Reflexión sobre la enseñanza de la integral definida con el uso de tecnología una experiencia de aula en el nivel medio superior

Eduardo C. Briceño Solís; Judith Hernández Sánchez; J. Jesús Muñoz Hernández
Universidad Autónoma de Zacatecas
México
ecbs74@gmail.com , judith700@hotmail.com, jjmunozher@yahoo.com.mx

Resumen. En México se han hecho esfuerzos por incorporar las tecnologías para el aprendizaje en el aula de matemáticas; sin embargo, existe una brecha entre sus alcances y cómo el profesor podría incluirla en su práctica docente. Una causa consiste en que el profesor no tiene certeza de qué y cómo articularla en su práctica docente. Una propuesta a esta articulación es el modelo de conocimiento tecnológico pedagógico del contenido (TPACK). Enmarcado en esto se reporta la reflexión de un profesor en el uso de tecnología para la enseñanza de la integral definida; la cual consiste en la organización, articulación y planeación de dichas dimensiones para el desarrollo de una clase; teniendo como referente metodológico, las trayectorias hipotéticas de aprendizaje (THA). Los resultados de la práctica enfatizan la evolución del modelo de articulación y planeación como parte de una forma de reflexión de la práctica del profesor. Lo anterior brinda, un referente teórico-metodológico de enseñanza de la integral definida con el uso de tecnología.

Palabras clave: Práctica docente, tecnología, integral definida, TPACK, THA

1. Práctica docente con el uso de tecnología

A continuación se reportan algunos trabajos relacionados con la reflexión de la práctica docente con el uso de tecnología para la enseñanza de las matemáticas. La intención es conocer algunos alcances y dificultades de la integración de la tecnología en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas.

Al respecto, Haciomeroglu, Bu y Haciomeroglu (2010) mencionan que la investigación sobre la enseñanza de las matemáticas con tecnología ha recibido mayor atención en los últimos años. Sin embargo, los resultados han mostrado que los profesores hacen un uso limitado de ésta, en el sentido de una incertidumbre del cómo usarlo en su práctica docente. Para contar con mayor evidencia en este trabajo se realiza un análisis del desempeño de 68 profesores en formación al realizar propuestas de clases empleando el uso de tecnología, específicamente el uso del software GeoGebra.

Recepción: 15 de septiembre 2016 - Aceptación 17 de octubre 2016.

Las propuestas de trabajo consistieron en la exploración de actividades, lecciones y materiales en páginas oficiales de geogebra para socializarlas con los demás profesores. Lo anterior con la finalidad de que éstos pudieran implementarlas en sus clases de matemáticas. Con estas acciones los autores analizaron la reflexión de los profesores sobre su práctica docente con el uso de tecnología, por medio de las presentaciones de sus propuestas, observaciones de sus clases y finalmente con reflexiones escritas al final de cada semestre. Los resultados que reportan son que el profesor mejora la forma de planear la clase complementado con algunas teorías de aprendizaje y estrategias de evaluación. Sin embargo, se encuentran con una renuencia de algunos profesores hacia el uso de la tecnología. La razón, es que esto exige modificar su práctica docente y no tienen una clara visión de cómo enseñar y evaluar; más aún, les resulta complicado qué modificación hacer del discurso matemático a diferencia de lo realizable a papel y lápiz. De esta manera, se evidencia que si bien existe un reconocimiento de las ventajas en los aprendizajes en matemáticas al usar la tecnología, el no saber cómo y qué enseñar de ésta provoca en los profesores un nivel de incertidumbre que incide en su postura ante el uso de la tecnología en sus clases.

Otra experiencia con el uso de la tecnología es reportada en González (2014). Aquí se realiza un estudio con profesores en formación en Matemática y Física, donde muestra una experiencia de introducción del uso del software de geometría dinámica desde un enfoque profesional y modos de actuación. El enfoque profesional a grosso modo, se caracteriza como la formación del profesor en la reflexión de los contenidos matemáticos a usar y en el diseño de las tareas para su clase con el uso de tecnología. Respecto a los modos de actuación, se enfoca en el conocimiento que presentan los profesores con el software al momento de estructurar las tareas con la intención de organizar acciones didácticas para el desempeño en las clases. Una tarea estructurada bajos estas dos caractarizaciones se presenta en la Figura 1.

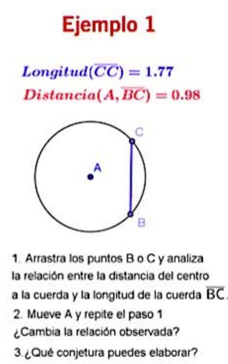


Figura 1. Ejemplo de activada realizada por el profesor (González, 2014).

El autor supuso que este ejemplo podría desmotivar el trabajo del profesor, pues solo consistía en arrastrar un punto y observar; sin embargo, ocurrió lo contrario, normó a discutir sobre otras posibilidades de estructurar la propia tarea del profesor en términos de cómo representar la distancia del centro a la cuerda; de si se dibuja o no el segmento que representa la distancia; de si, en el caso de dibujarse, es necesario que aparezcan las medidas. Es decir, la tarea propuesta desató discusión entre los profesores rescatando formas de actuar referente a su didáctica. De manera complementaria el autor recomienda evitar tareas con construcciones largas; dado que el profesor dedicaría más tiempo a la informática del software y no a la didáctica como parte importante del modo de actuación de clase. Lo anterior da una idea de que existen tareas consideradas como sencillas por el investigador, que pueden ser enriquecidas con la experiencia y conocimiento del profesor y otras que dado su diseño pueden promover un modo de actuación no didáctico en la clase.

Correspondiente a los modos de actuación de los profesores, Vitabar (2011) los tipifica según su actuar en clase. El objetivo de este estudio fue reconocer la personalidad de 90 profesores en el ejercicio de su práctica al participar en programas de actualización profesional en el uso de las Tics. El resultado fue la siguiente categorización:

- *Los resistentes*: Profesores con poca formación, por lo regular comparan las nuevas metodologías con las tradicionales, analizando la relación del esfuerzo consumido y los logros alcanzados. Expresan cierta resistencia sobre incorporar la tecnología en el aula y son críticos a la hora de evaluar su conveniencia. A estos profesores les preocupa mucho el poco dominio de la tecnología y por ello, le quitan atención a los aspectos didácticos, y al descuidarlos, la propuesta no siempre resulta ser eficiente.
- *Los novatos*: Profesores con poca experiencia, regularmente jóvenes y sin aversión al uso de tecnología. Creen en la necesidad de incorporar la tecnología en el aula basándose en la motivación que esto genera en los estudiantes. Además, relacionan el uso de tecnología con la alta calidad de una propuesta didáctica; pero eso no se refleja en su planificación didáctica, ya que el entorno informático, empaña esta actividad.
- *Los tecnócratas*: Estos profesores están muy familiarizados con el uso de la tecnología. Tienen la creencia de que la tecnología puede simplificar el trabajo en el aula. Aprenden fácilmente nuevos programas computacionales y se sienten seguros al momento de usar tecnología en el aula. Una característica bastante común en estos profesores es que el uso en sí mismo del software se sobrepone al aprendizaje de la matemática y la propuesta se transforma en una clase de informática.
- *Los experientes*: Profesores que poseen un buen nivel de reflexión didáctica de su práctica. Son capaces de entender la bondad de cierta metodología en función de la calidad del aprendizaje de sus alumnos. Estos profesores consideran a la tecnología como un medio, y no como un fin; enfocándose en el papel de la tecnología en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Éstos suelen preparar tareas donde la tecnología no es el centro, ni tampoco un obstáculo, por lo tanto potencian la dimensión didáctica de la actividad.

