



Seminario federal: Paseos matemáticos

JUANA M.^a NAVAS PLEGUEZUELOS

La Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas consideró oportuna la organización de un seminario sobre *Paseos matemáticos* que se celebró en Madrid y Córdoba, durante los días 18 y 19 de febrero, y 11, 12 y 13 de noviembre de 2017, respectivamente.

El trabajo de este seminario se organizó en dos fases: un encuentro en Madrid donde se establecieron las pautas para el trabajo a realizar a través de la plataforma Moodle de la FESPM y posteriormente, se celebraron unas jornadas presenciales para exponer los materiales elaborados, debatir las propuestas realizadas en la fase previa y elaborar las conclusiones del trabajo.

Además de analizar el carácter fundamental de la educación matemática como objetivo docente, los participantes en el seminario analizaron recorridos matemáticos por las ciudades, profundizando en el uso didáctico en el aula de los *paseos matemáticos* y reflexionaron sobre el papel de divulgación matemática que tienen los mismos. Otro objetivo de este seminario fue diseñar recursos didácticos basados en los *paseos matemáticos*.

En este documento, además de la visión que tienen los profesionales de la matemática y de la educación matemática, miembros de la FESPM,

sobre los distintos aspectos abordados en el seminario sobre *Paseos matemáticos*, se pretende transmitir el análisis realizado y las conclusiones a las que se han llegado, intentando dar orientaciones para la realización de paseos al profesorado interesado.

En este seminario se contó con tres conferencias, a cargo de M.^a Jesús Luelmo, titulado *Cómo preparar un paseo matemático*, de Julio Rodríguez, con su *Paseo matemático por Santiago de Compostela* y Álvaro Martínez que nos presentó el libro *Paseos Matemáticos por Granada*, también Carmen Monzó presentó una recopilación de *Paseos Matemáticos*, y, por último, se realizó la exposición, por parte de los participantes, de los paseos elaborados.

Como no podía ser de otra manera, se realizaron dos paseos matemáticos por las ciudades donde se celebró el seminario, a cargo de José Luis Muñoz (figura 1) en Madrid y Álvaro Martínez en Córdoba (figura 2).

¿Qué es un paseo matemático?

Se podría definir como una actividad con la que mostrar/descubrir elementos y propiedades ma-

temáticas en lugares donde quizás no se esperarían, con el objetivo de ayudar a comprender la belleza que se puede generar con un adecuado uso de formas y propiedades geométricas, y de entrenar nuestra mirada para captar las relaciones matemáticas que, a veces, se esconden en los objetos más inesperados.



Figura 1. José Luis Muñoz Casado en Madrid

Los paseos matemáticos son, por tanto, un gran recurso para la divulgación y visualización de las matemáticas ya que nos permiten verlas en contextos diversos, con aplicaciones a los distintos ámbitos de la actividad humana y reflexionar sobre su importancia en el desarrollo de las sociedades humanas a lo largo de la historia.

También son útiles para hacer matemáticas. Son una oportunidad para trabajar los contenidos del currículum en un contexto real, mostrando así su utilidad, enriqueciendo de este modo nuestras clases de matemáticas. Además, los paseos matemáticos permiten establecer relaciones entre los distintos contenidos del currículum, no solo de matemáticas, sino también de otras materias. Favorecen las relaciones interdisciplinares en el centro, así como el trabajo en grupo y el aprendizaje entre iguales. Por último, la experiencia ha demostrado que son muy motivadoras para el alumnado. De ahí la importancia de llevarlos a las aulas, de integrarlos como algo habitual y no como algo anecdótico y aislado. Con el ánimo de orientar a los docentes que quieran elaborar rutas matemáticas por sus ciudades, se han ana-

lizado los distintos paseos ya existentes en diversas ciudades y pueblos de España e identificado los siguientes elementos que podrían caracterizar un buen paseo matemático, así como una colección de actividades que pueden realizarse en un paseo matemático por cualquier pueblo o ciudad.

