INVESTIGACIONES SOBRE LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO

Carlos Armando Cuevas Vallejo & François Pluvinage

Departamento de Matemática Educativa
Cinvestav del IPN

Abstract – This article presents research that led to the design of the project "Teaching Calculus". It puts more emphasis on research undertaken in the Department of Mathematics Education Cinvestav-IPN, as background to the creation of the National Seminar on the Teaching of Calculus. We mention socio-epistemological and didactic features and propose basis for using technology in a course on differential and integral calculus.

Keywords: Socio-epistemological approach, Calculus, Mathematical literacy, Modeling

Resumen – En este artículo se presentan las investigaciones que culminaron al diseño del proyecto “Enseñanza del Cálculo”. Se pone más énfasis en las investigaciones realizadas en el DME Cinvestav-IPN, como antecedente a la creación del Seminario Nacional sobre la Enseñanza del Cálculo. Se mencionan los aspectos socio-epistemológicos y didácticos, y se fundamenta el uso de la tecnología en un curso de cálculo diferencial e integral.

Palabras clave: Aproximación socio-epistemológica, Funciones, Cálculo, Estratos de saber, Modelación

1. Introducción

No será sorpresa el hecho de que las investigaciones que se han desarrollado en el Departamento de Matemática Educativa (DME) del Cinvestav, reflejan las tendencias más importantes observadas a nivel internacional. Pero, ¿se deberá la existencia de estas investigaciones a fenómenos de onda? La respuesta es no, puesto que el fenómeno es más profundo. La diversidad de tendencias es una consecuencia de la complejidad del objeto de estudio, es decir la enseñanza de las matemáticas, misma que necesita una aproximación multifactorial.

Por un lado, la didáctica de las matemáticas, vista como una disciplina de ciencias humanas, se dedica a observar, analizar y aclarar los fenómenos que la enseñanza de las matemáticas genera. Y eso supone una observación cuidadosa hacia diversos factores que aparecen, en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Sin embargo, es menester señalar que cada uno de ellos, no será en si mismo el objeto último del estudio, es decir que su observación determinará la necesidad de investigaciones complementarias. Demos un ejemplo; es sumamente importante identificar lo que los estudiantes conocen, y a que nivel, después de un ciclo de enseñanza, pero eso sólo es un indicador de resultados. Pero este indicador, no aclara cuales son los factores que determinaron las adquisiciones, correctas o incorrectas, de conocimientos y métodos matemáticos. Los tres polos clásicos, considerados en el estudio de la enseñanza, son: el polo del contenido matemático, el polo estudiantil, y el polo docente. No son independientes y, de acuerdo al punto de vista socio-epistemológico expresado en Cantoral & Farfan, (2003, p. 265), tampoco constituyen un sistema cerrado sino se sitúan en un entorno socio-cultural. Consideraremos algunas consecuencias en este artículo. Basta señalar, en esta introducción, la producción científica de un sinnúmero de artículos y libros de investigación cuyos autores y editores son miembros del Departamento de Matemática Educativa.

Por otro lado, existe una gran demanda social, dirigida a los investigadores en matemática educativa, de que no sólo analicen la problemática de la enseñanza de la matemática, sino también contribuyan en la producción de material al servicio de esta enseñanza. Desde sus inicios, el DME se ha dedicado a esta tarea de manera contundente: desarrollo curricular, diseño de cuestionarios y material de docencia, publicación de libros de investigación y textos; revistas de investigación, elaboración y diseño de software, diseño de actividades con tecnología, etc. Si se compara con el material educativo tradicional, una característica notable de los documentos publicados por los investigadores del DME tiene su origen en el hecho de que constantemente, en su elaboración, se toma en consideración la función de las decisiones docentes para su aplicación en el aula. De la experiencia del funcionamiento de clases de matemática que los investigadores tienen, saben que no hay un modelo único de clase sino que existe una diversidad de “culturas de clase”. Entonces el reto es de no imponer un modo de uso único del material didáctico, sino de facilitar la toma de decisiones pedagógicas adecuadas, por el docente, en el aula. Eso es uno de los importantes motivos que impulsan a los investigadores en perseguir investigaciones didácticas cada vez más precisas y diversas.

2. Estudios del triángulo didáctico en la educación matemática

Una tesis importante que Houssaye (1988) sostiene, en su conocida propuesta del triángulo didáctico, es que existe una tendencia, en el proceso de enseñanza, en fijarse sólo dos, de los tres vértices o polos del triángulo: contenido-docente-educando, olvidándose del tercero. Además, en el caso de la enseñanza matemática, las investigaciones didácticas pusieron de manifiesto que la consideración del contenido matemático no es algo obvio sino necesita una aproximación específica: El saber que se enseña en la escuela procede de una modificación cualitativa del saber académico, el cual llega a desnaturalizarse con el fin de que sea comprendido por el alumno (Chevallard, 1985). Se observará, que el polo "educando", del triángulo didáctico, no es ajeno a la determinación del polo "contenido". Y para definir cuales son los factores que rigen la modificación del saber académico en el saber enseñado, la aproximación socio-epistemológica desarrollada en investigaciones del DME constituye una herramienta útil.

Es principalmente a través de documentos escritos que se develan los resortes de la comunicación científica y social (sin embargo, en este caso, la importancia de los medios audiovisuales tiende a crecer en los últimos años con la difusión de las TIC). En esta dirección es imprescindible la consideración de los registros de representación (Duval, 1995) y de los sistemas matemáticos de signos (Filloy y Lema, 1996).

2.1 Polo "contenido" en el aula: matemática y matemáticas.

Se usaron durante siglos la palabra "matemática" y su plural "matemáticas" como hoy en día se dicen la ciencia y las ciencias. Este empleo es conforme con la etimología de la palabra griega μαθημα (mátema), que tenía el significado general de ciencia. Así, la matemática era el método de estudio de diversos fenómenos con el recurso de la razón pura, como hoy se caracteriza la ciencia por su metodología. Y los campos estudiados por el razonamiento constituían las matemáticas. Por ejemplo, la aritmética era el dominio de los números, mientras la geometría era el campo relacionado con los problemas generados por la medición de la tierra. Cuando los matemáticos del siglo XIX lograron establecer una correspondencia completa entre la recta geométrica y el campo numérico de los reales, se pudo alcanzar una visión unitaria de la matemática, esta vez no sólo por sus métodos y su problemática, sino por sus propios objetos de estudio. Fue esta visión que partidarios de las *matemáticas modernas* (notemos una paradoja: a pesar de una idea unificadora, se usa el plural en esta expresión) trataron de imponer en la enseñanza durante el decenio de los años 1970, con las consecuencias observadas.

Nos parece que es interesante, al enseñar matemáticas, no ocultar las caras de la disciplina. Unitaria y diversa, a la vez. Pero la diversidad de la disciplina la debemos buscar hoy en sus modos de expresión y no en sus objetos de estudio, puesto que existe a nivel científico una unificación.

