Conocimientos de los profesores preuniversitarios de Cálculo acerca del significado y las interpretaciones de la derivada

Miguel Díaz Chávez
Instituto Superior de Ciencias de la Educación del Estado de México
Universidad Pedagógica Nacional Unidad 151
México

Resumen. En este reporte documentamos los conocimientos que sobre el significado y las interpretaciones de la derivada tiene el profesor de cálculo del bachillerato. La documentación proviene del análisis de las respuestas dadas por nueve profesores que imparten esta clase en preparatorias del Estado de México, a preguntas planteadas en un cuestionario diseñado con tres tipos de tareas: la primera de *calificación con valores de verdad* de algunos enunciados que relacionan características de la función y la derivada, la segunda de *descripción* de algunos conceptos relacionados con la derivada, y la tercera la *resolución de problemas* no rutinarios. El análisis lo hacemos en dos niveles, uno micro (individual) y uno macro (comunidades de enseñanza). Los resultados nos descubren y en ocasiones confirman, la fortaleza, las relaciones y agrupaciones que hace el profesor de sus conocimientos.

Palabras clave: creencia, conocimiento, derivada.

1. Introducción

Al revisar algunos programas de estudio de cálculo diferencial e integral del nivel medio superior se observa una tendencia: desarrollar en el alumno la habilidad y destreza en el uso mecanizado de las técnicas del cálculo. Así mismo, reportes de investigación que tienen como objeto de estudio la enseñanza del cálculo muestran la inclinación que se manifiesta en las aulas en el mismo sentido que los programas; *i.e.* los objetivos del profesor se dirigen hacia la memorización de algoritmos y su utilización mecánica; esta tendencia contribuye muy poco a la comprensión de los conceptos del cálculo ya que margina la disertación de las ideas, el significado y la interpretación de los conceptos. Ciertamente deben atenderse las técnicas pero no limitarse a ello. Esto no significa conducir la enseñanza al otro extremo, teórica, donde el enunciado de teoremas y sus demostraciones sean los elementos dominantes.

Por ejemplo, en el caso de la derivada, que en términos estrictamente matemáticos es un límite, vista así en un primer acercamiento, hace el curso, además de aburrido, árido y difícil; sobre todo para los jóvenes que se inician en su estudio. Cuando en su lugar se puede hablar alrededor de situaciones donde la razón de cambio además de que tiene varios significados muestra su aplicabilidad.

Por otro lado, las tendencias educativas que se observan en las evaluaciones internacionales reflejan prioridades como el pensamiento y razonamiento del estudiante. Esta situación debiera tenerse muy presente en la enseñanza del cálculo; lo que significa que el curso, sin llegar a una presentación conceptual con todo el rigor que implica su tratamiento matemático debiera ayudar al estudiante, con un lenguaje apropiado y atendiendo a su madurez, a construir las ideas que fundamentan o subyacen en sus conceptos. Por ejemplo, enseñar la derivada colocando especial énfasis en la comprensión del concepto, el cual lo conducirá a otros como el de velocidad instantánea, sin la formalidad del concepto de límite, el cual requiere la utilización de ε y δ. Pero, el profesor en general ¿puede hacer estas reflexiones? ¿Tiene los elementos para una enseñanza de esta naturaleza? ¿Distingue entre los distintos enfoques del curso? ¿Entiende el marco conceptual? ¿Qué manejo hace de las ideas? ¿Cómo utiliza el lenguaje para enunciar los conceptos relacionados con la derivada? ¿Qué estatus le otorga a la definición y cuál a las interpretaciones? ¿Cuál es el orden de las ideas que considera adecuado en la presentación del concepto? ¿Cómo distingue la definición de sus interpretaciones? ¿Tiene claro el carácter puntual de la derivada? ¿Cuánto sabe de las ideas? Se pueden manejar las ideas, pero de ahí a entenderlas, manejarlas, interpretarlas y enseñarlas, existe una gran diferencia ¿La sensibilidad del profesor le permite percibir cuestiones como las anteriores? y, particularmente ¿Cuáles son las creencias y conocimientos que exhibe el profesor de cálculo de bachillerato sobre el significado e interpretaciones de la derivada? Aquí hablaremos de creencias y conocimientos como dos términos obligadamente ligados, ya que para hablar de conocimiento, desde nuestro punto de vista, se necesita hablar de la creencia. Las respuestas a esta pregunta, bajo una interpretación correcta del investigador además de aportar elementos para comprender las actitudes, respuestas y valores que adopta y cultiva el profesor en el aula, paralelamente proporcionan elementos valiosos para el diseño de proyectos de intervención adecuados en la formación de profesores para la enseñanza. Ahí radica nuestro interés por investigar esos conocimientos. Al respecto Pajares (1992) señala: Cuando los constructos específicos de creencias sean adecuadamente investigados y valorados puede ser los más importantes en la investigación educativa,