Tipos o modalidades de paseos

Dependiendo del tipo de pruebas, de cómo se llevan a cabo, del público al que van dirigidos y del entorno en el que se realizan, se pueden clasificar los paseos en las siguientes categorías, no necesariamente disjuntas:

1. Los paseos de carácter divulgativo.
2. Los paseos de carácter escolar.
3. Las yincanas o concursos.
4. Paseos en entornos urbanos.
5. Paseos en entornos naturales.
6. Paseos diseñados por docentes.
7. Paseos diseñados por alumnos.

Se entiende por paseos de carácter divulgativo aquellos que van dirigidos al público en general. Sus actividades están más enfocadas a mostrar y descubrir. En este tipo de paseos debe tenerse en cuenta que la formación matemática de los participantes es muy heterogénea y son muy adecuados para integrarlos dentro de las rutas turísticas de las ciudades donde se realizan.

Los paseos de carácter escolar van dirigidos a grupos de alumnos y alumnas de un nivel concreto. En este caso se cuenta con una formación matemática de los participantes más homogénea y deberían primar las actividades en las que el alumnado ponga en práctica los contenidos que se trabajan en las aulas.

Las yincanas son paseos escolares en las que el alumnado, agrupado en equipos, va pasando por las distintas estaciones del recorrido resolviendo por sí mismos los problemas planteados y sin ayuda del profesorado, cuyo cometido en este caso es el de resolver las dudas que puedan surgir y controlar que la prueba se desarrolla adecuadamente.

En el estudio de los paseos existentes, se ha encontrado que la inmensa mayoría se desarrollan en entornos urbanos, tanto grandes ciudades como pequeños pueblos. Sin embargo, la naturaleza ofrece infinidad de oportunidades para practicar matemáticas fuera del aula. Los jardines botánicos, las rutas de senderismo y los grandes parques de las ciudades son estupendos lugares en los que desarrollar un paseo.

En cuanto a quién diseña los paseos, además del profesorado, podemos proponer que sean los propios alumnos y alumnas quienes diseñen las actividades, y también que sean los responsables de llevarlo a cabo. Por ejemplo, alumnado de un curso superior que hacen el paseo a sus compañeros de un curso inferior. El grado de implicación del profesorado en el desarrollo de este tipo de rutas es variable pero, como mínimo, su labor será la de tutelar que todo se lleve a cabo adecuadamente.



Figura 2. El grupo en la Alhambra

Aspectos a tener en cuenta en cualquier tipo de paseo matemático

La duración del paseo

Se recomiendan paseos de una duración de alrededor de 2 horas, compuestos de 4 o 5 paradas o puntos de interés. En cada parada se pueden plantear 2 actividades de contenido matemático. Estas actividades deberían combinar las de explicación o presentación con las más prácticas

de resolución. El porcentaje de actividades de cada tipo dependerá de la modalidad de paseo que se quiera hacer. A la hora de estimar el tiempo que llevará cada paseo habrá que tener en cuenta el tiempo que se estará en cada parada y el tiempo que llevarán los desplazarnos de una parada a otra. Es recomendable incluir en el diseño de la ruta una estimación del tiempo que se va a dedicar a cada actividad.

Desarrollo del paseo

En los paseos de carácter escolar es muy recomendable dedicar alguna sesión previa a la salida para preparar en el aula lo que se va a hacer posteriormente en la calle:

1. Qué se va a ver y con qué objetivos.
2. Repasar/trabajar contenidos necesarios.
3. Familiarizarse con la guía de observación.
4. Definir el producto final que pretendemos obtener.
5. Cómo se va a evaluar.
6. Organización de grupos (si los hubiera) y normas que van a regir durante el paseo
7. Materiales necesarios. Debe prepararse una maleta con los materiales e instrumentos necesarios para realizar las actividades.