Algo fundamental, a la vez del punto de vista histórico y del punto de vista social, es el hecho de que las matemáticas se escriben. El *milagro griego*, es decir el descubrimiento de la posibilidad de establecer los resultados matemáticos por un proceso de prueba, no debe ocultar las limitaciones que resultan de la aproximación solamente retórica que se encuentra en los textos de la antigua Grecia: El razonamiento de la época se apoyaba sobre un discurso, y el papel de los textos, sólo consistía en archivar los discursos. En otras civilizaciones, funcionaron de diversa manera, más relacionados con tratamientos:

- En China, el famoso libro *Chiu-chang Suan-shu* (o: *Jiuzhang Suanshu)* que se escribió durante la época de la dinastía Han (206 a.C. a 220 d.C.), presenta un panorama amplio del saber matemático del país hasta el tercer siglo de nuestra era, incluyendo por ejemplo la suma y la resta de fracciones o la resolución de sistemas de ecuaciones lineales,
- Del mundo árabe proceden la escritura actual de los números y los algoritmos, nombre que viene del matemático Al-Khwarizmi Muhamad ibn Musa, autor de *Kitab Al jabr w'al muqabala* (Libro sobre la ciencia de la reducción y el cotejo, publicado alrededor del año 820), así como el álgebra cuyo nombre se deriva del título del mismo libro.

Algunos ejemplos señalados por investigadores en matemática educativa pueden ilustrar la especificidad en las matemáticas de los tratamientos escritos con respecto a tratamientos verbales. Seleccionamos cuatro ejemplos que son típicos por dos razones:

- cada uno corresponde a errores y dificultades que se repiten y pueden ser provocadas por peculiaridades de la expresión matemática escrita,
- representan distintos niveles de uso de la escritura en matemáticas.

Iniciamos con un ejemplo que aparece a nivel de la escuela primaria. Frecuentemente alumnos de la primaria cometen un error al escribir sumas repetidas bajo la forma de una sucesión de dos igualdades como la que sigue:

$$5 + 4 = 9 + 2 = 11,$$

en vez de escribir sea 5 + 4 + 2 = 9 + 2 = 11, sea dos igualdades separadas:

$$5 + 4 = 9 \text{ y } 9 + 2 = 11.$$

Tuvimos la oportunidad de observar que profesores dejan en el pizarrón la escritura incorrecta sin corregir el error, puesto que el resultado es correcto. Esta escritura errónea tiene su origen en el uso del texto escrito como reproducción fiel del discurso oral. Al discurso "*Cinco y cuatro, nueve*" corresponde la igualdad matemática 5 + 4 = 9, entonces parece natural transcribir a dígitos el discurso "*Cinco y cuatro, nueve, y dos, once*" en la forma de una sucesión de dos igualdades. Pero, ¿cuáles son las razones que impiden que una escritura tal sea correcta? Podríamos pensar en una razón de tipo gramatical, que sería la presencia de dos "verbos" (los símbolos de igualdad tienen el valor de verbos) en una misma oración simbólica. Pero eso no es una refutación, porque otras escrituras con dos símbolos de igualdad, como es por ejemplo

$$5 + 4 = 6 + 3 = 7 + 2,$$

son correctas. La verdadera razón es la transitividad de la igualdad (si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$). Una escritura autorizada podría ser por ejemplo $5 + 4 \rightarrow 9 + 2 \rightarrow 11$, porque la flecha no tiene la misma propiedad de transitividad.

El segundo ejemplo corresponde a un caso conocido de dificultades que se encuentra en la enseñanza básica es la suma o resta de números expresados en escritura fraccional. Vale la pena en este caso darse cuenta de que una igualdad como por ejemplo la siguiente: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$, o en un caso general $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}$, es el resultado de un razonamiento complejo, puesto que consta de dos pasos. El primero es la reducción a un mismo denominador: $\frac{1}{a}=\frac{b}{ab}$ y $\frac{1}{b}=\frac{a}{ab}$, el segundo corresponde a la regla general de la suma de dos fracciones de mismo denominador $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$, y es precisamente para usar esta segunda regla que se aplica la primera etapa de reducción. El resultado es que una única fórmula escrita resume todo un proceso, y además bajo una apariencia que puede parecer rara, dado que una operación elemental, la suma, produce un resultado que combina suma y producto. Muchos estudiantes aplican una regla falsa para sumar fracciones: suman numeradores por un lado y denominadores por otro lado. Al contrario, los productos de fracciones no generan la misma dificultad.

Empleamos letras en la fórmula anterior, lo que conduce ahora en considerar el uso de letras en álgebra que se ilustra en nuestro tercer ejemplo. Las dificultades conocidas, señaladas por ejemplo en Puig (2004), se encuentran sobre todo cuando hace falta combinar, en operaciones aritméticas, incógnitas y datos de problemas. La resolución de una ecuación lineal se vuelve más difícil cuando la incógnita se encuentra de cada lado del símbolo de igualdad. Así resolver la ecuación siguiente generará dificultades a nivel de la secundaria:

$$4x - 3 = 1 - x.$$

Lo que se puede observar con respecto a la lengua hablada es la dificultad en expresar verbalmente esta ecuación (dictar la ecuación al decir "*cuatro x menos tres igual a uno menos x*" no es uso de la lengua oral), por la necesidad de dejar indeterminado el primero x y relacionar el segundo con el primero. Eso necesita varias oraciones, como: "*Buscamos un número racional. Se sabe que se obtiene el mismo resultado al restar tres del cuádruplo del número y al restar el número de uno. ¿Cuál es el número?*" La primera vez se debe decir en la lengua usual "*un número*" porque no es determinado, y las otras veces "*el número*" (o, para mayor precisión, "*el número buscado*"), porque se trata de un objeto ya definido en el discurso. Entonces, no podemos traducir en este caso x por *un número desconocido*, lo que sería posible en una ecuación donde la incógnita sólo aparece una vez. La lengua simbólica no tiene los determinantes de la lengua usual, sólo usa *nombres propios* (x en este caso).

Con funciones se manifiestan otras especificidades de la lengua simbólica. Como cuarto ejemplo, consideraremos dos funciones muy sencillas: la elevación al cuadrado y el incremento de 1. La composición de estas funciones no es conmutativa, como lo muestra la escritura simbólica:

$$\mathrm{f}(x) = x^2;\ \mathrm{g}(x) = x+1;\ \mathrm{f}\circ\mathrm{g}(x) = \left(x+1\right)^2;\ \mathrm{g}\circ\mathrm{f}(x) = x^2+1.$$

La obtención de los resultados resulta de cambios de variables: remplazar x por $x + 1$ en f(x), y x por x^2 en g(x). Los tratamientos que servían para resolver ecuaciones no son pertinentes cuando las letras no denotan incógnitas sino variables. Con el uso de software de cálculo simbólico, por ejemplo Derive o Maple, estas diferencias se ponen de manifiesto.

Precisamente con las técnicas de información y comunicación (TIC), la escritura matemática se usa no solamente con papel y lápiz, sino mediante teclado y Mouse. El principal cambio que generan las TIC es la interactividad: En vez de la hoja blanca, al usuario que está introduciendo una expresión o un tratamiento se proponen diversas opciones. Es necesario, saber analizar e interpretar las opciones propuestas, para conseguir el funcionamiento requerido.