Lo anterior brinda un panorama de la personalidad que adopta el profesor, no generalizado, al usar tecnología en sus clases de matemáticas. Un elemento central para lograr la anterior caracterización fue la reflexión docente en el uso de las Tics. En el centro estuvo la discusión colectiva entre pares y el acompañamiento de su práctica en el programa de actualización (en plataforma moodle). Esto permitió situar un escenario de aplicación de la tecnología para clases de matemáticas, logrando que el profesor ponga cuidado en lo didáctico y no confiar en una actividad simplemente por ser similar a la que estamos acostumbrados a realizar. Es decir, el análisis de la práctica del profesor tomó en cuenta la pertinencia didáctica de las actividades planificadas, lo que obliga a hacer un gran esfuerzo por mirar atentamente qué y cómo se propone en un escenario de aplicación de la tecnología.

Las anteriores investigaciones presentan experiencias en donde interactúan la tecnología y los profesores de matemáticas. Sin embargo, De Villiers (2006) señala que se debe tener cuidado con el software de geometría dinámica cuando se utiliza para la enseñanza; pues la mayoría de las investigaciones realizadas sobre el uso de este software sólo hablan de sus potencialidades educativas y muy pocas abordan sobre los posibles inconvenientes de ser empleados en el salón de clases; y considerando que esta investigación se centra en la reflexión de una experiencia de aula, se hará una descripción de algunos inconvenientes reportados por este investigador. Algunos de ellos, en nuestra opinión, relacionados con las tipificaciones establecidas por Vitabar (2011).

- *El inconveniente del no cambio.* Éste es descrito por el mal empleo que hacen los profesores al introducir el software de geometría dinámica al salón de clases. Este empleo inadecuado del software se da cuando “los maestros usualmente utilizan el software de geometría dinámica como una extensión de la geometría que se hace con papel y lápiz. Lo anterior ocasiona que los profesores rechacen las nuevas tecnologías digitales. Luego, a fin de que las nuevas tecnologías se sigan utilizando para hacer matemáticas, tenemos que aprender a utilizarlas de manera que la actividad matemática se transforme, permitiéndonos hacer cosas que no podrían haber sido posibles antes” (Sutherland, 2005, 4; citado en De Villiers, 2006).
- *El inconveniente de primero dominar el software.* En este caso, muchos de los profesores asumen que los estudiantes deben primero dominar ampliamente el software para que pueda ser utilizado efectivamente en el salón de clases para la enseñanza y aprendizaje. Esta creencia está muy lejos de la realidad, ya que los estudiantes no necesitan conocer a profundidad el software para poder llevar a cabo exploraciones, aprendizajes y conjeturas. Él considera que esto se puede lograr simplemente con exponer al estudiante las habilidades específicas necesarias para el aprendizaje particular de un concepto.
- *El inconveniente del aprendizaje sin dolor.* Este inconveniente está relacionado con la falsa creencia de que con el simple hecho de pedir a los alumnos que trabajen un problema utilizando geometría dinámica, automáticamente el aprendizaje se dará de manera fácil. Pues a menos que el estudiante sea cuidadosamente guiado para observar y examinar lo que acontece en la pantalla, muy poco aprendizaje podría estar ocurriendo.

A manera de reflexión los trabajos descritos anteriormente brindan un panorama sobre la reflexión de la práctica docente con el uso de las tecnologías para clases de matemáticas. En este sentido, las nuevas tendencias de investigación están dando un giro hacia el diseño de actividades que promuevan estrategias de enseñanza y aprendizaje efectivas para la clase de matemáticas. En contraparte, aunque los planes de estudio promueven el uso de las tecnologías, quedan a deber el cómo mejorar la práctica docente con el uso de tecnologías para la enseñanza; de tal forma que genere aprendizaje en el estudiante sin caer en la tipificación de profesor informático en sus clases de matemáticas (Vitabar, 2011). Es así como el profesor siente que enseñar a usar la tecnología puede tomar más tiempo que el dedicado a la intención didáctica para su clase. Al respecto, González (2014) señala que esto no es ineludible, ya que un profesor puede planear y diseñar su actividad evitando construcciones largas. Aunque rescata en estas construcciones cierta intención didáctica, como hacer que el estudiante argumente sobre su conocimiento matemático.

También estos trabajos describen algunas reflexiones sobre las creencias y opiniones de los profesores al implementar la tecnología en su práctica docente. Algunas de estas inquietudes podrían estar incidiendo en la implementación de la tecnología en las aulas de matemáticas. Por esta razón aquí mencionamos aquellas que son el centro de esta investigación: cómo llevar un contenido matemático, qué didáctica se debe desarrollar y qué de la tecnología usar al momento de implementarla en la clase de matemáticas. Tales preguntas nos llevan a problematizar la necesidad de articular estos conocimientos y planear su forma de intervención en el aula. En ese sentido este trabajo provee un marco de referencia sobre la reflexión de un profesor que articula diferentes dimensiones del saber. Entre ellos está el conocimiento matemático sobre la integral definida, su planeación didáctica y qué y cómo usar la tecnología para el desarrollo de su clase de matemáticas. La complejidad radica en la articulación de estos saberes para la enseñanza de la integral definida y su aplicación en el aula.

Lo complejo de esta articulación puede estar ligado también a las diferentes concepciones del uso de la tecnología. Al respecto, Rojano (2006) señala que el uso de las tecnologías digitales en la educación se puede sintetizar en tres categorías reconocidas internacionalmente:

- Se conciben como un fin en sí mismas por lo tanto se convierten en el objeto de enseñanza de cursos clásicos de cómputo desligados del currículo.
- Se utilizan para realizar las tareas de la enseñanza tradicional de una manera tecnificada.
- Se conciben como agentes del cambio tanto de los modos de apropiación de conocimiento, como de las prácticas en el aula y de los contenidos curriculares mismos (McFarlane, 2001; citado en Rojano, 2006).

En nuestra opinión la tercera categoría justifica el empleo de las herramientas tecnológicas para la enseñanza y la necesidad de una articulación de saberes tanto del contenido matemático como de su didáctica para su adecuada incorporación al aula. Por tal razón, se presenta a continuación el marco de referencia que sirvió en esta investigación como un modelo de reflexión y de articulación de conocimientos para la integración de la tecnología en una clase de matemáticas.

2. Marco de referencia

A contiuación se presenta un modelo que propone tres conocimientos necesarios para la implementación de una clase de matemáticas con tecnología. Estos conocimientos son: el contenido matemático escolar, el didáctico y el tecnológico. La articulación de los mismos se realiza mediante las trayectorias hipotéticas de aprendizaje y que de alguna manera se constituyó en la metodología utilizada por el profesor al planificar su clase con el uso de tecnología para la enseñanza de la integral definida. De esta manera el enfoque teórico metodológico que el profesor utilizó le permitió identificar qué de un contenido matemático y cómo está condicionado a una forma didáctica de llevar la clase. A esto se añade la elección de los elementos de la tecnología que se pueden usar para que se cumplan los objetivos de la clase. Así, el modelo y la metodología sitúan en un contexto estos conocimientos con el fin de ponerlos en práctica y generar la reflexión de lo planeado y desarrollado en clase. En ese sentido se articulan los saberes propuestos por el profesor para su intervención y reflexión didáctica con el uso de tecnología.

2.1. El modelo TPACK

El TPACK fue desarrollado por Mishra y Koehler (2006) y aborda la problemática de integrar tecnología en el aula de clases. Este modelo describe los tipos de conocimiento que el profesor necesita planificar para su efectiva enseñanza de un contenido específico por medio de la tecnología.