La investigación sobre estos constructos si bien es cierto ha interesado a la comunidad de investigadores, multiplicándose y diversificándose, realmente es poca la literatura al respecto. Algunas revisiones críticas que se han hecho sobre esta línea de investigación así lo muestran la cantidad y diversidad de enfoques (Abelson, 1979; Houston, 1990; Thompson, 1984, 1992; C. Leder. *Et.al.,* 2002; Lester, 2007). En relación al conocimiento de los profesores, algunas han avanzado en su tipología (Calderhead, 1996; Shulman, 1990, Putnam y Borko, 2000); sin embargo permanece abierta la cuestión de cómo se desarrollan y cómo operan. Putnam y Borko (2000) reconocen también la importancia que dentro de la psicología cognitiva han adquirido estos estudios. Moreno y Azcarate (2003) señalan que no obstante que se han desarrollado distintos paradigmas de investigación con cierto éxito, aun no han sido lo suficientemente robustos para proporcionar una comprensión adecuada del hecho educativo en los programas de desarrollo profesional de los profesores. En este sentido, una de las metas a largo plazo de la comunidad científica es crear bases teóricas suficientemente sólidas que permitan avanzar en el campo de investigación del profesor y en particular, de su desarrollo profesional. En este estado de cosas en el reporte reflexionamos desde la matemática y la filosofía acerca de esas creencias y conocimientos que sobre el significado e interpretaciones de la derivada tiene el profesor, describiéndolos primero, interpretándolos después para finalmente diferenciarlos.

2. Marco teórico

Dada la naturaleza del concepto matemático, la derivada, y la naturaleza cognitiva de los constructos que intervienen en esta investigación, nuestro marco teórico se conforma de dos elementos, uno que pertenece a la matemática y otro de la filosofía. Respecto al primero, consideramos que el significado de la derivada subyace a la existencia del siguiente límite:

$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ y sus interpretaciones las acotamos a la razón de cambio instantáneo y la pendiente de la recta tangente a la curva. En cuanto al segundo distinguimos entre creencia y conocimiento, considerando que todo conocimiento implica creencia pero no a la inversa, que ambos son términos relativos y no absolutos, que el conocimiento se encuentra en la esfera cognoscitiva del sujeto mientras la creencia en su esfera volitiva y sensible, que no se puede hablar de una creencia en particular sino de sistemas de creencias. Así, la estructura del sistema tiene un sustento o estructura lógica, una cierta organización donde existen creencias primarias y derivadas o periféricas, en el cual las primeras forman una *base* o *núcleo* y de ellas se derivan otras, integrando conjuntos, donde cada conjunto forma una especie de cluster donde tienen lugar relaciones entre ellas y el conjunto de clusters forma el sistema del individuo (Green, 1971; Leatham, 2006). Si partimos de la posibilidad de que la creencia puede ser verdadera o falsa, y al carácter verdadero de la creencia le agregamos las justificaciones o evidencias de esa verdad que presenta el sujeto entonces decimos que la creencia adquiere el estatus de conocimiento; este hecho imposibilita la existencia de conocimientos falsos, el conocimiento implica verdad, simplemente es conocimiento; entonces no es apropiado hablar de un *conocimiento falso*, en sentido estricto, cuando se afirma conocer algo que en realidad puede comprobarse que es falso: se trata meramente de una creencia u opinión.

Lo anterior puede esquematizarse de la siguiente manera: *Si A conoce Q*, esto supone afirmar, entre otras cosas, que *Q* es verdadero, en el caso que *Q* sea falsa, entonces no podemos hablar de un conocimiento de *Q* sino de una falsa creencia sobre *Q*. La afirmación *"A conoce Q, y Q es falsa"* es contradictoria en sí misma, mientras la afirmación *"A cree Q, y Q es falsa"* no lo es en sí misma. El sujeto no puede conocer falsedades pero si creer en ellas. Así, si el conocimiento es una forma de creencia, no basta con ser verdadera, se llega a la condición de verdad sobre las bases de algunas evidencias o pruebas. Algunos hablan en su lugar de justificaciones, donde el término "justificado" es un término evaluativo, un término de valor. Musgrave (1993) esquematiza de la siguiente manera las condiciones para el conocimiento: Para que una afirmación de la forma *"A conoce P"* sea correcta, debe verificarse que:

A cree *P*
P es verdadera
A puede justificar su creencia *P*

Así, mientras el conocimiento tiene criterios que involucran patrones de evidencia, las creencias se justifican mediante razones las cuales muchas veces no tienen nada que ver con los criterios de evidencia y se caracterizan por la ausencia de acuerdos sobre como evaluarlos o juzgarlos.

