágenes conceptuales sobre asíntotas verticales y horizontales con utilización de software, contando solo con un gráfico. Si pretenden reproducirlo, deberán explorar alguna expresión analítica de una función que le permita reproducirlo o bien responder sólo a partir de lo que observa, teniendo en cuenta el dato del dominio.

**GRUPO C**

**Ejercicio 1**

Responder Vo F justificando la respuesta

Si  $p(x)$  es un polinomio, entonces la función dada por  $f(x) = \frac{p(x)}{x-2}$  posee una asíntota vertical cuya ecuación es  $x=2$ .

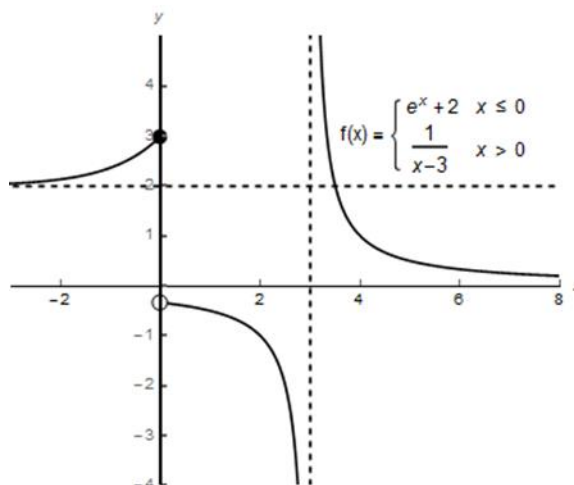
**Objetivos del ejercicio:**

- Explorar posibilidades para  $p(x)$  que permita romper con la idea que siempre que se anula un denominador para algún valor de  $x$ , existe AV en dicho valor.

A través de esta proposición pretendemos poner en evidencia la imagen conceptual errónea que en todo punto que anula el denominador de una función racional existe una asíntota vertical. El no ofrecer expresión algebraica explícita para el polinomio  $p(x)$  tiene por objetivo analizar el comportamiento del alumno al utilizar el software, es decir ver qué tipo de ejemplos exploran para justificar su razonamiento al argumentar si la proposición es verdadera o falsa.



### Ejercicio 2

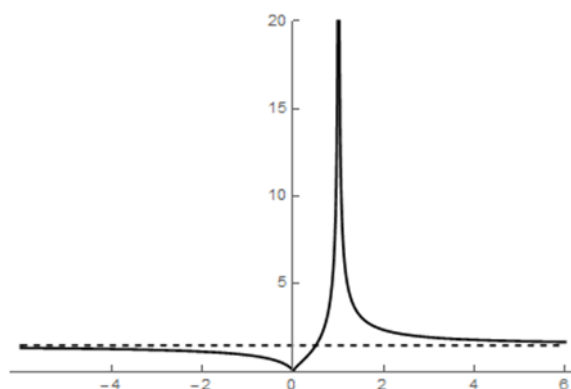


#### Objetivos del ejercicio:

- Trabajar con funciones definidas por trozos que presentan dos AH
- Observar el uso que realizan del software si trabajan en forma analítica, cuando plantean los límites para verificar las diferentes asíntotas.

Este ejercicio está presentado en dos registros, algebraico y gráfico, pues la función presenta dos asíntotas horizontales diferentes,  $y=2$  por el lado izquierdo,  $y=0$  por el derecho, una de ellas con intersección con la curva y una asíntota vertical. El fin del mismo es observar la conducta de los alumnos al utilizar el software, si buscan las asíntotas horizontales utilizando límites para más y menos infinito, cómo trabajan con una función definida por intervalos, y si en esta actividad se perciben imágenes conceptuales nuevas, propias del uso del software, o persisten las imágenes que se presentan al trabajar con lápiz y papel.

