UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2008, Número 16, páginas 183 - 196
ISSN: 1815-0640

Reflexões sobre os currículos de Matemática em Portugal

Rui Feiteira e Marília Pires

Resumen

Neste trabalho procuramos dar uma perspectiva, ainda que superficial, sobre a evolução dos currículos de Matemática, em Portugal, desde a segunda metade do século XX na sua relação com os contextos sociais. A nossa atenção centra-se principalmente sobre o ensino secundário e o terceiro ciclo do ensino básico e nos temas matemáticos a tratar nestes ciclos. Na parte final, apresentamos uma proposta de temas a incluir, formal ou informalmente, nestes ciclos de ensino.

Abstract

In this work we try to give a superficial overview of the evolution of Mathematics *curricula* in Portugal over the last years together with its social context. We focus our attention in the secondary school *curriculum* and the third cycle of basic school curriculum, since the second half of XX century and in the mathematical topics to be treated in those grades. We also present a proposal concerning themes that we think could be included in those grades, in a formal or informal way.

Introdução

É grande a confusão entre os conceitos programa e currículo. Não temos qualquer pretensão de analisar estes conceitos detalhadamente, mas, por uma questão de clarificação, vamo-nos socorrer duma citação de Ponte, Matos e Abrantes (1998, pág. 9) com a qual nos identificamos:

"…conjunto de orientações sobre o ensino de um dado ciclo de estudos ou de uma dada disciplina, acompanhado de indicações para a sua implementação prática. De um modo geral, um currículo contempla objectivos, conteúdos, metodologias e materiais e formas de avaliação".

O currículo de Matemática, em Portugal, tem sofrido mudanças ao longo dos tempos que, de uma forma geral, reflectiram alterações ao nível das necessidades de ordem social e política (Porfírio, 1998). Este autor afirma mesmo que as reformas curriculares em Portugal têm assumido a forma de *mudança por decreto*. Nesta óptica, um currículo nunca pode ser tido como definitivo, pois a sociedade está em constante mutação. Deverá a Matemática escolar reflectir apenas mudanças sociais e políticas? Qual o papel reservado à Matemática, enquanto ciência em desenvolvimento permanente? Deverá a Matemática escolar mudar "atrás" das mudanças sociais, ou, pelo contrário ser ela própria agente dessa mudança?

Neste trabalho focamos a nossa atenção essencialmente na evolução dos conteúdos embora seja feita uma abordagem superficial às outras componentes do currículo.

Passado e Presente

Já que todo o currículo é influenciado pelas características e necessidades sociais, cada currículo deverá ficar definitivamente impregnado pelas marcas do tempo e da sociedade a que se refere. A influência das necessidades sociais no desenvolvimento curricular, pode ser questionável, uma vez que sempre existiu um currículo nacional, sendo as necessidades sociais bem diferenciadas, às vezes em regiões do país bem vizinhas. O desenvolvimento curricular é principalmente influenciado por outros factores, tais como a forma como se encara o que é importante na disciplina, as suas principais características e natureza que influenciam a prioridade dos temas a integrar no currículo e a forma de os trabalhar (Porfírio, 1998). Vejamos de seguida, de forma abreviada, como evoluiu o currículo de Matemática desde o pós-guerra.

Segundo Ponte (2003a) o currículo de Matemática sofreu uma grande evolução na segunda metade do século XX. Na primeira metade desse século, a Matemática era encarada como uma "disciplina mental" e o seu ensino era marcadamente elitista (Abrantes, 1994). Ponte (2003a) afirma que durante muitos anos, no ensino pré-universitário, os alunos estudavam Aritmética, Geometria e Álgebra. Os programas eram pouco mais do que uma lista de conteúdos a tratar e, em todos os níveis de ensino, a ênfase era colocada no treino e técnicas de cálculo. Para Ponte (2003a) o ensino da Matemática, nesta altura, em Portugal, era essencialmente orientado para a aprendizagem do cálculo.

No período pós-segunda guerra mundial, a rápida evolução da tecnologia e as condições socioeconómicas influenciaram uma mudança profunda no ensino da Matemática a nível internacional[1]. Esta nova abordagem apresentava a Matemática de uma forma unificada, apoiando-se na linguagem dos conjuntos, dando especial destaque às estruturas algébricas e à lógica (Ponte, 2003a; Abrantes, 1994).

Começava assim o movimento da Matemática Moderna. Segundo Matos (2006), esta reforma inicia-se em 1959, em Royaumont, com uma convenção de 60 professores de 20 países, sob o auspício da Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Económico (OCDE). Neste encontro pretendia-se lançar as bases para uma reforma do ensino da Matemática pré-universitária. Este movimento procurava proporcionar aos alunos uma melhor compreensão das ideias matemáticas, e ao mesmo tempo, melhorar as suas competências de cálculo (Ponte, 2003a). Na altura, argumentava-se que as dificuldades dos alunos decorriam do

[1] Segundo Porfírio (1998) e Ponte (2003a), neste período, ao nível do ensino universitário, introduziram-se novos temas resultantes de investigações recentes, como por exemplo, a teoria de conjuntos, a lógica e a teoria da probabilidade. Assim, os matemáticos reclamavam a necessidade de o ensino da Matemática, nos níveis de ensino mais elementares, preparar os alunos para os estudos daqueles temas.