3. Metodología

Considerando que los sistemas de creencias y de conocimientos se manifiesten principalmente a nivel declarativo el estudio del cual da cuenta este reporte es un estudio de caso de carácter cualitativo que hace uso del método de encuesta. Para tal efecto se diseñaron varios cuestionarios de los cuales se aplicó uno en el que tomamos muy en cuenta la precisión de las preguntas en cuanto al significado y las interpretaciones de la derivada así como las condiciones de acceso indirecto a las creencias y conocimientos de los profesores que subyacen al instrumento; para su aplicación se trató de cuidar el tiempo dedicado a responder y crear un ambiente que evitara que los profesores se sintieran sujetos de evaluación en cuanto al conocimiento del tema. El cuestionario incluye tres tipos de tareas. (A) *Calificación con valores* *de verdad* de algunas afirmaciones. (B) *Descripción de* conceptos y (C) *Resolución de problemas.* Todos relacionados con el significado o alguna de las interpretaciones de la derivada.

En la primera parte se le pide juzgar la veracidad o falsedad de nueve enunciados relacionados con la función y la derivada, como por ejemplo: Si una función *f* es continua en $\left[a,b\right]$, entonces *f'* es continua en $\left[a,b\right]$. Si una función *f* es continua en $\left[a,b\right]$, entonces *f* es derivable en $\left[a,b\right]$. En la segunda parte se le pide describir cuatro conceptos que se relacionan con la derivada como son: pendiente, recta tangente, razón de cambio y derivada. Finalmente en la parte de resolución de problemas se pide inicialmente calcular la derivada de las siguientes funciones:

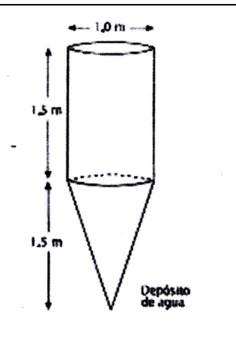
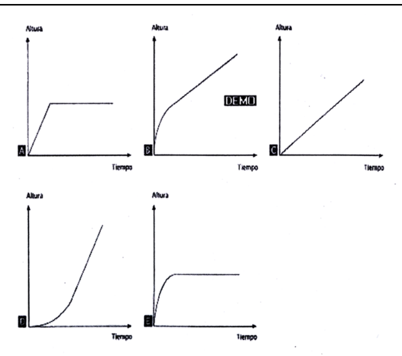
$f(x)=\begin{cases} x^3 \text{ si } x\geq 0 \\ -x^3 \text{ si } x<0 \end{cases}$	$f(x)=\begin{cases} (x+1)^2-1; & x\leq 0 \\ x; & 0<x\leq 2 \\ (x-2)^2+2; & x>2 \end{cases}$	$f(x)=\begin{cases} x^2 \text{ sen } \frac{1}{x}; & x\neq 0 \\ 0; & x=0 \end{cases}$	$f(x)=\begin{cases} x \text{ sen } \frac{1}{x}; & x\neq 0 \\ 0; & x=0 \end{cases}$

y luego resolver estos problemas:

1. Calcule el valor máximo y el valor mínimo que alcanza la función $f(x)=2x^3-\frac{3}{2}x^2-\frac{9}{2}x-1$ en el intervalo *[-4,4]*.

2. Considere la función $f(x)=\text{sen}\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)$. Hallar la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto de abscisa $x=\frac{\pi}{12}$.

3. El dibujo en el lado izquierdo muestra un depósito que se está llenando de agua y en el lado derecho algunas gráficas que relacionan altura y tiempo. De acuerdo con ello contesta las siguientes cuestiones y explica tu razonamiento:

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>1. Cuál de ellas muestra realmente cómo varía la altura que alcanza el agua en función del tiempo.
2. En qué momento el nivel de agua sube más rápido.
3. En qué momento la razón de la altura respecto al tiempo es constante</td>
</tr>
</table>

Esta última parte se diseño para detectar las teorías implícitas de los profesores, sus sistemas de creencias y de conocimientos (Vila y Callejo, 2004). Las respuestas de nueve profesores, cada uno identificado por su formación, las concentramos en mapas individuales de creencias y conocimientos, y cuadros como los siguientes.

Mapa de creencias y conocimientos del profesor N1

Es verdad que…

Es falso que …

Si una función f es derivable

y además $f'(a)=0$ y $f''(a)\neq 0$; entonces f tiene un máximo o un mínimo en $x=a$.

y además $f'(a)=0$ y $f''(a)=0$; entonces f no tiene ni máximo ni mínimo en $x=a$.

en $x=a$, tiene un máximo en $x=a$, entonces $f'(a)=0$, $f''(a)$ existe y $f''(a)<0$.

en $[a,b]$, entonces f es continua en $[a,b]$.

y tiene un máximo en $x=a$, entonces existe $f'(a)$ y es cero

Si una función f es continua

entonces f' es continua en $[a,b]$

en $[a,b]$ entonces f es derivable en $[a,b]$

Si una función f es creciente en $[a,b]$ entonces $f'(x)>0$ para toda x en $[a,b]$