El TPACK es una extensión del Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK) de Shulman (1986, citado en Koehler y Mishra, 2009). Esta extensión consiste en explicar cómo la comprensión que tienen los profesores de las tecnologías educativas y el PCK interactúan entre ellas para producir una enseñanza efectiva con tecnología. Este modelo está compuesto por tres núcleos principales que están relacionados con el conocimiento del profesor: conocimiento del contenido (CK), conocimiento pedagógico (PK) y conocimiento tecnológico (TK). Para este modelo las intersecciones entre estos cuerpos de conocimiento son igual de importantes. Estas intersecciones están representadas como PCK (conocimiento pedagógico del contenido), TCK (conocimiento tecnológico del contenido), TPK (conocimiento tecnológico pedagógico), y el TPACK (conocimiento tecnológico pedagógico del contenido). Este modelo y sus intersecciones se presentan en la Figura 2. En particular es la última intersección de conocimientos, conocida como TPACK, que se propone permitirá implementar a la tecnología como un agente de cambio educativo en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

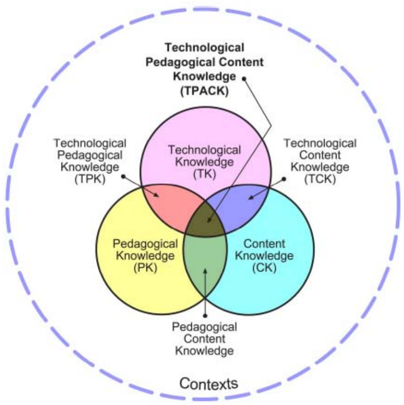


Figura 2. Modelo de Conocimiento Tecnológico Pedagógico del Contenido.

2.2 Intersección de los conocimientos del TPACK para el diseño de actividades

A continuación se presenta la descripción de cada una de las intersecciones del modelo y que fueron traducidas de Mishra y Koehler (2006). El entendimiento de cada intersección de conocimientos permitió delimitar qué en específico resultaría pertinente en la planeación de actividades por parte del profesor para el tema de la integral definida. El desarrollo de cada descripción por parte del profesor, pero ahora para el tema de la integral definida se expone en la sección tres de este mismo documento.

Conocimiento Pedagógico del Contenido. Este conocimiento es similar y consistente con la idea de Shulman (1986, 1987; citado en Koehler y Mishra, 2009). Es decir, la transformación de la materia para la enseñanza ocurre cuando el profesor interpreta la materia, encuentra múltiples maneras de representarla, y la adapta e hila los materiales instructivos para concepciones alternativas y al conocimiento previo del estudiante.

Conocimiento Tecnológico del Contenido. Éste consiste en la comprensión de cómo la tecnología y el contenido se relacionan y limitan una a otra. Los profesores necesitan dominar más que la materia que se imparte; pues ellos deben tener un profundo entendimiento de cómo el contenido se puede modificar por la aplicación del uso específico de una tecnología.

Conocimiento Tecnológico Pedagógico. Este conocimiento es el cambio de cómo enseñar con tecnologías específicas en formas específicas, valga la redundancia. Esto incluye conocer los alcances y limitaciones tecnológicas al relacionarse con los diseños y estrategias pedagógicas disciplinares apropiados. Para construir el TPK es necesario tener una comprensión más profunda de los alcances y limitaciones de las tecnologías y los contextos disciplinarios.

Aquí haremos un paréntesis que se propone necesario dada la naturaleza de nuestra disciplina. Si bien el modelo contemplado es propuesto para la enseñanza de la tecnología para cualquier disciplina, es la misma comprensión sobre los alcances y limitaciones de la tecnología afectados por el contexto disciplinar que nos permite hablar de una componente didáctica. De esta manera la última componente del modelo, llamado TPACK, que consiste en la intersección de tres conocimientos, se convierte en un conocimiento albergado en la matemática educativa. De esta forma, la última componente fue modificada en su descripción para contextualizarla al caso de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Conocimiento Tecnológico Pedagógico del Contenido. Es una forma emergente de conocimiento que va más allá de las tres componentes: contenido, pedagogía y tecnología. El TPACK es una comprensión que emerge específicamente de las interacciones entre los conocimientos matemáticos del contenido, su didáctica y la tecnología existente al caso.

Por último, el círculo punteado que encierra estos conocimientos (Figura 2) es etiquetado como contexto, y enfatiza la comprensión de que la tecnología, la didáctica y el conocimiento matemático no existen en el vacío, sino están instanciados en contextos específicos de la enseñanza y aprendizaje del contenido matemático en cuestión. Por tal motivo a continuación se presenta la aplicación del modelo TPACK al tema matemático de la integral definida en el nivel medio superior.

3. Propuesta de modelo TPACK para la enseñanza de la integral definida

A continuación describimos la articulación de las intersecciones de los conocimientos: matemático, didáctico y tecnológico, propuesta por el profesor para el tema de integral definida en el contexto de una clase en el nivel medio superior.

Conocimiento pedagógico de la integral definida. En esta dimensión el profesor tomó la siguiente definición de integral definida considerando la propuesta curricular del programa de estudios del nivel medio superior en México:

> si f es una función continua definida para $a \leq x \leq b$, dividimos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de igual ancho $\Delta x = (b - a)/n$. Hacemos que $x_0\,(= a), x_1, x_2, \dots, x_n (= b)$ sean los puntos extremos de estos subintervalos y elegimos $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ como los puntos muestra en estos subintervalos, de modo que x_i^* se encuentre en el *i-ésimo* subintervalo $[x_{i-1},\ x_i]$. Entonces la integral definida de f, desde a hasta b, es
>
> $$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$
>
> (Steward, 1999)

Además, el profesor argumenta su elección diciendo que la definición tiene una ventaja didáctica pues se puede vincular con la visualización de cálculo de áreas en distintos contextos; es decir la aproximación por sumas por exceso y por defecto en representaciones geométricas, numéricas y algebraicas.

Conocimiento tecnológico de la integral definida. En esta componente el profesor identificó qué del GeoGebra podría ser utilizado para abordar el concepto de integral mediante la visualización de áreas; como resultado él propone las siguientes construcciones en Geogebra. La finalidad de las mismas es que los estudiantes, exploren y argumenten la noción de área con la suma de rectángulos por exceso y por defecto en relación con la integral definida. Enseguida se describen las construcciones propuestas y utilizadas por el profesor en su experiencia de clase:

1. Actividad 1. En esta primera actividad se definen los valores a_1, b_1. Enseguida se definen los puntos $a = (a_1, 0)$ y $b = (b_1, 0)$ y se utiliza el comando Segmento [a, b] siendo a el límite inferior y b el límite superior del segmento [a, b]. Para poder estar cambiando los valores de a y b se les vincula una casilla de entrada. Se define el valor n (número de subintervalos) y también se le asigna una casilla de entrada para poder variar este valor. Para graficar los puntos de la partición se utiliza el comando lista1 = Secuencia [(i, 0), i, a1, b_1, (b_1 - a_1) / n]. Para obtener las coordenadas de los puntos de la partición se utiliza el comando lista2 = Secuencia [Texto[(x(Elemento[lista1, i]), y(Elemento[lista1, i])), Elemento[lista1, i]], i, 2, n]. Por último se define el valor l si = $(b_1 - a_1) / n$ para obtener la longitud de los subintervalos.
2. Actividad 2. En esta actividad iniciamos definiendo la función $f(x) = 0$. A esta función se le vincula la casilla de entrada que nombramos *Función* para poder trabajar con diferentes funciones utilizando el mismo subintervalo y partición que se definió en la Actividad 1. Definimos lista3 = Secuencia[(Elemento[x(lista1), i], f(Elemento[x(lista1), i])), i, 1, n + 1] para generar los puntos de la partición al ser evaluados por la función que se definió anteriormente. Para hacer que las coordenadas de los puntos aparezcan en el ordenador se utiliza el comando lista4 = Secuencia[Texto[(x(Elemento[lista3, i]), y(Elemento[lista3, i])), Elemento[lista3, i]], i, 1, n + 1]. Se crea el deslizador rectángulosuperiores y se define lista5 = Secuencia[Polígono[Elemento[lista3, i + 1], Elemento[lista1, i + 1], Elemento[lista1, i], (x(Elemento[lista1, i]), y(Elemento[lista3, i + 1]))], i, 1, rectángulosuperiores] para que el ordenador dibuje los rectángulos superiores de la partición. De igual manera se crea el deslizador rectángulosinferiores y se define lista6 = Secuencia[Polígono[Elemento[lista3, i], (x(Elemento[lista1, i + 1]), y(Elemento[lista3, i])), Elemento[lista1, i + 1], Elemento[lista1, i]], i, 1, rectángulosinferiores] para que el ordenador dibuje los rectángulos inferiores de la partición. En esta actividad también se utilizan casillas de control para activar o desactivar comandos.
3. Actividad 3. En esta actividad se definen los valores Sumainferior = Suma[lista6] y Sumasuperior = Suma[lista5].