Durante el paseo, en cada parada, el trabajo se puede dividir en tres pasos:

1. Introducir el punto de interés.
2. Comentar/preguntar/motivar la actividad.
3. Realizar la actividad.



Figura 3. Medidas en la calle

También es recomendable dedicar alguna sesión posterior a la salida al análisis de los resultados obtenidos y/o a que el alumnado elabore un informe final de lo hecho. Por tanto, son adecuadas las actividades que permitan continuar el trabajo en clase. Durante el paseo se tomarían las medidas y datos necesarios y se harían algunos cálculos. Posteriormente en el aula se completa, amplía y/o analiza la solución obtenida. GeoGebra es una buena herramienta para estos casos. No todas las actividades planteadas tienen por qué ser de este tipo.

Otros aspectos

- a) Es aconsejable, en la medida de lo posible y especialmente en los paseos de carácter divulgativo, integrar el paseo dentro de lo que sería una visita típicamente turística de la ciudad.
- b) Debe elaborarse una guía para el profesorado con las instrucciones, los enunciados y las soluciones de las actividades. También un documento para los participantes con instrucciones y enunciados. A partir de una única guía para el profesorado, que podría contener muchas actividades, se pueden elaborar varios documentos para los participantes. Cada uno contendría solo algunas de las actividades, adaptadas al nivel de los que hacen el paseo y teniendo en cuenta las limitaciones de tiempo.
- c) La historia y los personajes destacados de la ciudad o pueblo en el que se hace la ruta son excelentes puntos de partida para muchas actividades. También, dentro de nuestros propios centros educativos podemos encontrar elementos que pueden ser usados en un paseo matemático.
- d) Google Maps, Google Earth, Eduloc, programas de edición de vídeo y sonido, apps de teodolitos y niveles, códigos QR, Math City Map.
- e) Es aconsejable tratar de conseguir el apoyo de instituciones y empresas, como puede ser el ayuntamiento o comercios de la ciudad.

- f) Es importante la difusión del trabajo realizado. En este sentido, hacer la ruta con otros profesores y profesoras como participantes, es una buena medida. También grabar un video del paseo o hacer fotografías o trípticos que puedan ser expuestos en el centro y en su página web, en las de las sociedades y en la propia de la FESPM. La aplicación Math City Map permite compartir el paseo diseñado de una forma fácil.

Evaluación

Este tipo de actividades deben estar integradas dentro de la evaluación del alumnado y ellos deben conocer cómo la realización del paseo y su aprovechamiento va a afectar a su evaluación.

También se debe evaluar el propio paseo: el interés suscitado en el alumnado, la adecuación de los materiales, la duración total y el tiempo dedicado a cada actividad, la adecuación del nivel de las actividades con el público al que van dirigidas y la consecución de los objetivos que se pretendían lograr con el paseo.

Ejemplos de actividades

Las actividades relacionadas con la geometría son las que primero vienen a la cabeza en el momento de diseñar un paseo matemático, y son las que tienen más presencia en todas las rutas analizadas. Por tanto, se debe hacer un esfuerzo adicional para tratar de incluir el resto de bloques de contenido en nuestros paseos. A continuación se describen una serie de elementos que se pueden encontrar casi en cualquier lugar y que se pueden usar en el diseño de actividades.

Elementos utilizados

Mobiliario urbano: bancos, maceteros, farolas, fuentes, papeleras, contenedores, kioscos de música, parques infantiles, plazas, estatuas y esculturas,

pavimento, relojes (analógicos y de sol), rosas de los vientos, escudos y banderas, verjas, tapas de alcantarillado y de conducciones de energía y telecomunicaciones, vallas, rejas, señales, anuncios.

Edificios y construcciones: puertas, ventanas, columnas, vidrieras, habitaciones y estancias, escaleras, chimeneas, tejados, faros, puentes, arcos, galerías, forjados.

Historia de la ciudad: años, fechas, datos demográficos y socioeconómicos, personajes célebres (especialmente de las matemáticas y otras ciencias).