facto de estes não relacionarem conceitos. Em Portugal este movimento começou a fazer-se sentir no início da década de 60. Até aí os programas de Matemática datavam de 1947 e eram apoiados por livros únicos escolhidos pelo Ministério da Educação e usados por todo o país. O movimento da Matemática Moderna, segundo Ponte (2003a), conheceu em Portugal dois momentos distintos, uma primeira fase, de carácter experimental, incidiu sobre o então chamado 3.º Ciclo do ensino liceal, correspondente aos actuais 10.º e 11.º anos de escolaridade[2], sob orientação do professor José Sebastião e Silva. Segundo Matos (2006), esta reforma curricular começou a ser implementada em 1963 em três turmas constituídas pelos melhores alunos do 6.º ano (actual 10.º ano de escolaridade), uma em cada um dos liceus nacionais (Lisboa, Porto e Coimbra). Até 1965 o número de turmas iria aumentar para dezanove, distribuídas pelos liceus de Lisboa, Porto, Coimbra, Braga e Leiria. O programa experimental incluía novos temas como a Lógica, a Teoria dos Conjuntos, Álgebra (grupos, anéis, corpos, números complexos, álgebra de Boole, álgebra linear), Cálculo Integral, Probabilidades, Estatística e Cálculo Numérico aproximado. Alguns temas "clássicos" mantinham-se (Cálculo Diferencial, Trigonometria e Geometria Analítica) e desaparecia a Aritmética Racional (Matos, 2004), embora alguns tópicos de Aritmética Racional aparecessem diluídos ao longo do programa. Nesta fase experimental os alunos eram sempre os melhores dos respectivos liceus e os professores que leccionavam a chamada “turma piloto” eram cuidadosamente escolhidos. Da autoria de Sebastião e Silva havia um manual e um “livro guia” distribuído em fascículos aos alunos e professores. A edição destes textos era feita pelo Ministério da Educação com a cooperação da OCDE.

Esta “turma piloto” tinha mais um tempo lectivo semanal do que as outras turmas que seguiam o programa tradicional. Nos anos 70[3] deu-se início à segunda fase da introdução da Matemática Moderna: a Matemática Moderna para todos! Elaboraram-se novos programas e manuais escolares e apareceram novas indicações metodológicas, ainda que de forma muito incipiente. Enquanto, na primeira fase, a mudança de conteúdos foi precedida por uma reflexão acerca dos métodos a usar e por um acompanhamento constante dos poucos docentes intervenientes, que, recorde-se, trabalhavam com turmas de poucos e bons alunos, já na segunda fase, tendo-se este ensino generalizado a todos os níveis, alunos e professores, não houve a mesma preocupação (Porfírio, 1998). Nessa altura desenvolveram-se várias acções de formação apenas com o intuito de actualizar cientificamente os professores. Estes programas, com alguns retoques, sobreviveram em Portugal até 1991, tanto para o 3.º Ciclo do Ensino Básico[4] como para o Ensino Secundário e, de uma forma geral, o domínio de técnicas teve sempre um grande peso nestes programas retocados (Porfírio, 1998).

---

[2] Em Portugal, actualmente, estes níveis de escolaridade, não obrigatórios, são parte integrante do Ensino Secundário (15 – 17 anos), composto por 3 anos de escolaridade.

[3] Segundo Matos (2004), em 1977 é lançado o Ano Propedêutico (actual 12º ano). Faziam parte do programa para este ano: cónicas, análise infinitesimal, estruturas algébricas, números complexos e vectores e transformações geométricas.

[4] Este nível de ensino (obrigatório), precede o ensino secundário, e é composto por 3 anos de escolaridade (11- 14 anos).

Assim, no nosso país

> "*…o treino do cálculo com expressões algébricas e a prática de exercícios artificiosos com limites e derivadas, nunca chegaram a perder por completo o seu lugar. Em vez de uma substituição da Matemática tradicional pela Matemática moderna, verificou-se uma integração das duas.*"
>
> (Ponte, 2003a, p. 12)

Enquanto em Portugal se generalizava a filosofia da Matemática Moderna a todo o ensino, na década de 70 nos Estados Unidos da América já apareciam críticas ferozes ao movimento da Matemática Moderna. Com efeito, como as competências dos alunos tanto no raciocínio, como na resolução de problemas e no cálculo não mostrassem quaisquer progressos (Ponte, 2003a), antes pelo contrário, o movimento *back to basis* ganha algum terreno. No entanto, este movimento entra rapidamente em declínio, tendo como principal causa a publicação dos resultados do *Second International Mathematics Study*. Segundo este estudo, o Japão é o país que consegue os melhores resultados, seguido de perto por várias nações europeias. Simultaneamente este estudo revelou uma situação preocupante no ensino da Matemática dos Estados Unidos (Matos, 2004). Em Portugal o movimento *back to basis* passou praticamente despercebido. Segundo Ponte (2003a) não haveria razões para a comunidade portuguesa reclamar mais destaque para as competências do cálculo, pois, na realidade, apesar das alterações curriculares ditadas pelo movimento da Matemática Moderna, as competências de cálculo continuavam a ser fundamentais para ultrapassar com sucesso os exames de acesso à Universidade.