4. Intencionalidad didáctica de las construciones realizadas en geogebra para la enseñanza de la integral definida

Sobre la Primera construcción con GeoGebra. La tareas de la Actividad 1 (ver Anexo) son propuestas para que los estudiantes relacionen el valor de *n* con el número y longitud de los subintervalos. De esta manera se pretende introducir la noción de partición.

Sobre la segunda construcción con GeoGebra. Las tareas planteadas en la Actividad 2 tienen como objetivo realizar una aproximación del área bajo el segmento parabólico, $y = \frac{x^2}{4}$ en el intervalo [1, 6] utilizando sumas superiores. Los estudiantes tendrán que completar una tabla utilizando las sumas superiores; con la intención de que ellos relacionen las alturas de los rectángulos con los puntos de la partición. En la última parte de esta actividad se les pide que realicen el llenado de la tabla pero ahora con una partición de seis subintervalos; con el propósito que relacionen que a más particiones que tenga el subintervalo se obtiene una mejor aproximación del área.

Sobre la Tercera construcción con GeoGebra. Las tareas propuestas en la Actividad 3 tienen como objetivo que los estudiantes identifiquen que conforme el número de intervalos aumenta la diferencia entre las sumas superiores e inferiores disminuye. De esta manera se introduce de forma intuitiva a la integral definida como la aproximación del área bajo la curva y su relación con la idea de límite.

Después de que los estudiantes hayan terminado el último ejercicio de la Actividad 3 se espera tendrán los elementos para formalizar la definición de integral definida desde el enfoque de Riemann propuesto en el programa de matemáticas del nivel medio superior.

Hasta el momento se han presentado los conocimientos que fueron identificados y construidos por el profesor mediante el modelo TPACK; sin embargo, esto no le permitió soslayar la organización de esta información para su implementación en clase. Esto fue resuelto por el profesor quien adoptó como herramienta metodológica para la planeación, ejecución y evaluación de su clase las trayectorias hipotéticas de aprendizaje. Esta herramienta se presenta a continuación.

5. La planeación de la aplicación de la enseñanza de la integral definida

Como ya se dijo anteriormente, aunque existe en el TPACK una parte didáctica que ayuda a la intencionalidad de lo que se quiere aprender, ésta no proporciona una guia o plan de trabajo que complementen la reflexión docente. Para ello se consideró el término trayectoria hipotética de aprendizaje (THA) de Simon (1995).

La THA ofrece una descripción de aspectos clave para la planeación de clases de matemáticas. Una THA se basa en los objetivos de aprendizaje propuestos para los estudiantes; en las tareas matemáticas que se utilizarán para promover estos objetivos y en las hipótesis que tiene el profesor acerca de los procesos de aprendizaje de los estudiantes en torno al contenido matemático a enseñar (Figura 3).

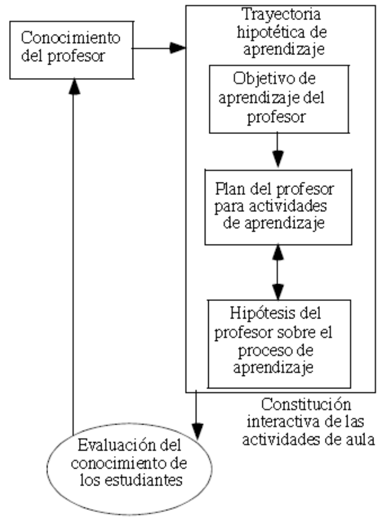


Figura 3. Ciclo de la enseñanza de las matemáticas de abreviado (Simon, 1995,136).

Este diagrama se describe de la siguiente manera. El objetivo de aprendizaje que tiene el profesor indica la dirección de la trayectoria hipotética de aprendizaje. En ese sentido se traza un camino por el que puede transitar el aprendizaje; esta hipótesis es contrastada posteriormente con lo obtenido después de la clase. Para ello se parte del supuesto que el aprendizaje individual de los escolares recorre caminos idiosincráticos, pero frecuentemente similares. Esta hipótesis incluye algunos supuestos como que el aprendizaje de un individuo presenta ciertas regularidades; que la comunidad de la clase condiciona la actividad matemática de maneras frecuentemente predecibles; y que muchos de los escolares en la misma clase pueden beneficiarse de la misma tarea matemática (Steffe, von Glasersfeld, Richards y Cobb, 1983, 118). De esta manera, una THA le proporciona al profesor criterios para seleccionar un diseño instruccional particular; por lo tanto, el profesor toma sus decisiones del diseño basado en su mejor conjetura acerca de cómo puede suceder el aprendizaje. El proceso se considera cíclico pues con cada experiencia se enriquece el conocimiento del profesor a través de la reflexión, lo que incidirá en la planeación de una nueva THA.

En este caso, Simon (1995) señala que la creación y la continua modificación de la THA es la pieza central del modelo de reflexionar sobre la clase de matemáticas. El autor señala que la interacción colectiva entre el profesor y los estudiantes o cara a cara profesor y estudiante, constituye una experiencia diferente a la que el profesor había anticipado. Esta interacción mediada por las actividades del salón de clases conlleva a una modificación en las ideas y conocimiento del profesor para darle sentido a lo que acontece y aconteció en el salón de clases. El diagrama de la Figura 3 indica que la evaluación del conocimiento de los estudiantes puede contraer adaptaciones en el conocimiento del profesor que, sucesivamente, llevan a una nueva THA o su modificación.

Finalmente se presentan algunos aspectos metodológicos que permitieron evaluar la experiencia de clase con el uso de tecnología en la enseñanza de la integral definida; además de posibilitar mostrar el contexto en el cuál se llevó a cabo la experimentación.

6. Aspectos metodológicos para la toma de datos

La puesta en escena del TPACK para la integral definida con el uso de Geogebra, con una planeación basada en una THA se realizó con estudiantes de un bachillerato del estado de Zacatecas. La forma en que se reportan los datos consiste en la planeación de la THA del profesor como evidencia a priori y su confrontación con la experiencia después de clase como la información a posteriori. La planeación se presenta en tres momentos, donde se describen y articulan los conocimientos del TPACK. Para la información a posteriori se presenta la reflexión como resultado de la experiencia de aula con el TPACK propuesto para la integral definida.

7. Desarrollo de la experimentación

El Objetivo de aprendizaje planteado por el profesor corresponde a una de las competencias establecidas por la dirección general de bachillerato:

> *Calcula e interpreta áreas bajo la curva mediante las Sumas de Riemann en la resolución de problemas en un entorno tecnológico* (DGB, 2011, 19).

En ese sentido la propuesta del profesor intenta desarrollar en los estudiantes la competencia que estipula el programa. El diseño de la actividad es una aproximación a la definición de la integral definida mediante las sumas de Riemann. Ésta, pretende que los estudiantes de bachillerato puedan apropiarse de la noción del concepto de integral definida introduciendo su desarrollo mediante el cálculo de áreas. Las actividades fueron tomadas del trabajo de Cantor (2013) con algunas adaptaciones para el entorno en Geogebra. A continuación se describen las actividades[2] que desarrolló el profesor donde se explica su intención didáctica, matemática y tecnológica articulada.

Actividad de inicio. Iniciaré la actividad pidiendo a los estudiantes que mencionen como se calcula el área de figuras comunes como rectángulo, triángulo y polígonos irregulares (Figura 4).

[2] La actividad es tomada de Cantor (2013) y diseñada en Geogebra. El lector puede descargar tanto la hoja de trabajo como el archivo Geogebra en https://www.geogebra.org/m/Pu4bSAQn.