### Ejercicio 3





**Objetivos del ejercicio:**

- Reconocer AH que son atravesadas por la función.
- Poner en duda la existencia de AV, y suponer que se trata de un punto de tipo cúspide en dicho valor de  $x$ .

Esta función presentada en registro gráfico está pensada para poner en evidencia si existe o no la imagen conceptual errónea relacionada con la no intersección entre la asíntota y la curva, imagen resaltada en varios libros o páginas webs, como mencionamos previamente. Otro aspecto destacado de esta función es que la asíntota vertical no está graficada y ambas ramas se encuentran muy próximas, con el propósito de observar la interacción de los alumnos con el software ante esta situación, es decir pretendemos ver si buscan alguna expresión analítica que ejemplifique la función dada, o si bien responden solo a partir de lo observado, poniendo en duda la existencia de la AV

**Ejercicio 4**

$$g(x) = \sqrt{x \cdot (x + 3)} - x$$

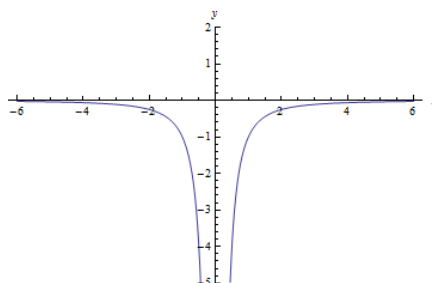
**Objetivos del ejercicio:**

- Romper con la idea errónea que si una función tiene AH entonces no se analiza la existencia de AO.

La función seleccionada en esta ocasión tiene un comportamiento distinto para más infinito y para menos infinito, por derecha presenta una asíntota horizontal y por izquierda una oblicua. Fue elegida para enfrentar a los alumnos a una imagen conceptual que prevalece en algunos libros y/o páginas web que sostiene que si una función tiene asíntota horizontal anula la posibilidad de existencia de asíntota oblicua. Al tener disponible el software nos interesa analizar qué acciones llevan a cabo los alumnos ante esta función; si sólo grafican, si analizan los límites correspondientes, si lo hacen de manera minuciosa, analizando para más y menos infinito o sólo se limitan a más infinito.

**GRUPO D**

**Ejercicio 1**



**Objetivos del ejercicio:**

- Reconocer AV donde de ambos lados se acerca a menos infinitos.
- Reconocer al eje de abscisas como AH y al eje de ordenadas como AV.

La función en registro gráfico tiene a los ejes cartesianos como asíntotas y en el caso de la



vertical la tendencia de ambos lados del cero es a menos infinito. El objetivo es analizar si los alumnos son capaces de reconocer dichas asíntotas y escribir sus ecuaciones. También nos interesa estudiar lo realizado con el software por los alumnos, es decir ver si buscan un ejemplo de función en forma analítica con el mismo comportamiento que la dada en el gráfico o si sólo responden a partir de lo observado.

---

### Ejercicio 2

$$f(x) = \frac{4x^2 - 100}{x - 5}$$

---

#### Objetivos del ejercicio:

- Analizar casos extremos donde la función coincide con la AO

Esta función es una recta con una discontinuidad evitable en  $x=5$ . El foco de este ejercicio está puesto en analizar las imágenes conceptuales que surgirían al hacer uso del software, ya que, si sólo realiza la gráfica, la discontinuidad evitable no se evidencia, muestra una recta y se podría concluir entonces que la función no tiene AO y que su dominio son los reales. Por otro lado, la gráfica de la función coincide con su asíntota oblicua; a pesar de ser un caso extremo de asíntotas cumple con la definición. A través de este ejercicio pretendemos analizar si el alumno utiliza las definiciones de asíntotas o sólo se contenta con realizar los gráficos. Pensamos que la rapidez y facilidad de realizar visualizaciones con el software podrían influir en la determinación de las ecuaciones de las asíntotas.