Hasta el momento consideramos tratamientos, pero también las conversiones, es decir los cambios de registros de representación, tienen un papel fundamental en la construcción de los conceptos matemáticos. En el experimento nacional sobre la enseñanza del cálculo al inicio de la enseñanza superior en México, la introducción de funciones se hace a través de proyectos de acción concretos, y no mediante fórmulas. Por ejemplo en el proyecto de título *Poleas*, la gráfica de una función se presenta antes de su expresión algebraica (ver figura 1).

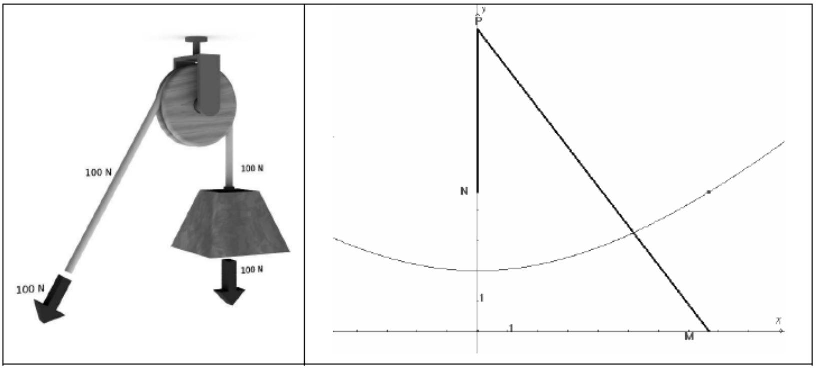

Figura 1- Polea fija (en Wikipedia, 2009) y gráfica de una función que le corresponde

Más adelante (apartado 3.5) presentamos los elementos de corte didáctico que aplicamos en el experimento. En este apartado presentamos sólo algunos aspectos relacionados con lo específico de la actividad matemática. En particular, es importante tener presente que es una actividad de facetas múltiples, lo que justifica todavía el uso del plural: matemáticas

2.2. Polo estudiantil: el error de la *mathematical literacy*

Por definición, el estudiante es el sujeto del aprendizaje. Se considera entonces satisfactoria, en términos de los resultados logrados. En otras palabras, se puede decir que la calidad de una enseñanza, se evalúa en base a los aprendizajes adquiridos por los estudiantes, y eso a priori no parece tan difícil. Pero la realidad muestra, que la evaluación es algo complejo, e incluso hay organismos que se dedican específicamente a la investigación de evaluación.

Dos corrientes principales se encuentran. La primera, que calificaremos como atomista, considera sobre todo conocimientos y técnicas. Ya es antigua, pero sigue vigente. Sus fundamentos para el caso de la enseñanza matemática se describieron de manera detallada en un capítulo 19, escrito por Wilson (1971). Su idea directriz es organizar el saber matemático por actividades de distintos grados de dificultad, y ubicar a los estudiantes con respecto a un tema matemático en un lugar de la clasificación. La idea, muy controvertida por algunos investigadores, como Guy Brousseau (véase por ejemplo Brousseau, 2007, 1-diapositiva 14 y 3-diapositiva 15 - Brousseau hace una distinción entre "saber" y "conocimiento"), de "carreras de competencias" es otra manifestación reciente, de la corriente atomista. La segunda corriente, que calificaremos como totalitaria, se relaciona con las evaluaciones internacionales de PISA. Sus principios se encuentran descritos en el documento de OECD (2006) (la organización internacional se conoce en español bajo las iniciales OCDE), mismo texto cuyo título contiene la expresión *mathematical literacy* (generalmente traducida en español por "alfabetización matemática"). La idea general que generó la *mathematical literacy* viene de una asimilación del aprendizaje matemático con la adquisición de la lengua usual (el español en México). Esta última conduce a los estudiantes a la *literacy*, es decir el acceso sin dificultad al contenido de textos breves y no especializados. Un individuo que no sabe leer es un analfabeto, mientras uno que sabe leer difícilmente, y entonces no tiene este acceso cómodo a textos sencillos, es un iletrado. Por eso no nos gusta la traducción de *literacy* por "alfabetización", una palabra más precisa en este caso sería *literarización* (en portugués existe la palabra *literarizaçao*).

Debido a la influenza enorme de las evaluaciones PISA sobre el mundo de la educación, es importante mirar cuidadosamente los fundamentos de la *mathematical literacy*. Este análisis se encuentra publicado en un capítulo escrito por Adjiage & Pluvinage (2008), y por esta razón no entramos aquí en detalles. En el apartado 6 del capítulo se subraya la diferencia esencial entre aprendizaje lingüístico y aprendizaje matemático:

> (Al contrario del aprendizaje de la lengua usual) *el aprendizaje de las matemáticas necesita una acumulación de hechos y ejercicios para desarrollarse, y un estudiante tiene que ser entrenado para adquirirlo. La única propiedad de la competencia lingüística que es valida en matemáticas es que se puede aplicar a un sinnúmero de ejemplos aun no encontrados.* (Traducido del ingles por los autores)

En base a lo que hemos visto previamente en el apartado 2.1 sobre el polo "contenido", aparece que es más valido situar el acceso que estudiantes tienen a las matemáticas con respecto al dominio de diversas formas de expresión en matemáticas. En efecto, cada una de estas formas de expresión se puede considerar como una lengua específica. En otros términos, el aprendiz en matemáticas tiene que adquirir varios idiomas.

Proponemos de distinguir varios "idiomas" matemáticos, que llamamos *estratos*. Cada uno tiene su estabilidad y su autonomía de funcionamiento: Un campo básico de objetos y procesos matemáticos determina el contenido de un estrato, pero tiene también un potencial de extensión: En un estrato dado se pueden insertar nuevos conocimientos. Pero existen separaciones marcadas entre estratos: Un cambio de estrato requiere a la vez cambios en la forma del pensamiento y cambios en los modos de expresión. Eso viene de que en cada estrato se introducen nuevas reglas sintácticas. La consecuencia es que un estudiante puede ser diestro en el manejo de los conceptos y métodos de un estrato dado e ignorar casi de completo otro estrato. La lista de estratos que proponemos es la siguiente:

1. *Estrato numérico*: Dominio de los números enteros y racionales y uso correcto de las cuatro operaciones aritméticas;
2. *Estrato racional*: Dominio de razones y proporciones, capacidad de interpretar instrucciones que conducen a cálculos de productos y cocientes de números racionales positivos o negativos;
3. *Estrato algebraico*: Uso adecuado del sistema matemático de signos de álgebra;
4. *Estrato funcional*: Uso de relaciones funcionales y del cálculo.

A continuación se muestra un ejemplo tomado de una evaluación diagnóstico, que aplicamos a una muestra de principiantes en la universidad, dentro del marco de nuestra experimentación sobre la enseñanza del cálculo a nivel superior. Dentro de las preguntas de elección múltiple, algunas proponen la consideración de valores numéricos (Q2, Q4 y Q5) y las otras (Q3, Q8 y Q9) incluyen variables.

Q2. Calcular: $\frac{3}{4} - \frac{5}{6}$

□ $\frac{2}{24}$ □ $\frac{-1}{12}$ □ -1 □ $\frac{38}{24}$ □ Otro resultado

Q3. Calcular: $\frac{1}{2n-2} - \frac{1}{2n}$

□ 0 □ $\frac{1}{n(n-1)}$ □ $-\frac{1}{2}$ □ $\frac{2n-1}{2n(n-1)}$ □ Otro resultado

Q4. ¿Cual de los números siguientes es mayor?