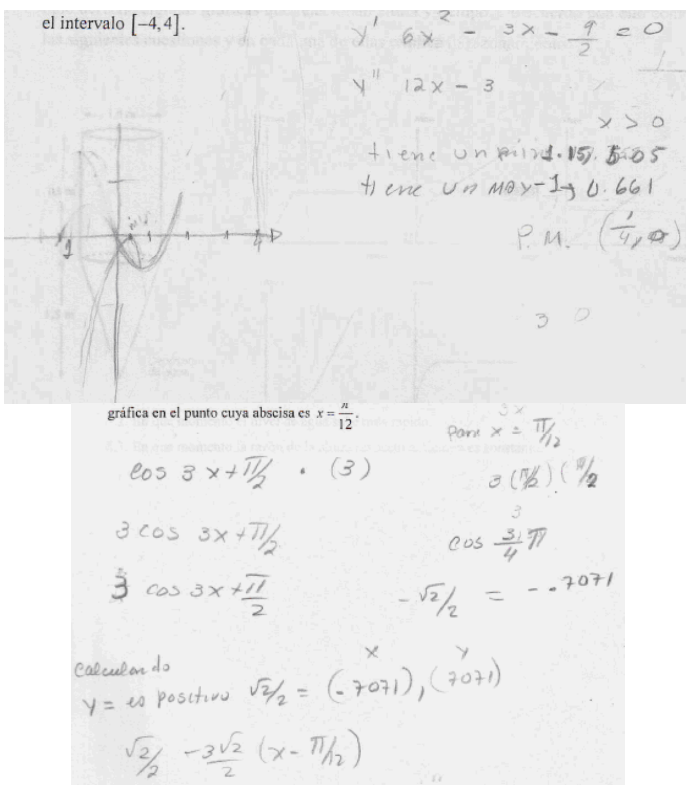
Si una función f es decreciente en $[a,b]$ entonces $f'(x)<0$ para toda x en $[a,b]$

Recta tangente es una línea que hace punto de contacto con una curva en la aplicación de la derivada para la obtención de la ecuación de la recta tangente y la normal esta forma una perpendicular con la ecuación normal

Derivada es un cociente incrementado $\frac{dy}{dx}$ es la razón de un cociente

Pendiente es el ángulo de inclinación de una recta. Es el grado de inclinación

Razón de cambio es el estudio del criterio de la primera y 2ª derivada Teorema de Rolle