A década de 80 trouxe a publicação de alguns documentos tais como, *Agenda for Action*, *Mathematics Counts* e *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar*, e viu surgir um novo movimento de reforma no ensino da Matemática a nível internacional. O movimento da Matemática Moderna tinha trazido consigo um novo simbolismo, por vezes incompreensível, um rigor de linguagem que não se adequava já ao informalismo social e que, por isso, não era adoptado pelos alunos e professores com grande entusiasmo. O surgimento de uma juventude com pouca apetência pelo esforço intelectual, fruto das modificações sociais da época e da primeira grande massificação do ensino, foi outro dos factores de insucesso desta experiência.

Em 1988, em Portugal, a recém-criada Associação de Professores de Matemática edita o documento *Renovação do Currículo de Matemática.* Neste documento, pela primeira vez entre nós, é dada especial atenção à resolução de problemas e à utilização das novas tecnologias. São aí também expostas as principais orientações curriculares dos anos 80. Segundo Porfírio (1998) estas perspectivas contrastavam fortemente com os programas que estavam em vigor nessa altura.

A Lei de Bases do Sistema Educativo aprovada em 1986 proporcionou ao Ministério da Educação o ensejo para proceder a uma reformulação geral dos programas de Matemática no início da década de 90 (Ponte, 2003a). No que diz respeito ao ensino secundário, esta reforma ficou fortemente marcada pela diminuição de uma hora semanal na escolaridade da disciplina de Matemática (de 5 para 4 horas). Com programas concebidos para uma escolaridade de 5 horas semanais, nos 10º e 11º anos a extensão dos programas cedo se fez notar. Nos finais da mesma década acontece nova revisão curricular, inevitável tendo em vista a desadequação da extensão dos programas às horas lectivas dedicadas à disciplina. Segundo Ponte (2003b), este processo foi conduzido de uma forma completamente diferente de outras reformas ou revisões curriculares. Os professores, desta vez, foram apoiados, nomeadamente através de vários mecanismos de acompanhamento que incluíam, por exemplo, publicação de brochuras, criação de um corpo de professores acompanhantes e cursos de formação. Esta última reformulação curricular[5] tentou acompanhar as novas correntes que, entretanto, se tinham vindo a afirmar no panorama internacional (Santos, Canavarro & Ponte, 2000). A Geometria, a Estatística e as Probabilidades surgiram valorizadas e, segundo Santos, Canavarro & Ponte (2000), na abordagem aos conceitos deu-se primordial importância à ligação com a realidade. Em consonância com as *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar* foram recomendadas novas metodologias, como por exemplo, o trabalho de grupo e a introdução das novas tecnologias (calculadora gráfica e computador). Para Buescu (2003) esta reforma foi infeliz por duas razões: primeiro, porque foi realizada sem a intervenção da comunidade matemática, segundo, porque não teve em conta as críticas desta mesma comunidade, no sentido de evitar erros desnecessários. Ainda segundo Buescu, quando esta reforma foi implementada entre nós, muitas das suas propostas já tinham sido abandonadas. Por exemplo, em 1995 a Comissão de Acompanhamento Curricular, do Reino Unido, aconselhava a que se abandonassem as calculadoras nos exames nacionais. Em Portugal foram fortemente introduzidas por essa época.

No início da década de 90 foram igualmente apresentados os novos programas para o 3.º Ciclo do Ensino Básico. Nesta reforma foram introduzidos tópicos de Estatística e Probabilidades e reservou-se um papel de destaque para a Geometria. Este programa não era tão rígido quanto os anteriores, pois permitia alguma margem de manobra ao professor, e simultaneamente centrava o trabalho mais nos alunos, apontando para uma aprendizagem construtiva (Cabrita, 1992). Mas, logo em 1994[6], começaram a levantar-se algumas vozes de descontentamento entre os professores que leccionavam estes níveis. Estes afirmavam ser praticamente impossível cumprir o programa, caso se quisesse obter sucesso educativo (Batista e Barros, 1994). Este facto já tinha sido colocado em evidência pelos professores que estiveram envolvidos na fase de experimentação destes programas (Cabrita, 1992).

[5] Segundo Ponte (2003b), este programa dá continuidade à iniciação à Análise Infinitesimal e Cálculo Algébrico, reservando um lugar significativo à Geometria, à Estatística e às Probabilidades.

[6] Estas críticas tornam-se relevantes pois permitem avaliar como decorreu a implementação no terreno da reforma, ganhando mais força, por se referirem a um ciclo de ensino por completo.

Em 1994, Batista e Barros defendiam a existência de um "*programa mínimo exequível*" baseado nos temas considerados prioritários. Sugerem que alguns temas sejam excluídos, tais como semelhanças de figuras, lugares geométricos, estatística, espaço - outra visão e os subtemas rotações e isometrias. Estas autoras sugerem a exclusão destes temas não por terem menos interesse do que outros, mas pela possibilidade de integrar alguns destes temas noutras unidades temáticas e, principalmente, pela grande extensão do programa que obrigava a retirar vários temas.