□ 3.5; □ 2.46; □ 3.19; □ 0.546 □ -9.87

Q5. Calcular: $3(5\text{-}8)^2 + 3\left[2(4+9)\text{-}5(2\text{-}6)\right]$

□ 9; □ 30; □ -55; □ 229; □ Otro resultado

Q8. La solución de $-30x + 4 \leq 0$ **es:**

□ $x = \frac{2}{15}$; □ $x \geq \frac{2}{15}$; □ $(-\infty, \infty)$; □ $x \leq \frac{2}{15}$; □ Otra respuesta

Q9. Las soluciones de $2x^2 - 3x - 2 = 0$ **son:**

□ $x_1 = -2$ y $x_2 = \frac{2}{3}$; □ $x_1 = 2$ y $x_2 = -\frac{2}{3}$; □ $x_1 = 2$ y $x_2 = \frac{-1}{2}$
;

□ $x_1 = -2$ y $x_2 = -\frac{2}{3}$; □ Otra respuesta

Elección	1	2	3	4	5
Q2 %	*25*	***65***	*1*	*4*	*5*
✓*Q3 %*	*9*	*25*	*30*	*27*	***9***
Q4 %	***88***	*0*	*2*	*4*	*6*
Q5 %	*4*	*3*	*9*	*2*	***83***
✓*Q8 %*	*21*	***39***	*3*	*36*	*1*
✓*Q9 %*	*17*	*26*	***43***	*5*	*9*

Tabla 1: Porcentajes de las elecciones de los estudiantes

En la tabla 1, el porcentaje de respuestas correctas se encuentra en negrita en las celdas grises. Se observará el contraste fuerte entre las preguntas numéricas (Q2, Q4 y Q5) y las preguntas que incluyen variables (Q3, Q8 y Q9, marcadas por una palomita). Nuestra interpretación es que unos estudiantes aun no estaban en el estrato algebraico.

Sin embargo la enseñanza del cálculo tiene generalmente como prerrequisito un conocimiento de los conceptos y métodos matemáticos hasta la resolución de ecuaciones de grado 1 y 2. Eso significa, bajo nuestro punto de vista, que se supone que los estudiantes estén en los estratos anteriores al estrato funcional. Pero no es el caso de todos. Ahora el problema didáctico que surge es ¿cómo impulsar a los estudiantes a obtener un estrato que les es ajeno? a pesar de haber encontrado temas de este estrato en la enseñanza previa.

De manera general, el cambio requerido para pasar de un estrato a otro, justifica, en primera instancia, una conducta de rechazo por el estudiante. Es necesario que el estudiante este convencido, al constatar el fracaso en los tratamientos que ya conoce, de la necesidad de adquirir un nuevo lenguaje. En eso, el profesor puede jugar un papel decisivo, bajo la condición de estar consciente de la naturaleza y de la importancia del esfuerzo que se pide al estudiante. En nuestro caso, la situación se vuelve todavía más difícil, porque se trata de adquisiciones no previstas en el programa del curso. La respuesta que proponemos no se encuentra en cursos remédiales, cuyos resultados siempre aparecieron pobres, sino en la aplicación de actividades que permitan un control de parte del estudiante, como las actividades de poleas (figura 1). Más adelante se comentan sus efectos.

2.3. Polo docente: la difícil toma de decisiones didácticas

El tercer polo del triángulo didáctico es el que todavía necesita investigaciones. La cosa es natural, porque la actuación del profesor de matemáticas sólo tiene sentido cuando se relaciona con el aprendizaje de cierto contenido matemático por un cierto público estudiantil. Entonces el análisis de la actividad profesional del docente depende de una visión clara de los problemas ligados con los dos otros polos del triángulo didáctico.

En el aula, el profesor está libre bajo una muchedumbre de obligaciones y restricciones, por ejemplo aplicar un programa curricular determinado. Pero su postura en el aula depende mucho de sus propias decisiones, a veces tomadas por automatismo sin toma de distancia. Un ejemplo que observamos en muchas clases (Documentos del seminario de evaluación de la maestría en educación, especialidad matemática, en proceso) es una preferencia hacia la comprensión con respecto a la expresión. Un autor francés, Nicolas Boileau, en su libro *L'art poétique* publicado el año de 1674, escribió: « *Ce qui se conçoit bien s'exprime clairement, et les mots pour le dire arrivent aisément* » (Lo que se concibe bien se expresa claramente, y las palabras para decirlo surgen con facilidad). Pues muchos profesores se revelan discípulos de Boileau sin saberlo, porque ven la expresión como una consecuencia de la comprensión. En la clase manifiestan inquietud con respecto al entendimiento y no ponen atención en la corrección de la expresión por los estudiantes.

Sin embargo la informática nos enseña que la expresión no necesariamente depende del entendimiento. Una computadora es una máquina que puede ser capaz con software adecuado de expresar resultados coherentes. Un programador no se plantea la pregunta absurda de hacer entender algo por la máquina, sino de introducir los elementos que generen tratamientos correctos, incluso de cálculo simbólico. Por supuesto el ser humano no es una máquina, pero en varios casos también necesita desarrollar tratamientos automatizados, que no cargan su mente, para poder concentrar su reflexión sobre otros aspectos. Cuando se observa (caso real) un estudiante de preparatoria que escribe la multiplicación de 16 por 2 para obtener el resultado 32, es evidente que se va a perder en la resolución de una ecuación como

$$3x + 2\sqrt{x} - 16 = 0.$$

Tal necesidad es algo que deben tomar en cuenta los profesores.

Otra dificultad que encontramos al tratar de proponer progresiones diferentes de las tradicionales en los libros de texto está en la previsión de las consecuencias de posibles cambios de progresión: ¿Qué pasa si se estudian ángulos antes de rotaciones? o ¿rotaciones antes de ángulos? No prepara la formación docente en estudiar preguntas de este tipo

Otra dificultad importante que se puede observar en clases viene de la falta generalizada de previsión de decisiones pedagógicas por los profesores. Preparar un curso significa revisar su contenido, resolver algunos ejercicios para escoger los que parecen adecuados, pero no abarca imaginar cómo constatar la necesidad de cambios de situación, cómo pasar de una etapa de indagación a una de validación y a una síntesis. ¿Es eso un problema de formación docente? Todavía faltan investigaciones para proponer elementos de respuesta.

3. El proyecto "enseñanza del cálculo"

El reto que el día de hoy se enfrenta consiste en recuperar el significado de los conceptos que están inmersos en el cálculo diferencial utilizando la capacidad numérica, gráfica y simbólica que el medio computacional ofrece en la actualidad. Una de las formas tradicionales de conducir un curso de matemáticas, consiste en que el docente realiza la mayor parte de la actividad en clase ilustrando con problemas y su resolución el tema de matemáticas. Cuando el proceso de enseñanza consiste en que el alumno sólo repite las imágenes del pizarrón, tiende hacia la construcción de hábitos en los estudiantes y no hacia la interiorización de los conceptos (Aebli, 1958/1995). Una consecuencia inmediata de este tipo de didáctica se tiene en los cursos de cálculo en el ámbito universitario, la experiencia muestra que con frecuencia cuando se requiere de algún concepto previo, el estudiante se embrolla, empieza a repetir verbalmente la fórmula asociada y en la mayoría de los casos acaba proponiendo algo absurdo. En este sentido, la repetición verbal como un reflejo constituye el llamado hábito sensorio motor, es decir, las palabras constituyen signos carentes de significado (Ibidem). Con este tipo de enseñanza se aniquila el concepto y se substituye por su cálculo algebraico y/o numérico (Cuevas 1999, 7).