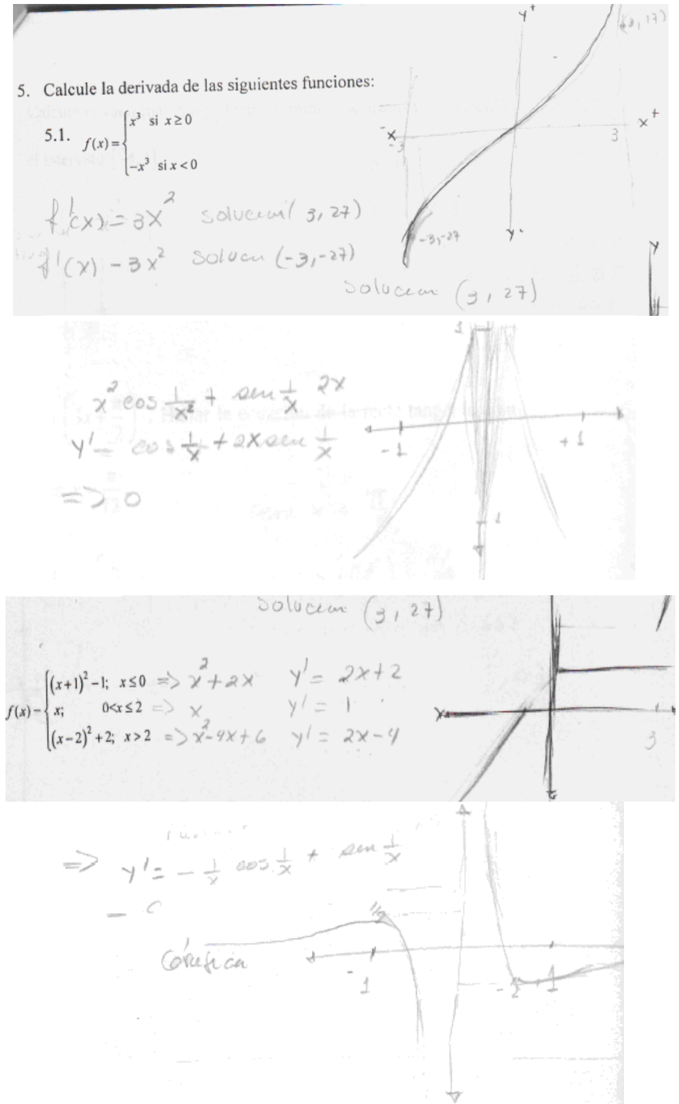


Figura 1. Mapa de creencias y conocimientos

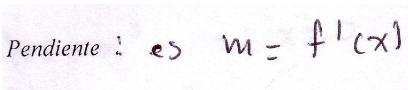
	Afirmación	Profesores								
		N1	N2	T1	T2	U1	U2	I1	I2	P
		Respuestas								
1	Si una función f es derivable y además $f'(a)=0$ y $f''(a)\neq 0$; entonces f tiene un máximo o un mínimo en $x=a$.	***v***	***v***	***f***	***f***	***f***	***v***	***f***	***v***	***v***
2	Si una función f es derivable y además $f'(a)=0$ y $f''(a)=0$; entonces f no tiene ni máximo ni mínimo en $x=a$.	***f***	***f***	***f***	***f***	***v***	***f***	***v***	***v***	***f***
3	Si una función f es continua y tiene un máximo en $x=a$, entonces existe $f'(a)$ y es cero.	***f***	***v***	***v***	***f***	***f***	***v***	***f***	***v***	***v***
4	Si una función es derivable en $x=a$, tiene un máximo en $x=a$, entonces $f'(a)=0$ y $f''(a)$ existe, y $f''(a)<0$.	***v***	***v***	***f***	***v***	***f***	***v***	***v***	***f***	***v***
5	Si una función f es continua en $[a,b]$, entonces f' es continua en $[a,b]$.	***v***	***f***	***v***	***v***	***v***	***v***	***v***	***v***	***v***
6	Si una función f es derivable en $[a,b]$, entonces f es continua en $[a,b]$.	***f***	***v***	***v***	***v***	***v***	***v***	***f***	***v***	***f***
7	Si una función f es continua en $[a,b]$, entonces f es derivable en $[a,b]$.	***f***	***v***	***v***	***f***	***v***	***v***	***v***	***v***	***f***
8	Si una función f es creciente en $[a,b]$ entonces $f'(x)>0$ para toda x en $[a,b]$.	***v***	***v***	***v***	***v***	***f***	***v***	***v***	***f***	***v***
9	Si una función f es decreciente en $[a,b]$ entonces $f'(x)<0$ para toda x en $[a,b]$.	***f***	***f***	***f***	***v***	***f***	***v***	***f***	***f***	***v***

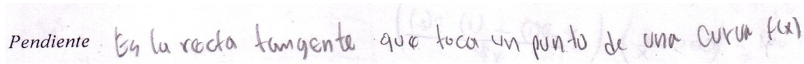
Tabla 1. Concentrado de la respuestas a la tarea de Calificación

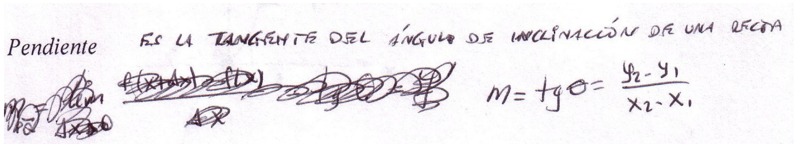
4. Resultados

En relación a la primera tarea la tabla que concentra las respuestas muestra por un lado la fortaleza que tienen algunas creencias falsas, por ejemplo, la creencia de que si una función es continua y tiene un mínimo en un punto de su dominio entonces existe su derivada en ese punto y es cero, lo cual evidentemente es falso. El profesor no recuerda la función $f(x)=|x|$. La creencia más fuerte, que de alguna manera guarda relación con la anterior es la herencia de la continuidad de la función sobre su derivada, falso también, únicamente el profesor normalista lo considera así, aquí otra vez no recuerdan $f(x)=|x|$. Estas respuestas explican de alguna manera la idea equivocada que manifiestan muchos estudiantes en las estrategias que usan para obtener máximos y mínimos de una función. El consenso sobre esta misma creencia es un ejemplo de que eso, el consenso, no garantiza la verdad de la misma y por tanto no alcanza el estatus de conocimiento. Otra de las creencias generalizadas en esta parte es que si una función f es creciente en $[a,b]$, entonces $f'(x)>0$ para toda x en el mismo intervalo, aquí difieren solamente uno de los profesores universitarios, y uno con formación politécnica, ambos novatos. Se puede ver que para la siguiente afirmación, la cual esta formulada en los mismos términos pero ahora para la función decreciente, las respuestas de algunos profesores se oponen a la emitida para la función creciente. Esto muestra las relaciones quasilógicas que puede establecer entre sus creencias, además de las agrupaciones o clusters que el sujeto puede construir con ellas.

En cuanto a la descripción de los conceptos la pendiente la expresan más como la tangente del ángulo de inclinación de la recta, otras dos como la derivada y una más con la fórmula $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, éstas dos más débiles, uno más como la recta tangente. Es notable aquí también la falta de consenso aún entre miembros de la misma comunidad de enseñanza.