Otros: jardines, plantas, árboles, flores, planos y mapas, brújulas, materiales manipulativos.

Acciones a realizar en las actividades

- Medir y estimar alturas, superficies, volúmenes, tiempos, número de personas, animales, árboles o coches.
- Localizar e identificar polígonos, poliedros, curvas, superficies, simetrías.
- Analizar propiedades geométricas y numéricas, patrones y regularidades.
- Construir y dibujar formas geométricas, mosaicos y frisos.
- Utilizar el lenguaje algebraico para codificar y transmitir información de carácter numérico.
- Utilizar fechas para trabajar relaciones y propiedades de los números.

En un parque infantil se pueden hacer gran cantidad de actividades de medida y estimación. Las fuentes y estanques son adecuadas para el cálculo de volúmenes, las plazas para estimar el número de personas que caben dentro, las aceras para el estudio de mosaicos, las verjas y los forjados para el estudio de curvas, simetrías y movimientos.

Dictar y dibujar la fachada de un edificio (una persona, mirando al edificio intenta dirigir, dando instrucciones para que el dibujante pueda plasmar en el papel la fachada, teniendo en cuenta que este último no puede mirar).

Localizar mediante coordenadas puntos en el plano o identificar qué hay en unas ciertas coor-

denadas. Fotografíar curvas para su posterior análisis con GeoGebra.

Usar unidades de medida tradicionales o alternativas para hacer mediciones. Por ejemplo, medir la superficie de un parque infantil a partir del número de losetas que cubren su suelo.

Buscar los elementos mínimos que generan mosaicos y frisos y los movimientos que permiten generarlos.

Para finalizar, se exponen unos ejemplos concretos de actividades donde se tratan contenidos que pueden resultar más complicados de incluir dentro de una paseo.

Caesaraugusta o Caesar Augusta

Fue el nombre de la ciudad romana de Zaragoza fundada como colonia de Roma sobre la ciudad ibérica de Salduie en la época del Emperador César Augusto del que ostenta su nombre. Averigua el año probable de la fundación de la ciudad sabiendo que:

- Todas las cifras del año son diferentes
- El año tiene una cifra en común con 8745, pero no ocupa el mismo lugar.
- La primera cifra del año es un número que no es primo y tampoco compuesto.
- Dicho año tiene X cifras, siendo

$$X = \frac{100a^3 - b^3}{c^3 - b^2 + a}$$

donde:

a = Número de torreones de la muralla romana que quedan en pie (figura 4).

b = Número de caras laterales del pedestal de la estatua de Caesar Augusto (figura 5).

c = Número de arcos de ladrillo de la fachada principal del Mercado Central de Zaragoza (figura 6).

e) El año es divisible por 7.

f) Es un número entero no natural.

¡Curiosa la tipografía utilizada en este rótulo!

Vamos a jugar un poco con las letras que aparecen (figura 7). Observad que algunas de estas letras tienen uno o más ejes de simetría. Fijaos también que algunas de estas letras se utilizan en

el sistema de numeración romano. Las preguntas que os planteamos en esta prueba tienen que ver, precisamente, con simetrías y romanos.

- Señalad las letras que tienen algún eje de simetría y trazad sobre las mismas dichos ejes.
- ¿Cuáles de las letras del rótulo pertenecen al sistema de numeración romano?
- Suponed que podemos liberar las letras del rótulo y hacer con ellas otras composiciones, ¿cuántos números romanos distintos se podrían escribir utilizando alguna de estas letras?