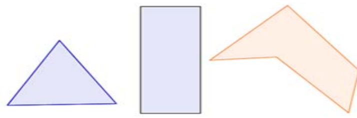


Figura 4. Figuras geométricas para calcular su área

Continuaré la actividad preguntando a los estudiantes como calcular el área de figuras irregulares como las que se muestran en la Figura 5.

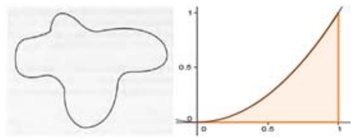


Figura 5. Figura deforme y curva para aproximar el área.

Termino esta actividad presentando a los estudiantes algunos problemas en contextos no matemáticos en donde es utilizada la integral definida, específicamente para el cálculo de áreas. Lo anterior dado que el enfoque por competencias requiere que cualquier contenido escolar se presente en contextos cercanos a los estudiantes.

Actividad 1. Iniciar la Sesión con GeoGebra. La construcción hecha en geogebra intenta que el estudiante reflexione mediante la observación y la partición de sub-intervalos, dado un intervalo [a, b] como se muestra en la Figura 6.

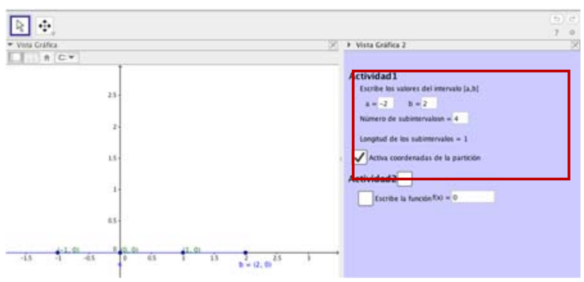


Figura 6. Actividad en geogebra para la división de sub-intervalos señalado en el recuadro.

Actividad 2. Se Inicia con la función dada por $y = \frac{x^2}{4}$, donde se pide dividir el intervalo [1, 6] en 4 subintervalos iguales y calcular *f(x)* en cada punto del extremo derecho de la partición; además se pide anotar los valores obtenidos en la tabla (ver anexo y Figura 7).

x	f(x)	Área de los rectángulos
		Total

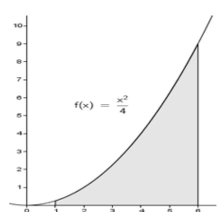


Figura 7. Hoja de trabajo del estudiante para Actividad 2 del Geogebra.

Se pide además que dibuje en el gráfico de la Figura 7 los rectángulos que tienen como base los subintervalos de la partición y como altura el valor de la función en el punto indicado anteriormente (extremo derecho). A continuación, se les pide que calculen el área de cada rectángulo resultante, asi como la suma de las áreas obtenidas. Posterior a ello se pide repetir la actividad, pero ahora para una partición de seis subintervalos. Al finalizar se comparan las tablas y los gráficos obtenidos en ambas particiones de subintervalos. Para concluir, se termina con la siguiente pregunta: *¿Cuál considera que se aproxima mejor al área sombreada bajo la curva? y ¿Por qué?*

Actividad 3. Después de haber realizado el proceso de particiones y ver como ésto muestra la noción de acumulación del área bajo la curva (Actividad 2), el objetivo de la Actividad 3 consiste en que el estudiante aproxime el área por exceso y defecto de rectángulos inferiores y superiores. De tal forma que con el uso de GeoGebra pueda visualizar la diferencia de ambas áreas para particiones realmente grandes y así analizar qué pasa con el margen de error (ver en Figura 8). Esta actividad resulta importante para el profesor pues en particular es una tarea que no es posible hacer de manera tradicional a lápiz y papel y que le permite al estudiante visualizar la potencialidad didáctica de la tecnología y en especial de Geogebra.

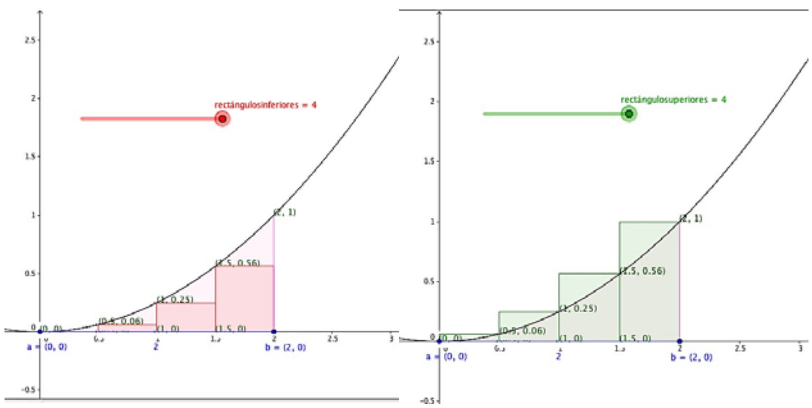


Figura 8. Cálculo de áreas por medio de rectángulos inferiores y superiores de una función.

Enseguida se le pide aproximar el área acotada por la curva $y = x^2$, el eje x y las rectas $x = 0$ y $x = 2$. Lo anterior, mediante el área de rectángulos; la indicación es dividir el intervalo [0, 2] cuando la partición es n=5,26,50,77,100. La intención es que registren en una tabla las sumas inferiores, superiores y las diferencias de las áreas resultantes por exceso o defecto. Con base en la información obtenida se pide que responda las siguientes preguntas:

a) ¿Qué sucede con los valores de las sumas superiores y de las sumas inferiores a medida que el número de intervalos aumenta?

b) ¿Qué se puede concluir con esos valores?

c) ¿Cuál es el valor aproximado del área acotada por la curva $y = x^2$ en el intervalo [0, 2]?

d) ¿Habrá una mejor manera de aproximar el área sombreada?

La intención es que los estudiantes identifiquen que a mayor número de intervalos, el margen de error de las diferencias de las áreas de las sumas inferiores y superiores de los rectángulos es cada vez menor y que además tiende a cero. Lo que permite al profesor institucionalizar la integral definida de funciones continuas en un cierto intervalo [a, b].

8. Algunos resultados de la propuesta THA-TPACK de la intergal definida

Finalmente, reportamos algunos resultados de las actividades que consideramos relevantes en la experiencia del profesor de su propuesta TPACK-THA; específicamente, dificultades, aciertos, así como algunas reflexiones y sugerencias de mejora.

Antes de iniciar la Actividad 2 el profesor considera necesario primero presentar un ejemplo y para ello editar la función *f(x)=x/2* para ilustrar la suma de rectángulos superiores en un intervalo dado. La vizualización del número de rectángulos inferiores y superiores se logra con el deslizador en la propuesta en Geogebra (ver Figura 9).

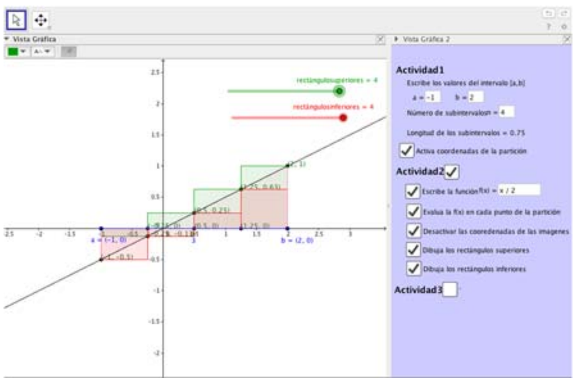


Figura 9. Ilustración de aproximar el área de una recta con el uso de Geogebra.

Luego, el profesor siente la necesidad de ilustrar cómo calcular el área de cada rectángulo explicando como obtener su altura para enseguida multiplicar por la longitud de su base como se muestra en la Figura 10.