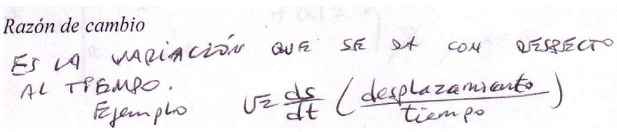

Pendiente : es $m = f'(x)$

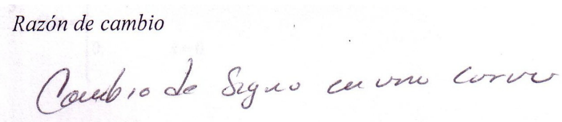

Pendiente Es la recta tangente que toca un punto de una curva f(x)

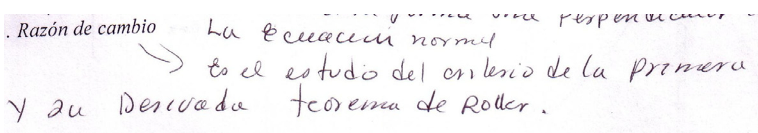

Pendiente ES LA TANGENTE DEL ÁNGULO DE INCLINACIÓN DE UNA RECTA

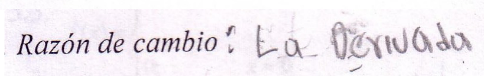
$m = tg\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

En relación a la razón de cambio, estas son algunas respuestas. Las letras mayúsculas entre paréntesis se refieren a los profesores de la tabla 1.


Razón de cambio
ES LA VARIACIÓN QUE SE DA CON RESPECTO AL TIEMPO.
Ejemplo $v = \frac{ds}{dt}$ (desplazamiento / tiempo)


Razón de cambio
Cambio de Signo en una curva


Razón de cambio La ecuación normal
es el estudio del criterio de la primera y 2a Derivada teorema de Roller.


Razón de cambio : La Derivada

La descripción es muy heterogénea; si bien es cierto la idea de cociente aparece en varias, no es la más fuerte, ya que también aparece la idea de derivada, aunque no de manera clara, asociada con el concepto de razón de cambio. Las otras como la que comparten (**U2**) e (**I1**) requieren de mayor indagación en los sujetos. En tanto la dada por (**P**), como velocidad es una idea más local de lo que ampliamente encierra este concepto. En el caso de la comunidad normalista no comparten ningún elemento y ninguna descripción presenta elementos que guarden relación alguna con el concepto que se trata de describir.

Sobre la descripción de recta tangente la idea que parece más fuerte esta asociada a la recta que toca un punto o hace contacto en un punto de la curva. De las más débiles esta la asociada a la circunferencia (**N2**), queda pendiente ver si las palabras “corte”, “toque” o “intersección” significan lo mismo. (**N1**) por su parte relaciona la recta tangente con una de las aplicaciones de la derivada para obtener la ecuación de la recta tangente y la normal.

4.4. *Recta tangente* es una linea que hace punto de contacto con una curva en la aplicación de la derivada para la obtención de la ecuación de la recta tangente y la normal esta forma una perpendicular con la ecuación normal

4.5. *Razón de cambio*

Recta tangente línea que intersecta a la circunferencia en un punto.

4.4. *Recta tangente* : es aquella que toca en un punto a una curva.

Respecto a la descripción de la derivada se pueden distinguir dos ideas más o menos precisas una asociada a su definición y otra a su interpretación; pero también existen ideas muy alejadas de eso. Respecto a la primera idea el concepto de límite esta explícito en sus descripciones, lo que no sucede en todos esos casos, por ejemplo cuando la describen como razón de cambio. Esto tiene mucho que ver con la dificultad que existe para distinguir entre su definición y sus interpretaciones.

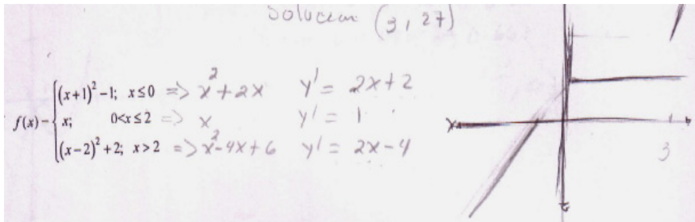
Derivada $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Derivada GEOMETRICAMENTE ES LA PENDIENTE DE UNA RECTA TANGENTE A UNA CURVA EN UN PUNTO DADO LLAMADO PUNTO DE TANGENCIA Y MATEMATICAMENTE SE EXPRESA COMO: $y' = D_x y = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ FISICAMENTE REPRESENTA A LA VELOCIDAD $y' = v(t) = \frac{ds}{dt}$

Derivada $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$. tangente del ángulo de inclinación de una función en un punto determinado.