3.1. Elementos de corte didáctico

¿Cómo lograr que la enseñanza de la matemática no se conduzca de esta forma? Aunque existen diversas propuestas, y evidentemente cada una contribuye en parte a resolver este grave problema en nuestro caso, para estructurar el diseño de un curso de cálculo que incorpore la tecnología mediante un programa o sistema computacional, proponemos incorporar de manera importante los siguientes elementos de corte didáctico:

- *Es esencial que el estudiante esté siempre desarrollando una acción. En este sentido es importante señalar que sea el propio educando quien mediante la resolución de problemas específicos, gradualmente dosificados, construya o llegue al concepto deseado. Esto es, el alumno debe estar constantemente resolviendo o intentando resolver problemas*

- *Cada vez que se introduzca un concepto o noción matemática, hay que intentar partir de un problema en cierto contexto de interés para el educando. Este problema puede generar ejercicios o sub-problemas cuya solución, en forma estructurada y coordinada, lleve al estudiante a definir o mostrar el concepto matemático deseado. Esto, desde luego, no es posible de realizar para cada uno de los conceptos intrínsecos a un determinado tema, por lo que toca decidir al docente, cuál o cuáles son los más trascendentes. En todo caso, nunca introducir un concepto mediante su definición formal.*

- *Intentar en lo posible, cada vez que se realicen operaciones que nos lleven a conceptos matemáticos, implementar la operación inversa.*

- *Cuando se ilustre una forma o método para resolver un problema, intentar dar una forma de solución alternativa. En todo caso, nunca imponer una forma de solución.*

- *Cada vez que enseñemos un determinado concepto de las matemáticas, en un cierto registro de representación semiótica, trabajar el mismo (si el concepto lo permite) en los diversos registros de representación que le sean propios* (Cuevas & Pluvinage 2003).

Termina la propuesta didáctica sugiriendo proponer problemas en donde el concepto recién adquirido sea necesario para la resolución de un problema de mayor complejidad (*Ibíd*, 8-30). Todo ello sin dejar fuera la componente de socialización y los procesos intrínsecos que conlleva. Si esto no fuera posible de realizar para todos y cada uno de los conceptos inmersos dentro al curso de cálculo diferencial debería de hacerse un estudio previo para destacar los conceptos más importante y realizar esta tarea para ellos.

3.2. Elementos de corte histórico-epistemológico

Usualmente la enseñanza del cálculo diferencial parte de definiciones formales, teoremas y problemas tipo para ejemplifican los conceptos asociados. Este es el caso con el concepto de función en particular, y se apoya fundamentalmente en el conocimiento aritmético y/o algebraico del estudiante y poco en la intuición geométrica y visual, esto posiblemente debido a la dificultad para representar en el papel o el pizarrón un número suficientemente grande de ejemplos que den significado geométrico a los contenidos del cálculo y el álgebra involucrada en ellos. Haría falta rescatar el desarrollo del cálculo mediante problemas de cambio y variación surgidos de problemas en contexto, los cuales ayudarán a reforzar la intuición. En la actualidad, los problemas de cambio y variación son ejemplos de aplicación del cálculo, es decir, se estudian después de que se ha desarrollado la teoría, y no como surgió históricamente.

La derivada, fue primeramente utilizada, después descubierta; posteriormente explorada y desarrollada y por último definida (Grabiner, 1983)

Y agrega Burn, *Utilizada por Fermat y otros antes de 1650; Descubierta por Newton y Leibniz en 1666-1685; Explorada y desarrollada durante el siglo XXVIII. Definida por Lagrange (1797), Cauchy (1823) y Weierstrass (1860s)* (Burn, 2002).

La dificultad de comprensión y aprendizaje del concepto de límite, aun cuando se pretende introducirlo de manera “intuitiva”, como antecedente para la derivada, puede ser un factor importante de fracaso estudiantil en cálculo (Kleiner, 1991; Tall, 1996). Por eso, convendría proponer una ruta de aprendizaje más acorde al desarrollo epistemológico y a la vez congruente con sus antecedentes matemáticos. Lo anterior nos sugiere y ofrece un indicio para encontrar, en parte, una explicación del fracaso en la enseñanza del cálculo. La enseñanza tradicional del cálculo, invierte el proceso histórico de la génesis del concepto matemático. Usualmente los cursos de cálculo inician con las definiciones formales de: números reales, función, límite, derivada, etc., siguen los teoremas y demostraciones formales; (una variante es el ofrecer un largo formulario, demostrar algunas fórmulas, y resolver problemas ad doc.) por último, si el tiempo lo permite, se muestran las aplicaciones. Y el hecho de dar un lugar a la intuición y la experimentación sin revisión de la progresión puede hasta producir efectos negativos (Artigue, 1998).

Es en este sentido que proponemos una ruta de aprendizaje más acorde al desarrollo genético del concepto; Por ejemplo, para enseñar un concepto matemático, del cálculo diferencial, habría que iniciar con problemas de aplicación, utilizarlo, descubrirlo (por parte del estudiante) explorarlo y desarrollarlo y por último, si es que se requiere establecer la definición formal del mismo. Del estudio y análisis de la historia resultan algunas directrices para la enseñanza del cálculo diferencial. La primera es, que un primer curso de cálculo diferencial no debe construirse sobre el conocimiento previo de definiciones formales del concepto de función y de la noción de límite que surgieron a final de su elaboración, sino apoyarse sobre sus facetas de cálculo numérico y de cálculo algebraico y explotar, además, ideas que provienen de la geometría o del estudio de movimientos. En este sentido se propone iniciar el curso de cálculo introduciendo el concepto de función real.

Diseñar e implementar actividades de modelación para la promoción de conceptos, de acuerdo al esquema de RMI (Real Mathematical Instruction) presentado en Gravemeijer & Doorman (1999), bajo la forma de proyectos de acción concretos (Cuevas & Pluvinage, 2003), en donde se favorezca el control de los estudiantes sobre sus propios ritmos de aprendizaje, se promueva la sistematización del empleo de los diversos registros de representación semiótica (tabular, gráfico, algebraico) con los que se representan funciones, y promover las conversiones, en ambos sentidos, entre registros. Nuevamente, debido a la dificultad de reproducir en el salón de clase estos procesos dinámicos, es necesario incluir a la tecnología para mediante la simulación de problemas reales, se interiorice en el estudiante el concepto de función.

3.3. Elementos computacionales

La tecnología es una herramienta esencial para el aprendizaje de las matemáticas, en el siglo XX1, y todas las escuelas deben de asegurar que sus estudiantes tengan acceso a la tecnología. Profesores efectivos maximizan el potencial de la tecnología para desarrollar comprensión en los estudiantes, estimular su interés e incrementar su eficiencia en matemáticas. Cuando la tecnología es estratégicamente utilizada, puede facilitar y proveer un acceso a las matemáticas para todos los estudiantes (Posición de la NCTM, 2008).