---

### Ejercicio 3

Determinar una función que tenga como asíntotas las siguientes rectas  $x=3$ ,  $x=1$ ,  
 $y=-4$

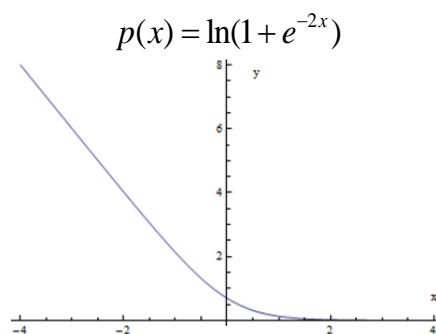
---

#### Objetivos del ejercicio:

- Explorar la búsqueda de funciones con el software y observar si salen de los ejemplos prototípicos de funciones racionales

Este ejercicio en registro verbal fue seleccionado para saber cómo operan los alumnos con el software para cumplir con lo pedido en el enunciado. Pensamos que el software podría añadir una dificultad superior a la que se presenta si el contexto de trabajo fuera el lápiz y papel. Esto es porque, en lápiz y papel podrían esbozar una gráfica que cumpla con las condiciones exigidas sin necesidad de pensar en la expresión algebraica de la función. Sin embargo, al utilizar el software es necesario buscar una fórmula de alguna función que tenga esas asíntotas. Esto nos permitiría determinar si la imagen conceptual que prevalece en la búsqueda es la de funciones racionales o surgen otras diferentes.

---

**Ejercicio 4****Objetivos del ejercicio:**

- Analizar una función, que sin estar definida por trozos, posee AH y AO en forma simultánea
- Observar si sólo responden por lo que observan en el gráfico o realizan cálculos de límites con el software.

En esta oportunidad la función se presenta en registro gráfico y algebraico y un comportamiento distinto para más infinito y para menos infinito, por derecha presenta una asíntota horizontal y por izquierda una oblicua. Con esta función ponemos a los alumnos ante la imagen conceptual relacionada con la imposibilidad de coexistencia de estos tipos de asíntotas. Al contar con la expresión algebraica de la función creemos que el comportamiento de los alumnos al usar el software sería diferente al caso similar presentado previamente que sólo estaba en registro gráfico. Pretendemos ver la incidencia de los registros en el comportamiento de los alumnos con el software.

**Tabla 2.** Grupos A, B,C,D de la Actividad 2

**Reflexiones finales**

- Goldenberg (2003) señala que la incorporación de tecnología en la clase de matemática tiene importancia y que los estudiantes pueden encontrarse con diferentes formas de presentación de actividades: aquellas que sólo requieren dar una respuesta a un problema, sin manipular la herramienta, como por ejemplo responder un formulario de autoevaluación. Otras en cambio, para resolver la actividad propuesta, se necesita que el estudiante, explore, grafique, opere, entre otras cosas con el software elegido. Nuestro Test responde a esta última característica.
- Cuando uno diseña actividades para trabajar con software específico, la herramienta condiciona dicho diseño, por este motivo explicitamos el alcance del software elegido para llevar adelante el Test.
- Las secuencias didácticas optimizan la labor docente, fomentan el trabajo colaborativo entre los estudiantes y permiten un mejor desempeño en cuanto a la exploración, conjetura, análisis y justificación que realizan los estudiantes al resolver los problemas propuestos (Ortega-Arcega, M. I., Pantoja-Rangel, R., Ulloa-Ibarra, J. T., & Zamora-Caloca, D., 2015)
- También es importante señalar que hemos sometido el Test, antes de su aplicación, a una consulta tipo encuesta, para recabar opiniones a partir de otras miradas diferentes



a los que lo diseñamos. A partir de ello, realizamos algunos ajustes de acuerdo a algunas consideraciones que se repetían en varios colegas.