Derivada. se define como una razon de cambio

En la tarea de resolución de problemas las comunidades comparten muchos elementos en sus trayectorias de solución, particularmente en el desarrollo de los algoritmos. Por ejemplo en el primero, donde se pide obtener la derivada de funciones definidas por pedazos se observa en las trayectorias de solución que no se atiende, en ninguno de los casos en los posibles puntos donde la función es o no derivable.



$$y=(x+1)^2\cancel{-1} \Rightarrow y' = 2(x+1)\,D(x) \Rightarrow y' = 2(x+1)(1)$$

$$y' = 2(x+1)$$

$$y=(x) \Rightarrow y'=1$$

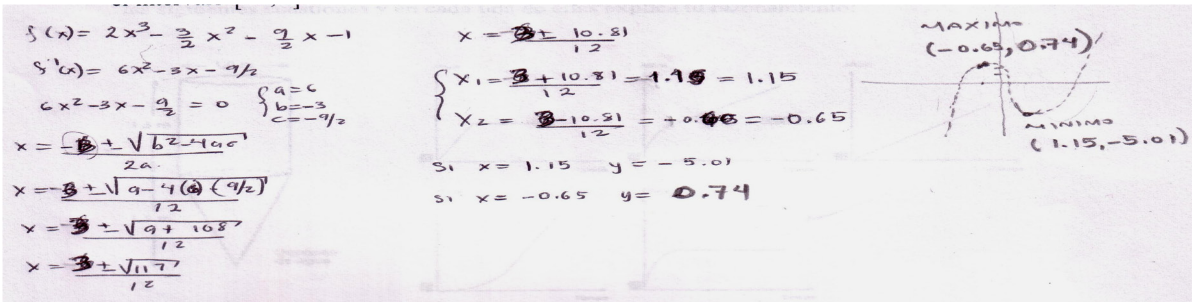
$$y=(x-2)^2\cancel{+2} \Rightarrow y' = 2(x-2)\,D(x) = y' = 2(x-2)(1)$$

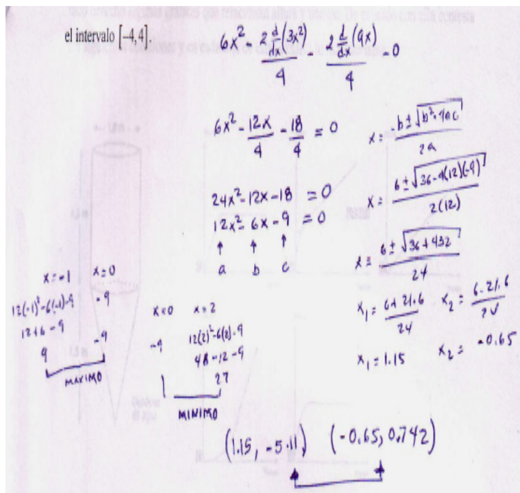
$$y' = 2(x-2)$$

$$f'(x)=\begin{cases} 2(x+1)=2x+2 \; ; & x \leq 0 \\ 1 \; ; & 0< x \leq 2 \\ 2(x-2)=2x-4 \; ; & x>2 \end{cases}$$

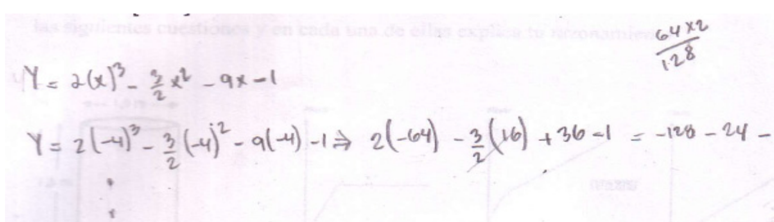
Así la tarea de obtener la derivada de estas funciones definidas por dos y tres pedazos se reduce a obtener otras fórmulas a partir de las fórmulas que definen la función, bajo la creencia, muy fuerte por cierto, que la derivación de una función consiste en aplicar las reglas, y si es de la manera más económica mejor. Esto deja de lado, casi siempre, la reflexión sobre la naturaleza de la función; sin embargo en algunos casos el recelo sobre la solución obtenida provoca el surgimiento de otros elementos que otorguen confianza, como el bosquejo de la gráfica de la función derivada, esto lo hace (**N1**) de manera recurrente y únicamente en la primera función (**P**). Así que obtener la derivada de estas funciones se reduce a obtener otras fórmulas a partir de las fórmulas que la definen. En este mismo item también se observa el uso de tres distintas notaciones para la derivada, la notación $f'(x)$ de Lagrange, la notación y' y D_x; este hecho se presenta posteriormente en la resolución de los dos siguientes problemas; sin embargo esto no basta para deducir las ventajas o limitaciones que los profesores le asignan; lo que si es notable es la consistencia con la que cada profesor utiliza una de las tres notaciones mencionadas.