No que diz respeito à extensão do programa concordamos plenamente com estas autoras. A nossa experiência profissional confirma-o. Principalmente em relação aos 7.º e 9.º anos de escolaridade. Nestes anos, o cumprimento integral do programa só pode ser feito à custa da qualidade do ensino. De facto, em todos os anos lectivos em que leccionámos aqueles anos de escolaridade não conseguimos cumprir o programa. Não fomos caso isolado, pois os colegas que à altura leccionavam connosco aqueles anos de escolaridade também não cumpriram o programa. O conteúdo mais prejudicado, independentemente de ser do 7.º ou 9.º ano, era, invariavelmente, a Geometria. Isto porque usualmente nas planificações a longo prazo, nas escolas, este tema surgia como o último a tratar, por ser de maior complexidade. Tal facto poderá ajudar a explicar as dificuldades que grande parte dos alunos do 10.º ano de escolaridade sentem durante quase todo o 1.º período, onde os conhecimentos de Geometria têm que ser necessariamente mobilizados.

Em 2001, foi publicado o *Currículo Nacional do Ensino Básico* (CNEB), que passou a coexistir com os programas de 1991. Um dos efeitos desta reorganização curricular foi a diminuição da carga semanal da disciplina de Matemática que passou de 200 para 180 minutos. A este propósito Marques de Sá (2003), em *Alguns pontos críticos no Ensino da Matemática*, refere que esta disciplina tinha em 1997, um peso relativo de 13% em relação ao total da carga horária prevista para o 3.º Ciclo do Ensino Básico. Tendo esse peso descido[7] para os 11%[8] depois da reorganização curricular.

Dificilmente se entende esta redução horária numa disciplina que frequentemente coloca muitos problemas aos alunos, principalmente quando simultaneamente se pede aos professores que trabalhem o programa colocando a ênfase na resolução de problemas e nas experiências de aprendizagem.

Centremo-nos agora no CNEB. Sem proceder à exclusão de temas[9] que tinha vindo a ser insistentemente sugerida por variados autores/professores, esta reforma

---

[7] Aconteceu o mesmo para a disciplina de Português. Esta pequena mudança não foi positiva, na medida em que, é por demais conhecida a dificuldade de grande parte dos alunos do Ensino Básico em interpretar os enunciados dos exercícios ou problemas. Este facto torna-se mais grave, pois a aprendizagem da leitura pode influenciar certos aspectos da aprendizagem da matemática, como por exemplo, a resolução de problemas (Morais, 2006).

[8] Fonte Deb (2001).

[9] Os conteúdos matemáticos a tratar são: Números e Cálculo, Geometria, Estatística e Probabilidade; Álgebra e Funções. Segundo (Santos, Canavarro & Machado, 2006) estas áreas associam-se com facilidade aos temas centrais dos programas do 3.º Ciclo, em vigor desde 1991.

introduziu um novo conceito: as **competências** essenciais. Sejam elas de carácter geral ou específico, todo o edifício se constrói baseado nas competências que se espera que os alunos adquiram no fim de cada ciclo de estudos. Tudo deve ser ajustado ao que se espera que o aluno seja capaz de fazer, das atitudes que se espera que seja capaz de ter.

As competências são então definidas em função de oito aspectos que combinam atitudes gerais dos alunos com capacidades matemáticas específicas (Santos, Canavarro & Machado, 2006). Segundo Ponte, Matos, e Abrantes, (1998), na realidade a definição de *competências* acaba por ser equivalente a definir um programa mínimo que todos os alunos devem receber, ou seja, ao definir-se competências está-se na realidade a "impor" objectivos mínimos. Para estes autores, esta definição de competências pode, na prática, estar a criar dois currículos distintos, correndo-se o risco de os professores optarem na sua generalidade por pôr em prática o mais limitado (Ponte, Matos, e Abrantes, 1998).

Para Crato (2006) a introdução do *Currículo Nacional* de 2001 criou uma ambiguidade legal. Na realidade de acordo com os objectivos deste currículo, o currículo de 1991 teria obrigatoriamente de deixar de ser usado. Mas tal não aconteceu, o currículo de 1991 não foi revogado. Como consequência deste vazio legal, ambiguidade e até, nalguns casos, uma certa incompatibilidade, os professores refugiam-se cada vez mais nos manuais, que como bem sabemos, em grande parte, são de qualidade duvidosa[10]. Também Serrazina e Oliveira (2005) destacam a falta de um acompanhamento, sob a forma de apresentação e divulgação de possíveis formas de concretização do CNEB, o que levou a constrangimentos na implementação deste e à confusão de conceitos como *objectivos* e *competências*.

Assim, os programas de 1991, mais prescritivos, assumem os temas matemáticos como conceitos estruturantes; o currículo, mais orientador, equilibra os conteúdos matemáticos com as lógicas das abordagens respectivas (Santos, Canavarro & Machado, 2006).

Mais recentemente, no ano lectivo 2003/04, entrou em vigor uma nova reforma no ensino secundário onde foram criadas 3 novas disciplinas de Matemática: Matemática A, para os Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas; Matemática B, para os Cursos Científico-Humanístico de Artes Visuais e para os cursos Tecnológicos; Matemática Aplicada às Ciências Sociais, para os alunos do Curso Científico-Humanísticos de Ciências Sociais e Humanas e para o Curso Tecnológico de Ordenamento do Território. Segundo Santos, Canavarro & Machado (2006), a diversidade de disciplinas em Matemática ficou a dever-se à procura de uma maior adequação dos alunos aos diferentes percursos académicos ou profissionais que pretendem seguir.