### Bibliografía

- Barrios, R.; Casadei, C. (2014). Promoviendo el uso de Google Drive como herramienta de trabajo colaborativo en la nube para estudiantes de ingeniería. *Revista de Tecnología de Información y Comunicación en Educación*, 8(1), 43-56.
- Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-266.
- CodesValcarce, M.; Sierra Vázquez, M. . (2005). Recuperado el CodesValcarce, M. y Sierra Vázquez, M. (2005). Entorno computacional y Educación matemática, una revisión del estado actual. Ponencia del IX Simposio SEIEM, Córdoba Espa17 de Enero de 2011, de CodesValcarce, M. y Sierra Vázquez, M. (2005). Entorno computacional y Educación matemática, una revisión del estado actual. Ponencia del IX Simposio SEIEM, Córdoba Espa <http://www.seiem.es/publicaciones/.../cd/grup>
- Duval, R. (1993). Registres de présentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Science Cognitives*, 5, 37-65.
- Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt, *Investigaciones en Matemática Educativa II*. Grupo Editorial Iberoamericana.
- Goldenberg, P. (2003). Recuperado el 6 de Febrero de 2019, de Eduteka: <http://eduteka.icesi.edu.co/articulos/Tema19>
- Martinez, F. (2003). El profesorado ante las nuevas tecnologías. En J. Cabero, F. Martinez, & J. Salinas, *Medios y herramientas de comunicación para la enseñanza universitaria* (págs. 207-222). Panamá: Panamá: Sucesos Publicidad.
- Ortega-Arcega, M. I., Pantoja-Rangel, R., Ulloa-Ibarra, J. T., & Zamora-Caloca, D. (2015). Secuencias Didácticas para el Aprendizaje de Límite y Continuidad de Una Variable Real. Recuperado el 4 de Febrero de 2019, de <http://dspace.uan.mx:8080/jspui/handle/123456789/60>
- Prieto, F.; Vicente, S. (2006). Análisis de registros semióticos en actividades de ingresantes a la facultad de ingeniería. *I REPEM*, (págs. 203-212). La Pampa.
- Salinas, M.; Viticcioni, S. (2008). Innovar con Blogs en la Enseñanza Universitaria Presencial. *EDUTECH. Revista Electrónica de Tecnología Educativa*, 27.
- Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular references to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151-169.
- Tall, D. (1995). Cognitive Growth in Elementary and Advanced Mathematical Thinking. *Actas del PME 19, 1*, 161-175.

Tamayo, O. (2006). Representaciones Semióticas y Evolución Conceptual en la Enseñanza de las Ciencias y las Matemáticas. *Revista de Educación y Pedagogía*, 45, 37-49.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *Math. Educ. SCI. Technol.*, 293-305.

**Roxana Scorzo.** Universidad Nacional de La Matanza, Argentina. Licenciada en Gestión Educativa. Profesora de Matemática y Astronomía. Profesora adjunta, coordinadora del curso de ingreso a carreras de ingeniería de la asignatura matemática de la UNLaM, docente investigadora (categoría III). Profesora adjunta de la UTN Regional Haedo. Líneas de investigación: uso de software en la enseñanza de la matemática, hipertextos para enseñar matemática y habilidades digitales y matemáticas.  
Email: [rscorzo@unlam.edu.ar](mailto:rscorzo@unlam.edu.ar) .

**Adriana Favieri.** Profesora de Matemática y Astronomía, Licenciada en Administración de la Educación Superior y Magister en Docencia Universitaria. Actualmente es profesora asociada de la asignatura Matemáticas Aplicadas a la Aeronáutica, en la Facultad Regional Haedo de la Universidad Tecnológica Nacional y profesora adjunta de la asignatura Análisis Matemático I del Departamento de Ingeniería e Investigaciones Tecnológicas de la Universidad Nacional de la Matanza. Docente investigadora UNLaM (Categoría III). Participa en grupos de investigación sobre Educación Matemática y uso de TIC desde el año 2007. Email: [rscorzo@unlam.edu.ar](mailto:rscorzo@unlam.edu.ar) .