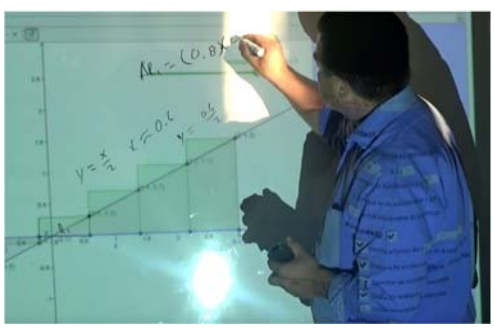
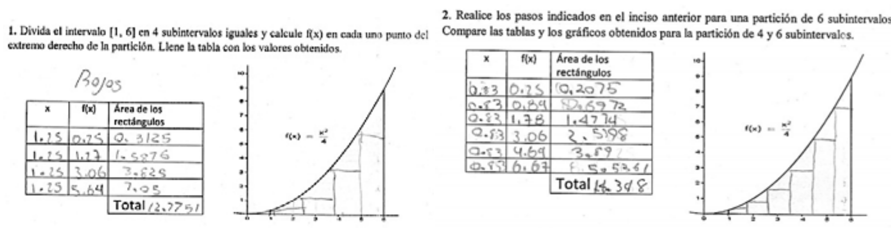


Figura 10. Explicación del profesor cómo calcular el área de cada rectángulo.

En la percepción del profesor el estudiante logra comprender que se debe evaluar en la función de cada subintervalo; en este caso, un punto de la base del rectángulo (el punto del extremo derecho del intervalo para los rectángulos superiores y punto del extremo izquierdo para los inferiores) para obtener la altura del rectángulo. Posterior a esto el estudiante realiza la Actividad 2, haciendo el registro de cada área de rectángulos superiores o inferiores en una tabla para 4 y 6 particiones (ver Figura 11).



1. Divida el intervalo [1, 6] en 4 subintervalos iguales y calcule f(x) en cada uno punto del extremo derecho de la partición. Llene la tabla con los valores obtenidos.

Bojos

x	f(x)	Área de los rectángulos
1.25	0.75	0. 3125
1.25	1.27	1.5876
1.25	3.06	3.825
1.25	5.64	7.05
		Total 12.7751

2. Realice los pasos indicados en el inciso anterior para una partición de 6 subintervalos. Compare las tablas y los gráficos obtenidos para la partición de 4 y 6 subintervalos.

x	f(x)	Área de los rectángulos
0.83	0.25	0.2075
0.83	0.89	0.6972
0.83	1.78	1.4774
0.83	3.06	2.5398
0.83	4.69	3.89
0.83	6.67	5.5361
		Total 14.348

Figura 11. Respuestas de estudiantes a la actividad 2

Sin embargo el profesor reporta que en el llenado de la primera tabla hubo confusión. Los estudiantes confundieron la variable x con Δx por lo que llenaron la columna de la variable x con el valor del incremento de los subintervalos. En cuanto a la gráfica, los estudiantes no le tomaron sentido (o no entendieron las instrucciones). Por lo que algunos de ellos no dibujaron los rectángulos como se pedía. El profesor al reflexionar sobre este suceso se da cuenta de que no especificó si los rectángulos eran los superiores o inferiores. Por lo anterior concluye que es necesario mejorar esta actividad y que tal vez se vería fortalecida si les pidiera a los estudiantes que lo hicieran para ambos casos.

Posterior a sus registros, en su hoja de trabajo, el profesor formaliza esta sumatoria de áreas de los rectángulos hacia la integral definida. De esta manera, el profesor escribe sobre el pintarrón las fórmulas matemáticas del área de rectángulos aproximándolos mediante la simbología utilizada en las sumas de Riemman, para posteriormente poder llegar a la noción de integral definida (Figura 12).

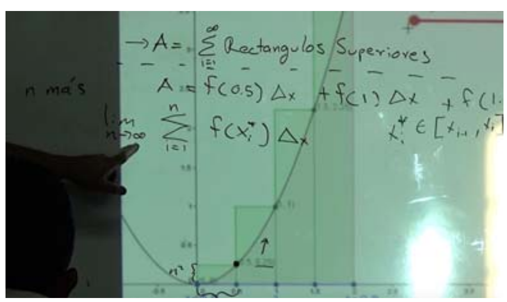
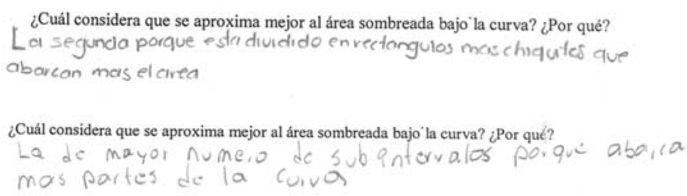


Figura 12. Formalización del profesor de sumas de rectángulos superiores a Riemman.

Lo anterior es abordado por el profesor tal vez con la intención de aproximarse a la definición formal de sumas de Riemman; sin embargo, logra identificar cuál es el significado de referencia propuesto por el programa de estudios y que es introducir a la integral definida como una herramienta para el cálculo de áreas. De esta manera, para el profesor la pregunta importante de la actividad es: *¿Cuál considera que se aproxima mejor al área sombreada bajo la curva? y ¿Por qué?*



¿Cuál considera que se aproxima mejor al área sombreada bajo la curva? ¿Por qué?
La segunda porque esta dividido en rectangulos mas chiquitos que abarcan mas el area

¿Cuál considera que se aproxima mejor al área sombreada bajo la curva? ¿Por qué?
La de mayor numero de subintervalos porque abarca mas partes de la curva

Figura 13. Respuestas de estudiantes respecto al área bajo la curva.

De esta manera, desde la mirada del profesor, la actividad cumple con el objetivo de aproximar el área con la suma de Riemman creando en el estudiante, la idea de aproximación al área bajo la curva por medio de la sumatoria de áreas de rectángulos. Posterior a esto el profesor relaciona estas ideas de sumatoria con la integral definida (Figura 14).

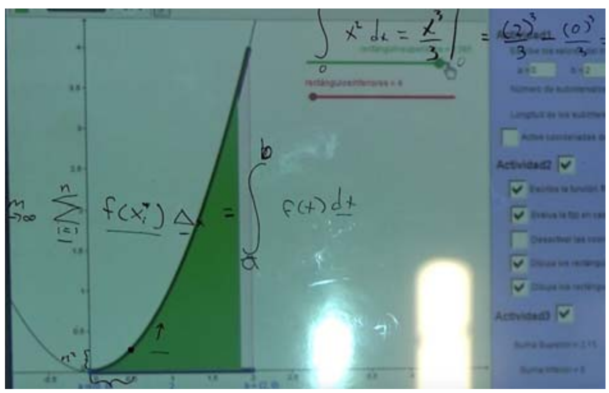


Figura 14. Formalización de la suma de Riemann a la integral definida con el uso de Geogebra.

Esta idea de aproximación al área por medio de rectángulos se continúa en la Actividad 3, donde el activar su casilla permite ver el cálculo de las sumatorias inferiores y superiores de forma directa. El estudiante registra las áreas de las sumas inferiores y superiores en una tabla para cierto valor de *n* que va incrementando con la intención de que el estudiante analice las diferencias de las sumas inferiores y superiores. Considerando que él se da cuenta de que la diferencia es cada vez menor cuando *n* se hace considerablemente más grande. Se ilustra un dato interesante de un equipo de estudiantes donde describen la relación entre la cantidad de subintervalos (*n*), la diferencia y la aproximación al área (Figura 15).

Número de particiones	Suma superior	Suma Inferior	Diferencia
n = 5	3.52	1.92	1.6
n = 26	2.82	2.51	0.31
n = 50	2.75	2.59	0.16
n = 77	2.72	2.61	0.11
n = 100	2.71	2.63	0.08

Con base en la información obtenida en la tabla responda las siguientes preguntas.

a) ¿Qué sucede con los valores de las sumas superiores y los de las sumas inferiores a medida que el número de intervalos aumenta?

La sumas superiores disminuyen a medida que aumentan los intervalos
Las sumas inferiores aumentan a medida que aumentan los intervalos

b) ¿Qué se puede concluir con esos valores?

A mayor numero de subintervalos menor diferencia y mayor aproximación ala area.

Figura 15. Respuestas de los estudiantes a la Actividad 3.