La forma en que se ha utilizado la computadora en la educación matemática es muy variada y sigue fines como: mejorar la comprensión de los conceptos, promover la participación individual, hacer más eficiente y flexible los métodos de enseñanza, entre otros. La tecnología provee nuevas formas de experimentar y actuar en el mundo, y esto hace posible una nueva conceptualización y la práctica de métodos cognitivos como señala Stroup (2002, 183): la facilidad de realizar cálculos numéricos, la posibilidad de visualizar gráficas complejas y la realización de cálculos simbólicos permiten centrar la atención en un cálculo más conceptual que operativo. En este sentido se propone un uso de la computadora como herramienta cognitiva más que como instrumento que resuelve o gráfica problemas complejos.

El empleo de la microcomputadora en educación matemática se puede clasificar en: software de aplicación como: Excel, SPSS, Fathon; manipuladores simbólicos y graficadores como: Derive, Matemática, Maple, o MatLab; micromundos como Cabri o Geometra, LOGO, Descartes; Geogebra, lenguajes de programación de propósito general como .net, C++, o ITSEL, usados con el propósito de enseñar matemáticas; y finalmente software de aprendizaje asistido por computadora dentro de los que destacan los Sistemas Tutoriales Inteligentes, como CalcVisual. Cada una de estas propuestas presenta ventajas y desventajas en su uso, evidenciarlos permite establecer algunas líneas generales para el diseño o empleo de software educativo para la enseñanza de las matemáticas. Por ejemplo, los manipuladores simbólicos y graficadores permiten realizar cálculos complicados, graficas complejas y efectuar simbólicamente derivadas e integrales. Sin embargo, realizan el proceso que se desea enseñar al alumno. Es decir, es software dirigido al resultado que oculta el proceso en el que se llevó a cabo. De manera que la mediación didáctica es nula si el profesor no diseña cuidadosamente las secuencias de aprendizaje (Stroup 2002; Mejía 1996; Cuevas 1999). Lo que se requiere es el diseño de software educativo, donde el software sea dirigido al proceso.

3.4. Proyecto “Enseñanza del Cálculo”

Desde hace años el índice reprobados en un primer curso de cálculo diferencial en el nivel superior (Universidad y Tecnológicos) fluctúa entre el 50% y el 80%; posiblemente y debido a ello, en la actualidad, el cálculo diferencial e integral se está desplazando del medio superior al superior. Por otra parte los textos usuales a nivel superior carecen de una verdadera propuesta didáctica. Aún más, se tiene prácticamente una cierta clase de equivalencia en todos los textos de cálculo diferencial e integral a nivel superior. En ellos la tecnología es poco empleada. En diversas investigaciones que se hemos realizado sobre problemas de aprendizaje del cálculo diferencial e integral de funciones reales, nos han llevado irreductiblemente a que la mayor parte de las mismas, tienen su origen, en primera instancia, en una incomprensión de los conceptos básicos y fundamentales del cálculo. Hemos englobado estos conceptos básicos en: variable, ecuación y función. Sabemos, que en la educación confluyen muchos factores de diversa índole y, que la deficiente comprensión de los conceptos básicos no es la única causa, pero también hemos comprobado que es una de las más frecuentes e importantes. Cabe mencionar, que dentro de estos conceptos habitan conceptos no menos importantes como el de variación.

Por esta razón proponemos establecer actividades didácticas, para introducir los conceptos del cálculo diferencial bajo los siguientes principios:

• Introducir un concepto matemático, mediante el planteamiento de un proyecto de acción concreto (Aebli, 1995). Estableciendo, de esta forma, la modelación.

• Instrumentar actividades para promover la comprensión de los conceptos básicos, bajo los principios didácticos enunciados en (Cuevas-Pluvinage, 2003).

• Por ejemplo; El diseño de las actividades deberá incluir el empleo sistematizado de los diversos registros de representación y para esto la tecnología es un recurso imprescindible.

Además en la idea de plantear una propuesta de reforma curricular para un primer curso de cálculo diferencial, se propone reunir y desarrollar estudios de carácter cognitivo, epistemológico, histórico y reflexivo alrededor del cálculo diferencial e integral y de los conceptos básicos que le preceden.

En la idea de realizar un estudio sistemático de esta problemática, surge en el Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN, bajo la conducción de los autores de este artículo, el proyecto “Seminario sobre la enseñanza del cálculo”.

3.5. Seminario sobre la enseñanza del cálculo

La primera tarea que nos fijamos fue convocar a instituciones de nivel superior para realizar el estudio en forma conjunta y para ello establecimos las siguientes tareas:

- Diseñar y aplicar diversos instrumentos de medición que darán cuenta del estado y nivel de competencia de los estudiantes antes de iniciar un primer curso de cálculo a nivel universitario.
- Establecer un estado del arte, sobre la problemática alrededor de la enseñanza del cálculo, mediante la búsqueda y selección de artículos conducentes y avalados por revistas de prestigio internacional.
- Establecer sesiones en línea para exposición, análisis y discusión crítica de los artículos de investigación seleccionados.
- Crear un espacio de culturización sobre teoría de evaluación y elaboración de tests.
- Diseñar y elaborar modelos virtuales que posibiliten los proyectos de acción práctica, mediante la simulación de situaciones reales.

- Analizar y discutir las propuestas curriculares, que incluyan aspectos de corte histórico-epistemológico.

En este sentido, a la primer convocatoria se sumaron profesores y/o investigadores de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México, Universidad Autónoma de Coahuila; Universidad Autónoma del Estado de México; Universidad Nacional Autónoma de México, Universidad de Sonora, Universidad Autónoma de Sinaloa.

La primera parte de la investigación nos condujo a elaborar un test diagnóstico que permitiera al profesor determinar los niveles de competencia de los aspirantes a estudiar una carrera profesional. Teníamos datos que los niveles, de los estudiantes de nuevo ingreso, no alcanzaban el nivel funcional, pero como curricularmente deberían de contar con ello, se hizo necesaria esta tarea que determinaría el contenido de inicio de un curso de cálculo diferencial

Así uno de los primeros productos obtenidos, con la importante colaboración de la Dra. Magally Martínez de la UAEMex, es el diseño y elaboración del pretest diagnóstico, como instrumento de medición que diera cuenta del estado de conocimiento, sobre aspectos básicos y necesarios para el estudio del cálculo y del nivel de competencia de los estudiantes. Los resultados que presentamos arriba en la tabla 1 del apartado 2.2 se obtuvieron en esta etapa. Una vez diseñado el equipo de trabajo de la UAEMex, produjo la versión en línea del mismo (véase figura 2), creando para ello bases de datos que nos permitieran un procesamiento e interpretación de los resultados.