Curiosamente vários cursos universitários, da área das engenharias, admitem alunos oriundos quer do percurso que contém Matemática A quer do percurso que

[10] O que levou, em 2005, o Ministério da Educação a introduzir a certificação de manuais através de uma comissão especializada designada para o efeito.

contém Matemática B, o que está a tornar algo caótica a integração dos alunos que ingressam no primeiro ano destas engenharias.

Não poderíamos finalizar esta secção sem referir o novo programa[11] de matemática para o ensino básico, homologado em Dezembro de 2007. Este documento tenta fazer uma ligação entre os programas de 1991 e o CNEB. A equipa redactora do documento apresenta algumas inovações ao nível de conteúdos a leccionar. Por exemplo, reforçaram-se os conteúdos de Estatística (com a introdução ao estudo de dados bivariados), estuda-se a função quadrática simples $y = ax^2, a \in Z$. Alguns conteúdos que antes se estudavam no 3.º ciclo passam a ser leccionados no ciclo anterior, por exemplo, os números compostos e primos. Os conteúdos estão organizados por ciclo tal como acontece no CNEB. Introduzem-se as capacidades transversais e existe uma preocupação clara com a articulação entre ciclos. Para implementar e desenvolver este programa parece-nos essencial que seja aumentada a carga horária semanal da disciplina, pelo menos para o 3.º ciclo. Com efeito, além do programa ser extenso, é ainda pedido que ao longo do ciclo se efectuem experiências matemáticas ricas, como jogos, pequenas investigações, trabalhos de projecto/grupo. Na nossa opinião, só com mais tempo para leccionar a disciplina esta abordagem terá resultados positivos.

Antes da implementação a nível nacional está prevista uma fase experimental no ano lectivo 2008/09 com 40 turmas de todos os ciclos do ensino básico. Só depois esta mudança deve ser generalizada a todo o país.

Depois desta pequena incursão temporal, há duas conclusões que podemos retirar de modo imediato:

I. as reformas curriculares, em Portugal, para a disciplina de Matemática, seguiram no essencial os movimentos internacionais vigentes, à excepção do movimento *back to basis*, que não teve grande repercussão entre nós;
II. o desenvolvimento da Matemática como ciência, apenas por duas vezes, teve algum peso na construção do currículo:

    a. na reforma do professor Sebastião e Silva. Introduziram-se tópicos sobre teoria de conjuntos, lógica, teoria da probabilidade e cálculo numérico. A introdução destes temas, seguiu a tendência internacional e resultou de uma pressão da comunidade matemática. Com efeito, esta reclamava, na altura, a necessidade de o ensino da Matemática, nos níveis de ensino mais elementares, preparar os alunos para os estudos daqueles temas;
    b. na inclusão de tópicos de Estatística no 3.º ciclo do Ensino Básico. Segundo (Ponte, Matos, e Abrantes, 1998) esta é uma área que corresponde a uma maneira actual de fazer Matemática, e tem uma importância crescente na sociedade

[11] Disponível em http://www.dgidc.min-edu.pt/programa_matematica/programa_matematica.asp

Novos temas para o currículo

No documento *Renovação do Currículo de Matemática*, que data de 1988, a certa altura pode-se ler:

> *"Novos temas poderão ganhar o direito a um lugar no currículo, ao mesmo tempo que alguns dos conteúdos existentes serão tratados noutra perspectiva e outros poderão perder a sua importância ou mesmo desaparecer:*
> *Tópicos a ser introduzidos, poderão incluir, por exemplo: (…)*
> *3. Matemática discreta. Serão de considerar diversos tópicos ligados ao estudo das propriedades matemáticas de conjuntos e sistemas finitos, incluindo o estudo de grafos e das suas representações matriciais, um estado mais aprofundado de sucessões e séries, de cálculo combinatório, e de equações às diferenças.*
> *4. Métodos de Matemática numérica. Poderão ter um lugar relevante tópicos como métodos iterativos de solução de equações e sistemas de equações algébricas, cálculo matricial, aproximações e erros."* (APM, 1988, p. 61-62)

As normas do NCTM apontam nesta mesma direcção: a introdução de novos temas no currículo. Além disso, *Principles and Standards* (2000), da NCTM, dão especial importância a temas de Matemática Discreta, defendendo que estes temas deverão ser leccionados ao longo de toda a escolaridade. As áreas que a NCTM privilegia, dentro da matemática discreta, são a combinatória, os processos iterativos e a teoria de grafos. Na nossa opinião existem 2 temas que podem e devem ser trabalhados: a teoria de grafos, a partir do 3.º Ciclo do Ensino Básico; a teoria de jogos, no ensino secundário. Julgamos que a integração destes temas daria uma visão bem diferente da Matemática aos nossos alunos. Com efeito, estes são temas que põem em evidência, de uma forma imediata, a presença e a importância da Matemática no nosso dia-a-dia.

Teoria de Grafos

Nos currículos actuais quer do ensino obrigatório quer do ensino secundário, na sua generalidade, não é contemplada qualquer unidade didáctica sobre Teoria de Grafos. A única e saudável excepção é o caso da disciplina de Matemática Aplicada às Ciências Sociais, destinada a alunos das áreas de Ciências Humanas e Sociais e ao Curso Tecnológico de Ordenamento do Território.