Estas respuestas parecen dar evidencia de que se cumple el objetivo de la actividad 3. De esta manera la tecnología juega un papel importante al permitir a los estudiantes visualizar y calcular el área bajo la curva mediante distintas *n* particiones.

Como se dijo en el marco referencial en el uso de la tecnología y su implementación en el aula es importante no sólo evidenciar los alcances sino las dificultades o limitantes que pueden presentarse. Por esta razón se considera necesario mostrar algunas dificultades reportadas por el profesor después de su experiencia en el aula con el uso de tecnología

- El profesor considera que debió hacer una discusión del por qué se les llama sumas superiores y sumas inferiores siendo deseable, agregar esto en la Actividad 3.
- Propone incluir a la Actividad 3 más puntos decimales en los resultados de la suma superior e inferior (ver Figura 16), esto debido a que los estudiantes pueden asumir que las sumas superiores e inferiores serán iguales para algún determinado valor de *n*. Esto sucedió cuando $n = 2500$, en este caso los estudiantes asumieron que la suma superior era igual a la suma inferior (ver Figura 16).

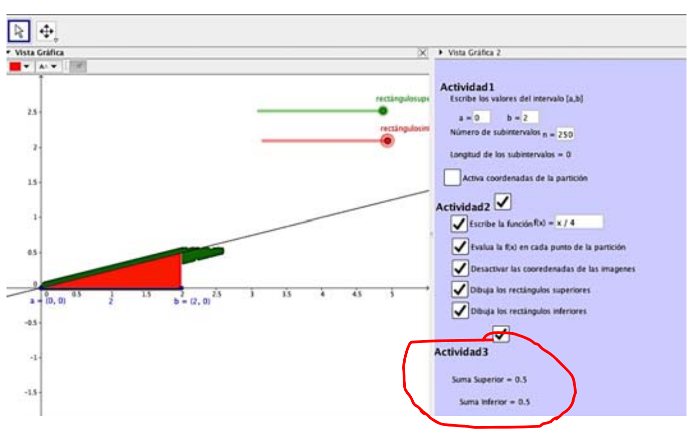


Figura 16. Aproximación al área con el uso de geogebra para *n*=100

- Considera importante enriquecer los diseños, primero haciendo que los estudiantes trabajen con intervalos de diferente longitud y con puntos cualesquiera dentro de cada subintervalo. Para luego hacerlos ver que se consideran subintervalos de igual longitud y esto podría facilitar los cálculos para guiarlos a la construcción de la definición de integral definida.

La experiencia del profesor posibilitó proponer un rediseño de las actividades propuestas en geogebra. Específicamente, agregar otra casilla donde se observé la diferencia de las sumas y que el resultado contenga más cifras decimales. Otro rediseño que debe considerarse en la actividad en Geogebra es el cálculo de sumas superiores e inferiores para funciones decrecientes. Por otra parte, se considera ampliar la Actividad 2, incluyendo el cálculo de áreas superiores e inferiores; ya que esto pueda fortalecer la comparación de ambas áreas y desarrollar la idea de aproximación al área bajo la curva en el intervalo propuesto.

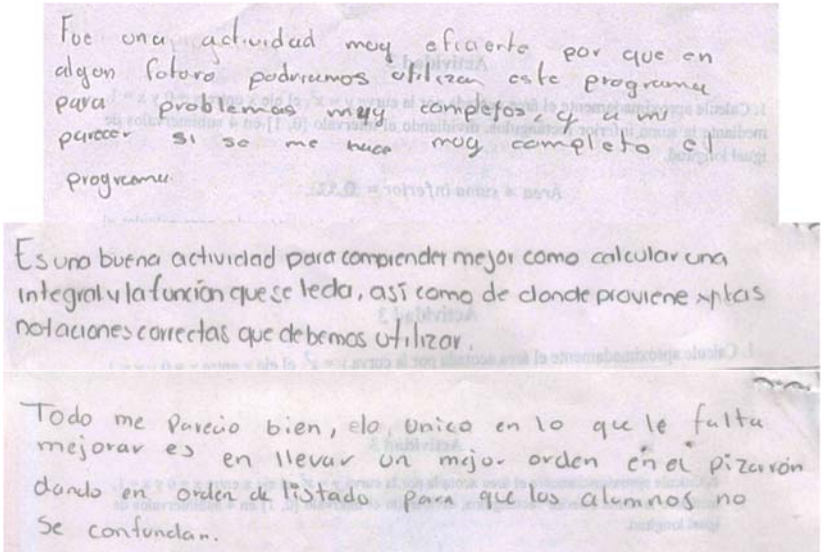
9. Conclusiones y reflexiones

La propuesta de TPACK-THA de la integral definida da evidencia de lograr el objetivo general de la clase que es favorecer la siguiente competencia:

> *Calcula e interpreta áreas bajo la curva mediante las Sumas de Riemann en la resolución de problemas en un entorno tecnológico* (DGB, 2011, p. 19).

El profesor en su planeación y ejecución de la clase, manifestó siempre un enfoque visual de la definición: $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$. Como apoyo y para complementar las actividades en GeoGebra el profesor desarrolló el conocimiento matemático sobrescribiendo en el pintarrón paso a paso de dicha expresión sumatoria (ver Figuras 10, 12 y 14).

Esta forma visual de desarrollar la suma de Riemann en las Actividades 1 y 2, se puede ver su influencia positiva en la respuesta a dos preguntas de la Actividad 3 que son: *¿Qué sucede con los valores de las sumas superiores y los de las sumas inferiores a medida que el número de intervalos aumenta?, y ¿Qué se puede concluir con esos valores?* En la Figura 15 se evidencia un dato de respuesta de tres estudiantes y que la mayoría coincide en que a mayor número de subintervalos, mayor aproximación al área bajo la curva. La intencionalidad didáctica de que el estudiante observe y registre las diferencias de las áreas de rectángulos superiores e inferiores, permitió esta justificación en los estudiantes. Por lo que el profesor considera que el TPACK de la integral definida que integra la definición de sumatoria con una didáctica visual y complementada con uso de deslizadores y activación de casillas en Geogebra, brindó buenos resultados en la comprensión de la noción de área bajo la curva en los estudiantes y que se aproxima a su formalización en la integral definida en un intervalo dado. Esto lo expresa el estudiante cuando se les preguntó que les parecia la clase (Figura 17).


Fue una actividad muy eficiente por que en algun futuro podriamos utilizar este programa para problemas muy complejos, y a mi parecer si se me hace muy completo el programa.

Es una buena actividad para comprender mejor como calcular una integral y la función que se le da, así como de donde proviene y las notaciones correctas que debemos utilizar.

Todo me parecio bien, lo unico en lo que le falta mejorar es en llevar un mejor orden en el pizarron dando en orden de listado para que los alumnos no se confundan.

Figura 17. Opiniones de los estudiantes respecto a la clase.

Sin embargo el profesor considera la necesidad de rediseñar algunas actividades, y realizar una propuesta que es acorde no sólo al objetivo planteado sino a la postura visual que adoptó desde un inicio. Además, es consciente de que ésto modificará su THA lo que le permite abrir nuevas expectativas y formas de enseñanza.

A manera de reflexión este trabajo brinda un modelo de reflexión particular del profesor sobre su propia práctica. En las referencias reportadas anteriormente podemos ver que el profesor reflexiona sobre su práctica en la aplicación de diseño de actividades con uso de tecnología. Sin embargo, en todos ellos no existe un criterio de reflexión de la planeación de la clase y el papel que juega ésta. En este caso se identificó que la planeación de clase tiene un papel central e indispensable en la implementación de la tecnología en el aula de matemáticas. Pues si bien el TPACK le dijo al profesor qué conocimiento se propone como necesario para la enseñanza de las matemáticas con tecnología, la pregunta del cómo articular estos conocimientos y llevarlos al aula tuvo que ser contestada con la THA que se constituyó en una herramienta metodológica para la planeación de clase. Por lo que la reflexión no solo consiste en tener y articular los tres saberes mencionado u otros, sino en pensar cómo llevarlos al aula de tal forma que no pueda causar confusión y favorezca la competencia que un profesor asume.