Figura 6. Mercado Central de Zaragoza



Figura 4. La muralla de Zaragoza

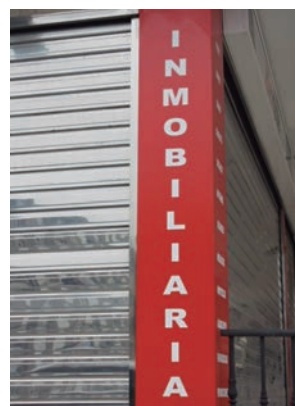


Figura 7. El rótulo

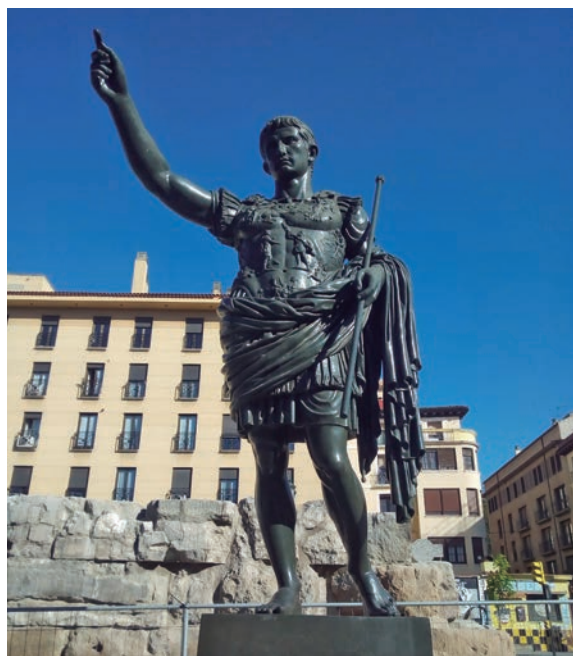


Figura 5. La estatua de Caesar Augusto

En cualquier mercado

Andrés es uno de los fruteros que vende en el mercado. El pasado domingo vendió la mitad de los melones que llevaba más medio melón. Después compartió con unos amigos el melón que le quedaba sin vender.

¿Cuántos melones llevó al mercado?

Un conjunto escultórico

En este conjunto escultórico (figura 8) podéis observar varios aros formando una espiral, en la que, además, los diámetros de los aros se van haciendo cada vez mayores.

- Tomad las medidas oportunas para comprobar si los diámetros de los aros van siguiendo alguna secuencia lógica.
- En caso de que hayáis descubierto esa secuencia, ¿qué diámetro tendría el siguiente aro, siguiendo el orden creciente?



Figura 8. Un conjunto escultórico

- c) Si ahora siguiéramos la secuencia en sentido contrario, ¿cuál sería el diámetro del aro que iría antes del primero de los contruidos?

En el parque

En un banco del parque pueden sentarse 4 personas. Si os sentáis en él los cuatro componentes del equipo,

- a) ¿De cuántas formas distintas podéis sentaros? ¿Y si fuerais 5?

En una de las terrazas próximas al parque tienen mesas redondas alrededor de las cuales sitúan 4 sillas.

- b) ¿De cuántas formas distintas podríais sentaros los 4 miembros del equipo alrededor de una de esas mesas?

En la página web de la Federación Española, de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) se puede encontrar más información sobre *Paseos Matemáticos*, así como más ejemplos <<http://www.fespm.es/>>.

JUANA M.^a NAVAS PLEGUEZUELOS
Inspección de la Delegación de Educación en Jaén
<juaninavas@gmail.com>

Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

Comisión Ejecutiva

Presidente: Onofre Monzó del Olmo
Secretario General: Agustín Carrillo de Albornoz Torres
Vicepresidente: Juan A. Martínez Calvete
Tesorera: Encarnación Amaro Parrado

Secretarías

Técnica adjunta: Bienvenido Espinar Cepas
Revista *Suma*: Iolanda Guevara Casanova y Daniel Sierra Ruiz
Relaciones internacionales: M.^a Claudia Lázaro del Pozo
Servicio de publicaciones: Juan Martínez-Tébar Giménez
Actividades y formación del profesorado: Juana M.^a Navas Pleguezuelos
Actividades con alumnos: Luisa Almazán Álvarez

Sociedades Federadas

Federació d'Entitats per l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya (FEEMCAT)