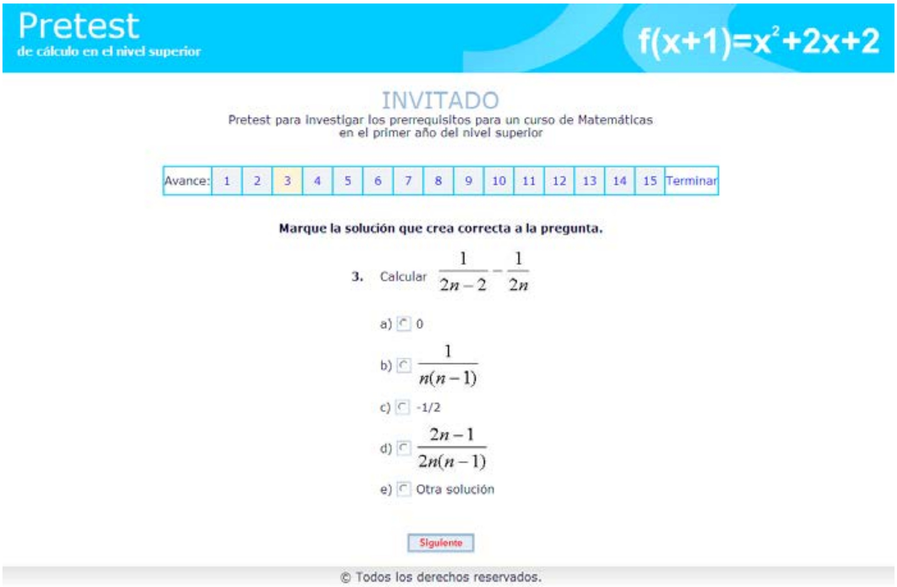

Figura 2. Una pantalla del pretest en línea

Para iniciar un curso de cálculo diferencial, proponemos un proyecto de acción práctico para introducir el concepto de función, es decir, plantear de inicio un problema que sea de interés para el estudiante, en donde al resolverlo emerja el concepto a enseñar. La elección del problema constituye en realidad un proyecto de investigación y en nuestro caso concluyó con la elección de construir poleas que simulan levantar un determinado peso. Para ello se desarrollaron tres escenarios didácticos interactivos; cuestionarios para alumnos; hojas de explicación de objetivos para profesor; hojas de manejo de escenarios.

Se propuso la primera a propuesta de reforma curricular, al sustituir el tratamiento de los números reales, primer tema de un curso de cálculo diferencial, por el de funciones reales. Para crear el escenario didáctico que introdujera el concepto de función real, se diseño el proyecto de acción concreto de Poleas, que consiste de tres escenarios interactivos con poleas, que el estudiante puede manipular para jalar una determinada carga. Al establecer la relación matemática de este proceso en tres etapas, emerge en forma natural el concepto de función y dependencia funcional.

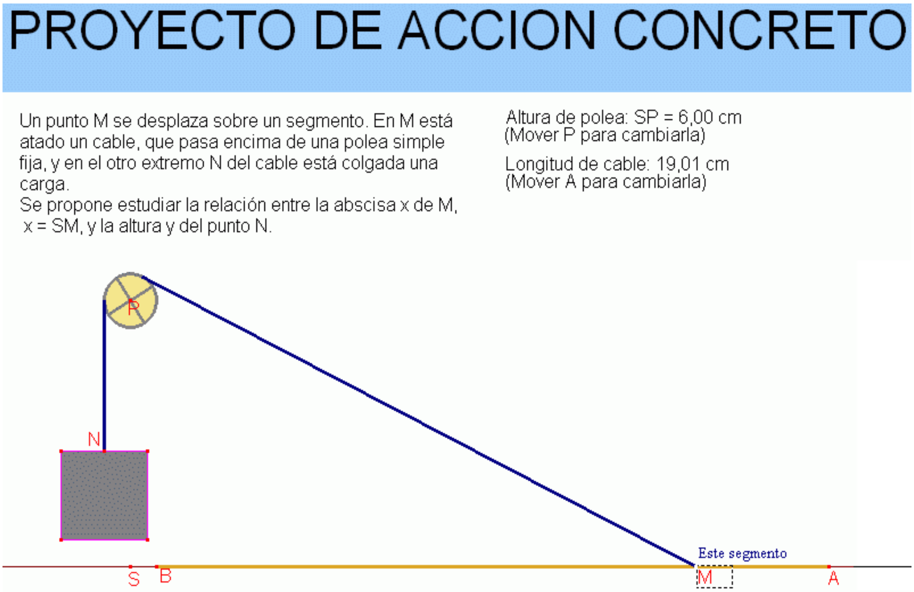

Figura 3. El escenario de polea creado en Java.

En lo que respecta a la búsqueda, selección, exposición, análisis y discusión crítica de artículos, hasta el día de hoy se han expuesto: 18 artículos, dos conferencias magistrales y una exposición de trabajo. Los trabajos llevan la dirección de producir y diseñar experiencias de aprendizaje con tecnología para la promoción de conceptos matemáticos del cálculo, y discutir diversas propuestas de carácter histórico-epistemológico que puedan mejorar la enseñanza del cálculo

En este sentido se ha propuesto introducir los conceptos del cálculo diferencial con los polinomios. La razón de proponer de inicio trabajar con polinomios se debe a que históricamente son las primeras funciones que aparecen en la historia del cálculo y permiten ejemplificar la mayoría de los conceptos propios del cálculo, con relativa simplicidad algebraica y numérica. Es importante señalar que la dificultad algebraica de la función podría distraer u ocultar el concepto bajo estudio.

Lo anterior requiere de un acercamiento didáctico bien definido y éste es el que configura la propuesta que se presenta aquí y que ya ha sido experimentada con profesores y estudiantes. Para lograr el objetivo de nuestro proyecto de acción práctica, el esbozo gráfico de un polinomio en primer término y enseguida el de una función racional (Cuevas & Mejía, 2003). También se propone iniciar el estudio del esbozo gráfico en los polinomios haciendo un estudio reflexivo sobre las raíces reales de una ecuación, este tema que formalmente sería de precálculo adquiere relevancia en nuestra propuesta por que representa uno de los ejes fundamentales en el estudio del cálculo. En efecto, si se tiene una forma adecuada de calcular y un significado claro de lo que una raíz real representa, conceptos como el de monotonía, puntos críticos, concavidad, y puntos de inflexión se simplifican de manera notable en su cálculo y análisis.

Precisemos este tema. Si el estudiante mediante problemas concretos reconoce el significado de una raíz real en forma algebraica, gráfica y numérica y mediante un uso adecuado de algún programa computacional, se le proponen problemas en cada uno de los registros anteriores con actividades que promuevan las respectivas conversiones o articulaciones a los respectivos registros de representación semiótica (RRS). Recíprocamente se le enseña como construir polinomios que tengan raíces reales con valores preestablecidos. Este estudio sería incompleto si no se considera el signo de la función ya que al determinar todas las raíces, por un principio de continuidad básico, se pueden establecer los intervalos que tienen un mismo signo. Recíprocamente, si se conoce el signo de una función se pueden localizar sus raíces.

Es importante hacer un paréntesis para señalar cómo al trabajar de esta manera el estudiante se da cuenta de los elementos didácticos apuntados. Primero es importante que desde el punto de vista psicológico y didáctico cada etapa dé lugar a un objetivo. En nuestro caso la comprensión del significado de las raíces reales marca dicho objetivo. Otra regla fundamental es que cada etapa parcial siente las premisas correspondientes para la siguiente etapa. En este ejemplo el cálculo de las raíces reales es una etapa parcial en el esbozo gráfico, la siguiente es el signo y en efecto las raíces reales cumplen con este cometido. Al resolver problemas en forma directa y algebraica, el estudiante toma conciencia del registro algebraico, al calcular su valor en forma aproximada y numérica del RRS aritmético o numérico, al representar el problema en forma gráfica el correspondiente RRS gráfico

Al establecer no sólo el cálculo de las raíces de un polinomio sino además solicitar polinomios que tengan como raíces valores dados de antemano estamos dando cuenta de la operación inversa. Al aplicar el concepto de raíces para determinar el signo de la función estamos utilizando el concepto recién adquirido en un problema de aplicación del mismo.