Dentro da sala de aula, este tema revela grandes potencialidades tanto ao nível do trabalho individual como ao nível do trabalho de grupo. Sendo este um ramo do conhecimento com aplicações em muitas outras áreas (Biologia, Sociologia, Psicologia, Relações Internacionais, Arquitectura, Engenharia, Música, Química…) coloca em evidência, de forma muito clara, a importância da Matemática no nosso quotidiano. É ainda possível mostrar, de forma simples e natural, o facto do conhecimento de algumas técnicas matemáticas poderem desempenhar um papel importante no processo de tomada de decisões pelas empresas.

O ensino de Teoria de Grafos, a um nível elementar, apresenta a grande vantagem de não necessitar de pré-requisitos, permitindo assim que tanto bons alunos como alunos com mais dificuldades, acompanhem com alguma facilidade e interesse o desenvolvimento dos conceitos escolhidos, ajudando assim a combater o desinteresse que por vezes se instala dentro da sala de aula de Matemática (Feiteira, 2007). Por ser um tema que se presta a modelar, de forma simples, situações da vida real constitui uma oportunidade ímpar de levar os alunos a fazer a ligação problema $\rightarrow$ modelo $\rightarrow$ solução $\rightarrow$ implementação $\rightarrow$ validação.

Além de mais, a Teoria de Grafos é uma área onde existe muita investigação. Muitas são as teses de doutoramento e os artigos científicos que se produzem actualmente neste tema. Oferece, assim, uma oportunidade de mostrar aos alunos uma Matemática activa e viva. Um exemplo do que afirmamos é o do problema do caixeiro-viajante, que pode ser facilmente apresentado aos alunos, conjuntamente com algumas das heurísticas mais ingénuas, mas cuja resolução exacta, em tempo útil, contínua a ser objecto de inúmeros estudos e está longe de se encontrar resolvido.

A integração de uma unidade, ou mais unidades dispersas ao longo dos anos de escolaridade, que contenha(m) alguns tópicos de teoria de grafos poderá permitir um excelente desenvolvimento ao nível da resolução de problemas, comunicação, raciocínio e modelação. Esta integração poderia surgir de duas formas distintas. Uma a um nível informal, onde o professor poderia trabalhar alguns conteúdos de teoria de grafos entre unidades didácticas ou como motivação na introdução de um novo tema,como por exemplo, funções ou sequências numéricas (ver Feiteira, 2007, capítulo III). Outra a um nível formal, fazendo um reajustamento dos conteúdos por ciclo, nomeadamente agrupando-os de uma forma diferente.

Acabamos esta secção com um pequeno exemplo que ajuda a ilustrar as potencialidades deste tema dentro da sala de aula.

Numa determinada turma, a uma determinada disciplina, um professor identificou as seguintes situações: a Ana não pode estar sentada perto da Raquel porque falam demais entre si; a Ângela não pode estar sentada perto da Catarina e da Maria, pela mesma razão; a Catarina não pode estar sentada perto Maria, pela mesma razão. Como distribuir estas alunas pela sala de modo a que não perturbem o funcionamento da aula? (retirado de Feiteira, 2007) Esta situação pode ser modelada por um grafo. Assim, Suponhamos que o vértice 1 representa a Ana, o vértice 2 representa a Raquel, o vértice 3 representa a Ângela, o vértice 4 representa a Catarina e o vértice 5 representa a Maria. Construindo um grafo de incompatibilidades, isto é, um grafo em que dois vértices estão ligados caso representem pessoas que não podem estar juntas, obtemos o grafo da figura 1. De seguida, iremos colorir o grafo de tal forma que os vértices adjacentes tenham cores diferentes (figura 2).

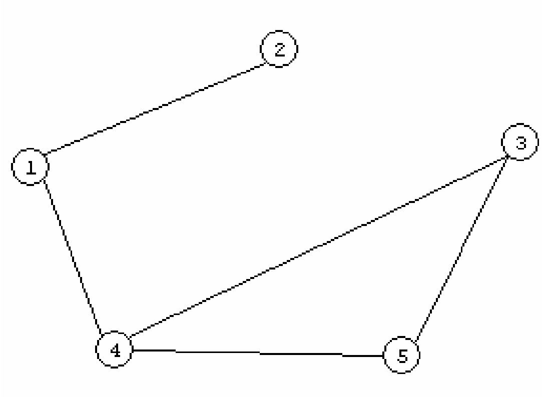

figura 1

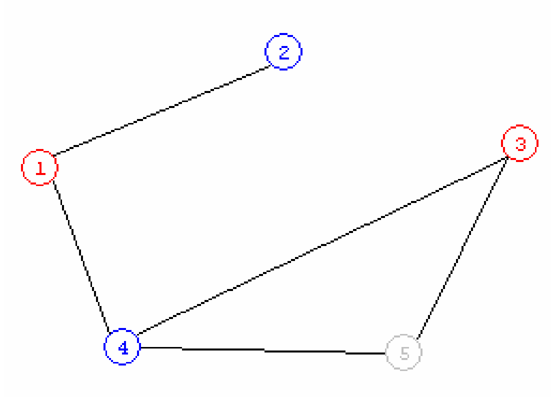

figura 2

Analisando a figura 2 o professor poderá sentar a Ana com a Ângela (ambas têm a mesma cor), a Catarina e a Raquel, enquanto que a Maria terá que se sentar num sítio afastado de qualquer uma das suas amigas. Note que esta coloração não é única pois o vértice 1 também pode ser pintado de cinzento e o vértice 2 pode ser pintado a vermelho ou azul. Desta forma o professor dispõe de três configurações diferentes para sentar estas amigas, podendo então optar por aquela que achar melhor. Esta questão poderá suscitar a discussão entre os elementos da turma sobre a melhor solução. Poderá acontecer que, trabalhando esta questão em pequenos grupos, os diferentes grupos determinem soluções diferentes.