Presidente: Manuel Sol Puig
C/St Ramon 29. 08340 Vilassar de Mar

Sociedad Aragonesa «Pedro Sánchez Ciruelo» de Profesores de Matemáticas

Presidente: Daniel Sierra Ruiz
Instituto Universitario de Matemáticas y Aplicaciones
Edificio de Matemáticas, 1.^a planta. Universidad de Zaragoza
C/Pedro Cerbuna s/n. 50009 Zaragoza

Sociedad Canaria «Isaac Newton» de Profesores de Matemáticas

Presidente: Juan Agustín Noda Gómez
C/ La Isa, 33, Cercado Mesa, 38205, La Laguna, S/C de Tenerife

Sociedad Castellano-Manchega de Profesores de Matemáticas

Presidente: Serapio García Cuesta
IES Universidad Laboral, Avda de la Mancha sn, 02006 Albacete

Sociedad Navarra de Profesores de Matemáticas «Tornamira»-Matematika Irakasleen Nafar Elkarte

Presidente: J. Javier Jiménez Ibáñez
IES *Albama*, Avda. Villar, 44. 31591 Corella (Navarra)

Sociedade de Ensinantes de Ciencias de Galicia (ENCIGA)

Presidente: María Inés García Seijo
Apdo. de Correos 103. Santiago de Compostela

Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas «Emma Castelnuovo»

Presidente: Juan A. Martínez Calvete
IES Villablanca. C/ Villablanca, 79. 28032 Madrid

Sociedad Melillense de Educación Matemática

Presidente: Jesús Diego Rodríguez García
IES Enrique Nieto. Departamento de Matemáticas
C/ Avenida de la Juventud, 4. 52005 Melilla

Sociedad Riojana de Profesores de Matemáticas «A prima»

Presidenta: Elena Ramírez Ezquerro
Facultad de Ciencia y Tecnología Edificio Científico Tecnológico, CCT; C/ Madre de Dios, 53. 26006 Logroño

Societat Balear de Matemàtiques SBM-XEIX

Presidente: Daniel Ruiz Aguilera
C/ Miquel Capllonch, 30, 3A. 07010 Palma. Illes Balears

Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales»

Presidente: Salvador Guerrero Hidalgo
Facultad Matemáticas. Apdo. de Correos 1160. 41080 Sevilla

Sociedad Asturiana de Educación Matemática «Agustín de Pedrayes»

Presidente: Rubén Pérez Zamanillo
Apdo. de Correos 830. 33400 Avilés (Asturias)

Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática «Miguel de Guzmán»

Presidenta: M.^a Encarnación Reyes Iglesias
IES Comuneros de Castilla. C/Batalla Villalar, s/n. 09006 Burgos

Sociedad de Educación Matemática de la Región de Murcia

Presidente: Bienvenido Espinar Cepas
Facultad de Matemáticas. Universidad de Murcia.
Campus de Espinardo. 30100 Murcia

Sociedad Extremeña de Educación Matemática «Ventura Reyes Prósper»

Presidente: Antonio Molano Romero
Apdo. de Correos 590. 06080 Badajoz

Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria

Presidenta: Carmen Espeso Ortiz
Avda. del Deporte s/n. 39012 Santander

Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas

Presidente: José Javier Etayo Gordejuela
Facultad de Educación. Despacho 3215
C/ Rector Royo Villanova, s/n. 28040 Madrid

Asociación Galega do Profesorado de Educación Matemática (AGAPEMA)

Presidente: Julio Rodríguez Taboada
CPI Dos Dices
C/ Dos Dices, s/n. 15911 Rois (A Coruña)

Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana «Al-Khwarizmi»

Presidente: Onofre Monzó del Olmo
Departamento de Didáctica de la Matemática.
Apdo. 22045. 46071 València

Euskadiko Matematika Irakasleen Elkarte «EMIE 20+11»

Presidenta: Ana Fernández de Betoño Sáenz de Olamendi
Berritzegune de Vitoria-Gasteiz
Avda. Gasteiz, 93. 01009 Vitoria-Gasteiz (Araba)