El cálculo de la monotonía, se simplifica de forma notable, utilizando el resultado del teorema que asocia el signo de la derivada con su monotonía y de que si se conocen las raíces del polinomio que resulta de la derivada determinar el signo es sencillo puesto que al ser el polinomio una función continua, el signo del mismo queda determinado por los intervalos cuyos extremos son las raíces del mismo.

En la idea de dosificar la complejidad del problema se plantea proceder de la siguiente forma. En primer término estudiar, analizar y establecer métodos para el cálculo de raíces reales de un polinomio. Enseguida plantear como un problema práctico conocer el signo del polinomio (en muchas aplicaciones económicas y de ingeniería sólo importa el análisis de la parte positiva de la función), esto simplifica de forma notable el análisis y significado de la monotonía y concavidad de una función. Enseguida hacer un estudio sobre los límites a + ∞ y - ∞ de un polinomio en la idea de determinar con precisión que al definir un esbozo gráfico se tiene que saber de dónde viene la función y hacia dónde va. Es conveniente realizar el estudio tanto en forma numérica como algebraica de tal forma que al tabular, con ayuda de la computadora, valores de la función el estudiante adquiera una intuición que después confirmará con sus cálculos algebraicos. Enseguida, se puede considerar que la gráfica de la función esta formada por pequeños segmentos de recta (de hecho, es la forma en que una computadora construye la gráfica). Numéricamente, la pendiente de esos segmentos de recta no es más que la razón de cambio que es una aproximación para la derivada. Para el problema planteado lo que interesa principalmente es el signo y los ceros de la razón, información que obtenemos de la derivada en forma semejante a la del polinomio original puesto que las derivadas de un polinomio siguen siendo polinomios.

4.Conclusiones

Establecer un acercamiento didáctico al cálculo diferencial e integral, mediante una trasposición didáctica acorde al desarrollo histórico de los conceptos del cálculo. Partiendo del hecho de que toda forma de conocimiento esta mediada por la acción de una herramienta material y/o simbólica, proponemos que se incorpore en los cursos de cálculo diferencial a la computadora pero más que como un resolvedor o graficador de funciones se propone su uso como una herramienta cognitiva.

También se estudia el diseño de una propuesta que favorezca acercamientos para que el estudiante construya conceptos importantes del cálculo diferencial e integral. Esta propuesta deberá integrar varios registros de representación a explorar bajo un esquema didáctico definido.

Por ello se propone, para introducir cada concepto matemático importante del cálculo, la creación de escenarios didácticos interactivos computacionales que simulen una situación real, de tal forma que al establecer el modelo matemático de solución los conceptos matemáticos a enseñar emerjan. Se necesita una base empírica, que resulta de la observación de cómo estudiantes se comportan en sesiones experimentales.

Referencias

Adjiage, R. & Pluvinage, F., 2008, A numerical landscape (chapter 1). In Calvin L. Petroselli (Eds.), *Science Education Issues and Developments,* New-York: Nova Publishers (p. 5-57).

Aebli, H. (1958) *Una didáctica fundada en la psicología de Jean Piaget*, Kapelusz, Biblioteca de Cultura Pedagógica, Argentina.

Aebli, H. (1995) *Doce formas de enseñar*, Narcea, España.

Artigue, M. (1998). *Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares?* Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Vol. I No. 1.

Brousseau, G. (2007). La didactique « spontanée » et le tracassin des réformes. http://www.ardm.asso.fr/didactique/brousseau_seminaire/didactique_spontanee.html

Burn, B. (2002), Limit - a proof-generated concept in Pope, S. (Ed.) *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics* 22(3)

Cantoral, R. & Farfan, R. M. (2003) *Mathematics education: a vision of its evolution* Educational Studies in Mathematics 53, p. 255–270

Cuevas, C. A. (1999) *Hacia una clasificación de la computadora en la enseñanza de las matemáticas,* Investigaciones en Matemática Educativa II, Grupo Editorial Íbero América.

Cuevas, C. A. & Pluvinage, F. (2003) *Les projets d'action pratique, éléments d'une ingénierie d'enseignement des mathématiques*, Annales de didactique et de sciences cognitives, Vol. 8, Francia, p. 273-293.

Cuevas C. A. & Mejía, H. (2003) *Cálculo Visual*, Oxford, México.

Chevallard, Y. (1985) *La transposition didactique - Du savoir savant au savoir enseigné*, Grenoble: La Pensée Sauvage, Deuxième édition augmentée : 1991

Duval, R. (1995) *Sémiosis et pensée humaine*, Bern: Peter Lang

Filloy, E y Lema, S. (1996) El teorema de Tales; significado y sentido en un sistema matemático de signos, en *Investigaciones en Matemática Educativa* (Editor F. Hitt), Grupo Editorial Iberoamérica, México

Grabiner, J.W. (1983) *The changing concept of change; the derivative from Fermat to Weierstrass*, Mathematics Magazine, 56, 195-206

Gravemeijer, K. & Doorman, M. (1999) *Context problems in realistic mathematics Education: a Calculus course as an example*, Educational Studies in Mathematics 39, Kluwer Academic Publishers, Netherlands

Houssaye, J. (1988) *Le triangle pédagogique*, Bern: Peter Lang

Mejía Velasco H. (1996) *Alternativas de desarrollo de software educativo en México*, Investigaciones en Matemática Educativa, Grupo Editorial Ibero América.

Moreno, S. & Cuevas, C.A. (2004). Interpretaciones erróneas sobre los conceptos de máximos y mínimos en el Cálculo Diferencial, en: Ávila, A. (ed.) *Educación Matemática* Vol. 16 núm. 2, México.

NCTM. (2008). News Bulletin, May/June 2008, Volume 44, Issue 9, p. 6. http://www.nctm.org/about/content.aspx?id=14233

OECD (2006) Assessing Scientific, Reading, and Mathematical Literacy, *A Framework for PISA 2006*, http://213.253.134.43/oecd/pdfs/browseit/9806031E.PDF

Puig, L. (2004) *History of Algebraic Ideas and Research on Educational Algebra*, ICME-10 Regular Lecture, *http://www.uv.es/puigl/icme-10.pdf*

Stroup, W. (2002) *Understanding Qualitative Calculus: A Structural Synthesis of Learning Research*, International Journal of Computers for Mathematics Learning 7, p. 167-215

Wikipedia (página consultada en mayo de 2009) Artículo Polea, http://es.wikipedia.org/wiki/Polea

Wilson, J. W. (1971) Evaluation in secondary school mathematics, in B. S. Bloom, J. T. Hastings, and G. F. Madaus, *Formative and Summative Evaluation of Classroom Learning* (Chapter 19), New York: McGraw-Hill