Teoria de Jogos

Informalmente, a teoria dos jogos estuda as soluções ou equilíbrios possíveis em situações de conflito de interesses. A sua origem está intimamente ligada ao matemático John Von Neumann[12], que em 1928 publicou *Zur Theorie der Gersellschaftsspiel* (Sobre a teoria dos jogos de estratégia) e estabeleceu os primeiros esboços de uma teoria especializada em lidar com a natureza humana.

A premissa fundamental da teoria dos jogos é que os jogadores agem racionalmente, tomando as decisões de uma forma egoísta. De certa forma é equivalente afirmar que os jogadores da teoria dos jogos se assemelham aos responsáveis máximos pelas grandes decisões, sejam eles empresários ou políticos, e daí esta teoria ser uma ferramenta tão poderosa na análise de contextos sociais. Para ilustrar a afirmação anterior analisemos o famoso dilema dos prisioneiros. Imaginemos que dois assaltantes são capturados pela polícia e que, apesar de todos os esforços, a Polícia Judiciária não consegue obter provas suficientes para incriminar, de forma inequívoca, os dois assaltantes. Como último recurso, o inspector responsável pela investigação separa os dois assaltantes (de modo a que estes não tenham hipóteses de falar um com o outro) e apresenta-lhes a seguinte situação: se ambos confessarem o crime cumprirão 4 anos de prisão; se ambos não confessarem cumprirão 3 anos de prisão; por fim, se um confessar e o outro não

[12] John Von Neumann (1903-1957), matemático, nascido na Hungria, radicado nos Estados Unidos da América desde os anos 30.

confessar, o delator cumprirá 1 ano de prisão e o outro cumprirá 6 anos de prisão. A matriz que traduz a situação é a seguinte:

		Prisioneiro B	
		Confessa	Não Confessa
Prisioneiro A	Confessa	-4, -4	-1, -6
	Não Confessa	-1, -6	-3, -3

Como em qualquer das hipóteses os prisioneiros cumprem pena, estes acabam por perder anos de vida. Esse facto traduz-se pela presença de números negativos na matriz. Em qualquer uma das quadrículas preenchidas com números, o primeiro número diz respeito ao prisioneiro A e o segundo diz respeito ao prisioneiro B. Como devemos ler a tabela? Imaginemos que o prisioneiro A confessa e o prisioneiro B não confessa. Neste caso, a quadricula que traduz a situação é (-1, -6), isto é, o prisioneiro A cumpre um ano de prisão enquanto o seu colega cumprirá seis anos. Qual será a estratégia[13] a seguir por cada um dos prisioneiros? Olhando para a matriz anterior, facilmente se conclui que a melhor estratégia a adoptar (para qualquer um dos jogadores), se um deles escolher não confessar, é confessar. Por outro lado, se um deles escolher confessar, a melhor estratégia também é confessar. Portanto, se os dois assaltantes agirem racionalmente e individualmente, confessarão o crime (dado que se um deles não confessar fica claramente prejudicado). Este resultado deriva do facto dos prisioneiros não poderem contactar entre si, e por isso, não poderem estabelecer compromissos. O curioso e paradoxal neste jogo é que se ambos seguirem uma lógica individual acabam mais prejudicados do que se seguirem uma lógica colectiva (de confiança no parceiro).

Outros jogos poderiam ser analisados, a nível do ensino secundário, como os jogos de estratégia pura ou jogos de estratégia mista (Feiteira, 2006). Estes jogos poderiam ser trabalhados recorrendo apenas aos conhecimentos que os alunos já dominam, nomeadamente a programação linear.

Esta é uma das poucas teorias de que dispomos que definem procedimentos racionais para situações que antes eram encaradas como irracionais. Durante a segunda grande guerra, áreas como a logística, a guerra submarina e a defesa aérea basearam-se directamente na teoria dos jogos que, depois disso, se desenvolveu no contexto das ciências sociais. Hoje, a maioria dos jogos com aplicações práticas são aqueles em que se podem formar várias coligações entre os jogadores, podendo existir comunicação entre eles e em que a conjugação de esforços pode melhorar a solução para todos. Por tudo isto, na nossa opinião, este é um tema que deveria ser abordado no nosso ensino secundário.

[13] Entendemos como estratégia qualquer regra para escolha de decisões. Um jogador procura sempre uma estratégia que aumente os seus ganhos e diminua as suas perdas.

Considerações finais

A teoria de grafos e a teoria de jogos fazem parte de uma Matemática com desenvolvimento recente. São portanto uma nova forma de fazer Matemática e, o que é mais importante, têm uma importância crescente na sociedade.