Por otra parte, el profesor toma la postura de González (2014), que consiste en aplicar una construcción ya hecha con tecnología donde el estudiante manipule, observe y responda. Podría pensarse que esta postura puede no ser de interés del estudiante, ya que quiere aprender su manejo en una era mediatizada por recursos tecnológicos. Pero él considera que va bien de la mano con la práctica de un *profesor experiente*. Pues, a veces enfocarse mucho en los menus y el funcionamiento de una tecnología en la clase, primero toma mucho tiempo y segundo deja fuera la intención didáctica y de aprendizaje. Por lo que la THA de la integral definida logró de cierta forma, mostrar de forma visual la sumatoria de Riemann complementado con activación y movimiento del deslizador en Geogebra.

De esta manera se considera que se brinda un marco de referencia para la profesionalización docente, basada en una articulación de saberes con propósito y rediseño del mismo para la mejora de la práctica docente. En este sentido lo novedoso es que este marco de referencia surge desde una experiencia de aula mediada por la matemática educativa.

10. Reconocimientos

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo brindado para la realización de mis estudios de maestría, becario No. 622197.

11. Bibliografía

Cantor, G. (2013). *Elementos para la enseñanza de la integral definida como área bajo la curva*. (Tesis inédita de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia

De Villiers, M. (2006). "Some pitfalls of dynamic geometry software". *Learning and Teaching Mathematics,* 4: 46-52.

DGB. (2011). Programa de estudios de Cálculo Integral.

González, J. (2014). Formación inicial de profesores en geometría con GeoGebra. *Revista Iberoamericana de Educación,* 65: 161-172.

Haciomeroglu, E., Bu, L., y Haciomeroglu, G. (2010). "Integrating technology into mathematics education teacher courses". En *Proceedings of the First North American GeoGebra Conference 2010.* NY: Ithaca College, 27-32.

Hernández, A. y Quintero, A. (2009). "La integración de las TIC en el currículo: necesidades formativas e interés del profesorado". *REIFOP*, 12(2): 103–119.

Mishra, P. y Koehler, M. (2009). "What is technological pedagogical content knowledge?". *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education,* 9(1): 60-70.

Mishra, P. y Koehler, M. (2006). "Technological pedagogical content knowledge: A framework for integrating technology in teacher knowledge". *Teachers College Record,* 108(6): 1017-1054.

Rojano, M. T. (2006). Los principios básicos de los modelos EFIT y EMAT. En: Rojano Ceballos, M. T. (ed.). (2006). *Enseñanza de la Física y las Matemáticas con Tecnología: Modelos de transformación de las prácticas y la interacción social en el aula*. México: Secretaría de Educación Pública, 15-23.

Shulman, L. (1986). "Those who understand: Knowledge growth in teaching". *Educational Research,* 15(2): 4-14.

Stewart, J. (1999). *Cálculo Diferencial e Integral.* México: International Thompson Editores.

Simon, M. A. (1995). "Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective". *Journal for Research in Mathematics Education,* 26(2): 114-145.

Vitabar, F. (2011). "Cursos de GeoGebra para profesores en Uruguay: valoraciones, padecimientos y reclamos". *XIII CIAEM-IACME*, Recife, Brasil.

ANEXO

Hoja de trabajo de los estudiantes

Integrantes de equipo ____

____

Fecha: __________

Actividad 1

1. ¿Cuál es la longitud del intervalo [-2, 2]?

2. ¿Cuál es la longitud de cada subintervalo si se efectúa una división del intervalo [-2, 2] en 4 partes iguales?

¿En 5 partes de igual longitud?

¿En 20 partes de igual longitud?

¿Qué sucede con la longitud de cada subintervalo conforme n aumenta?

3. ¿Cuántos subintervalos se obtienen si se realiza una división del intervalo [-2, 2] en subintervalos iguales de longitud 1.33?

¿Cuántos subintervalos se obtienen si se realiza una división del intervalo en subintervalos iguales de longitud 0.5?

¿Cuántos subintervalos se obtienen si se realiza una división del intervalo en subintervalos iguales de longitud 0.25?

¿Qué sucede con el valor de n conforme la longitud de cada subintervalo disminuye?

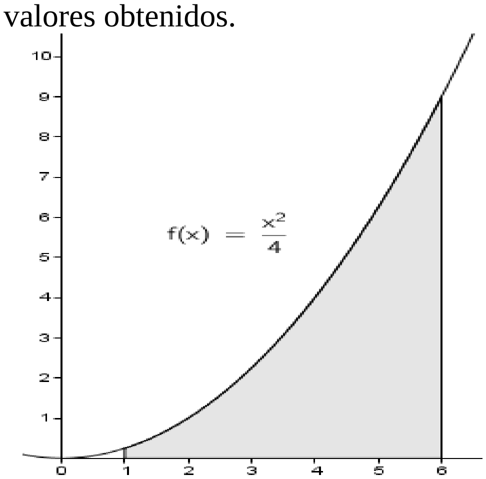
¿Cuál es la longitud de cada subintervalo si el intervalo [-2, 2] se parte en *n* subintervalos iguales?

Actividad 2

Sea la función dada por $y = x^2/4$

1. Divida el intervalo [1, 6] en 4 subintervalos iguales y calcule f(x) en cada uno del extremo derecho de la partición. Llene la tabla con los valores obtenidos.

x	f(x)	Área de los rectángulos
		Total



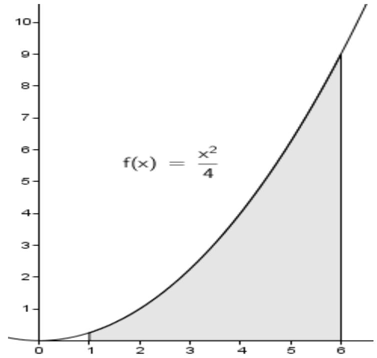
Dibuje en el gráfico los rectángulos que tienen como base los subintervalos de la partición y altura el valor de la función en el punto indicado.

Calcule el área de cada rectángulo obtenido en el punto anterior.

Calcule la suma de las áreas obtenidas en el inciso anterior.

2. Realice los pasos indicados en el inciso anterior para una partición de 6 subintervalos. Compare las tablas y los gráficos obtenidos para la partición de 4 y 6 subintervalos.

x	f(x)	Área de los rectángulos
		Total



¿Cuál considera que se aproxima mejor al área sombreada bajo la curva? ¿Por qué?

Actividad 3

1. Calcule aproximadamente el área acotada por la curva $y = x^2$, el eje x entre $x = 0$ y $x = 1$, mediante la suma inferior rectángulos, dividiendo el intervalo [0, 1] en 4 subintervalos de igual longitud.

$$\text{Área} \approx suma\ inferior = \_\_\_\_\_\_$$

2. Utilizando la misma partición calcular la suma superior de rectángulos para calcular el área acotada por la curva $y = x^2$, el eje x entre x = 0 y x = 1.

$$\text{Área} \approx suma\ superior = \_\_\_\_\_\_$$

3. Calcula :$diferencia = \ suma\ superior - suma\ inferior = \_\_\_\_\_\_$

4. Calcule aproximadamente el área acotada por la curva $y = x^2$, el eje x entre $x = 0$ y $x = 2$, mediante área de rectángulos, dividiendo el intervalo [0, 2] si

Número de particiones	Suma superior	Suma Inferior	Diferencia
n = 5			
n = 26			
n = 50			
n = 77			
n = 100			

Con base en la información obtenida en la tabla responda las siguientes preguntas.
a) ¿Qué sucede con los valores de las sumas superiores y los de las sumas inferiores a medida que el número de intervalos aumenta?
b) ¿Qué se puede concluir con esos valores?
c) ¿Cuál es el valor aproximado del área acotado por la curva $y = x^2$ en el intervalo [0, 2]?
d) ¿Habrá una manera de aproximar mejor el área sombreada?