Qualquer um dos temas que referimos, ainda que muito superficialmente, tem a enorme vantagem de, de uma forma simples, mostrar aos nossos alunos a Matemática como uma ciência necessária e fundamental para o funcionamento da sociedade.

Cada currículo tem a marca temporal de uma sociedade, mas também deve reflectir as necessidades dessa sociedade. A sociedade actual, em constante mudança, obriga a que a Escola responda e acompanhe essas mudanças, reflectindo e antevendo as necessidades dos alunos na sua inserção na sociedade.

Neste sentido, o currículo da disciplina de Matemática deve sofrer um desenvolvimento que reflicta o desenvolvimento da Matemática, enquanto ciência, e das novas áreas proporcionadas por esse desenvolvimento.

Bibliografía

- Abrantes, P. (1994). *O trabalho de projecto e a relação dos alunos com a Matemática: Uma experiência do projecto MAT$_{789}$* (Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.
- Associação Professores de Matemática (1988), *Renovação do Currículo de Matemática*, Disponível em: www.apm.pt/rinovacao/inovacao.pdf
- Batista, D., Barros, J. (1994), Programa de Matemática do 3.º Ciclo – uma reflexão crítica, *Educação e Matemática,* 30, p.9-10, Lisboa: APM
- Buescu, J., (2003), Ensino da Matemática: um sintoma, várias causas, *Gazeta da Matemática*, n.º 145. Lisboa: SPM
- Cabrita, J. (1992), Os Novos Programas de Matemática para o 3.º Ciclo do Ensino Básico *In Actas do ProfMat 1992*, Viseu: APM
- Crato, N. (coord.), *Desastre no Ensino da Matemática: como recuperar o tempo perdido?*, p. 121-130, Lisboa: Gradiva
- Departamento do Ensino Básico, (2001), Reoganização Curricular do Ensino Básico – Princípios, Medidas e Implicações. Disponível em: http://www.dgidc.min-edu.pt/curriculo/Reorganizacao_Curricular/reorganizacao_curricular_EB.asp
- Feiteira, R. (2006), Programação Linear e Teoria dos Jogos: que lugar podem ocupar nos actuais programas de Matemática?, *Educação e Matemática*, n.º 88, pp.2-6, Lisboa: APM
- Feiteira, R., (2007), *Grafos para todos – sobre o desenvolvimento da Teoria de Grafos no 3.º Ciclo do Ensino Básico* (Dissertação de Mestrado, Universidade do Algarve), Colecção de Teses, Lisboa: APM
- *Matos, J. (2004),* Reformas curriculares e livros de texto de Matemática*.* Disponível em: http://phoenix.sce.fct.unl.pt/jmmatos/CLIVROS/CLINICIO.HTM

- Matos, J. (2006), A penetração da Matemática Moderna na revista Labor, *Union – Revista Iberoamericana de Educacion Matemática*, n.º 5, p. 91-110, Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática. Disponível em: http://www.fisem.org/paginas/union/revista.php?id=19#indice
- Marques de Sá, E. (2003), Alguns pontos críticos no Ensino da Matemática *In* Conselho Nacional de Educação (org), *O Ensino da Matemática – Situação e Perspectivas*, p. 69-87, Lisboa: Conselho Nacional de Educação
- Morais, J. (2006), As relações entre a aprendizagem da leitura e a aprendizagem da matemática *In* Crato, N. (coord.), *Desastre no Ensino da Matemática: como recuperar o tempo perdido?*, p. 155-178, Lisboa: Gradiva
- National Council of Teachers of Mathematics (2000), *Principles and Standards for School Mathematics for school Mathematics,* Virginia: NCTM
- Ponte, J., Matos, J., Abrantes, P., (1998), Investigação em educação matemática – *implicações curriculares*, Lisboa: Instituto de Inovação Educacional
- Ponte, J. (2003a), *Investigação sobre investigações matemáticas em Portugal.* Disponível em: www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/03-Ponte(Rev-SPCE).pdf
- Ponte, J. (2003b), O Ensino da Matemática em Portugal: uma prioridade educativa? *In* Conselho Nacional de Educação (org), *O Ensino da Matemática – Situação e Perspectivas*, p. 21-56, Lisboa: Conselho Nacional de Educação
- Porfírio, J. (1998), Os currículo de Matemática: como têm evoluído, *Educação e Matemática,* 50, p.32-38, Lisboa: APM
- Santos, L., Canavarro, A., Machado, S. (2006), *Orientações curriculares actuais para a Matemática em Portugal.* Disponível em: http://www.ualg.pt/ese/eiem2006/Grupos%20de%20Discussão.htm
- Serrazina, L., Oliveira, I. (2005), O currículo de Matemática do ensino básico sob o olhar da competência matemática *In* Grupo de Trabalho de Investigação (eds), *O professor e o desenvolvimento curricular*, p. 35-62, Lisboa: APM

Rui Feiteira, (Évora, Portugal, 1976), professor de Matemática do 3º Ciclo do Ensino Básico e Secundário. Mestre em Matemática pela Universidade do Algarve.
Email: ruifeiteira@gmail.com

Marília Pires, (Lisboa, Portugal, 1955), professora Associada do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve. Doutora em Matemática pela Universidade do Algarve.
Email: mpires@ualg.pt