En lo que respecta al problema que pide calcular el máximo y mínimo que alcanza la función $f(x)=2x^3-\frac{3}{2}x^2-\frac{9}{2}x-1$ en el intervalo $[-4,4]$, las trayectorias de solución no varían sustancialmente. Seis casos (**N1**, **T1**, **U1**, **I1**, **I2**, **P)** proceden a aplicar el algoritmo de rutina asumiendo implícitamente que la función dada es derivable en todos lados, lo cual es cierto, luego obtienen la primera derivada, la igualan a cero y obtienen los valores de *x* donde ésta se anula. Asumiendo que en estos valores se encuentran los posibles máximos o mínimos de la función evalúan la función en éstos y concluyen casi para todos los casos si es máximo o mínimo. Cinco de ellos (**N1**, **T1**, **U1**, **I1**, **P)** recurren al criterio de la segunda derivada y con esto también concluyen, en el caso (**N1**) de manera incompleta. En el caso de (**T2)** aparecen únicamente las coordenadas de los puntos sin la trayectoria de solución que siguió. (**N2**) por su parte obtiene la primera derivada, la evalúa en $x=0$ y obtiene el valor $-9/2$, luego obtiene la segunda derivada, la evalúa en $x=0$ y obtiene el valor $-6/2$, lo que se puede deducir en este caso es que tiene dos ideas encapsuladas para encontrar los máximos y los mínimos de la función, una, los criterios de la primera y segunda derivada y otra la igualación con cero; sin embargo éstas no las relaciona de manera adecuada en su trayectoria y abandona el problema.



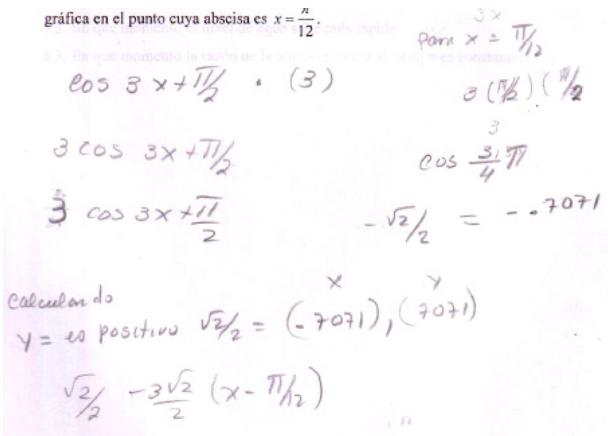


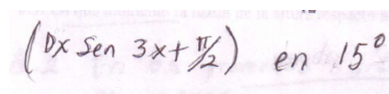
Ninguno percibe que no es suficiente. Un último caso es el (**U2**) quien además de utilizar los criterios de la primera y segunda derivada y obtener los valores máximo y mínimo locales comienza por evaluar la función en el extremo izquierdo del intervalo *x=-4*; sin embargo inexplicablemente lo deja indicada con puntos suspensivos, indicando probablemente que el proceso continua. No se puede saber si la evaluación se hizo al inicio de la trayectoria o después.



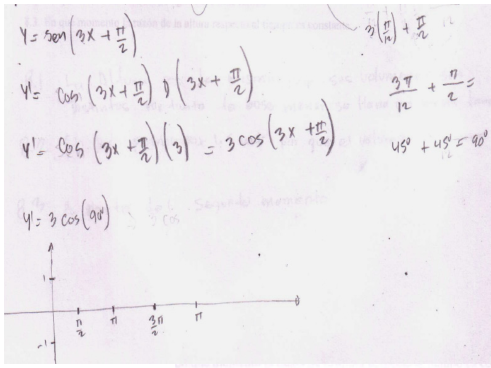
Las trayectorias de solución en este problema también permiten identificar el uso de tres distintas notaciones de la derivada, la funcional de Lagrange *f'(x)*, la notación *y'* y la de Leibniz $\frac{d}{dx}f(x)$. Las primeras dos se usaron para indicar la derivada de la función y el valor de la derivada en un valor de *x* específico, en tanto la última indica el proceso de derivación. La primera la utilizan en seis casos, la segunda **(U2)** e (**I1**), y la tercera únicamente (**I2**).

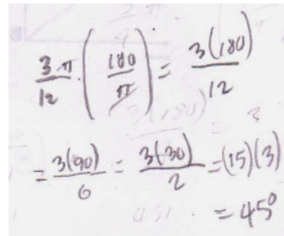
La misma situación se percibe en las trayectorias de solución del problema donde se pide hallar la ecuación de la recta tangente. Casi en todos los casos (**N1, N2, T1**, **T2**, **U1, I1**, **I2**, **P**) calculan la derivada de la función, la evalúan en el valor $x = \frac{\pi}{12}$, toman este valor como la pendiente de la recta tangente, (**N1, T1**, **T2**, **U1**, **I1**, **I2**, **P**) y calculan *f(x)* para $x = \frac{\pi}{12}$; sin embargo la ecuación de la recta es un elemento menos presente. Atención especial merecen las trayectorias de solución de los casos **(N1**, **N2**, **U2** e **I1)**. En el primero se deduce la estrategia seguida (aun a falta de los paréntesis), primero obtiene el valor de la derivada en $x = \frac{\pi}{12}$ (dos columnas en la parte superior), luego sustituye los valores en la ecuación de la recta (la cual no aparece debidamente expresada ya que faltan algunos signos). En el caso (**N2**) exhibe un plan poco claro y una sintaxis deficiente

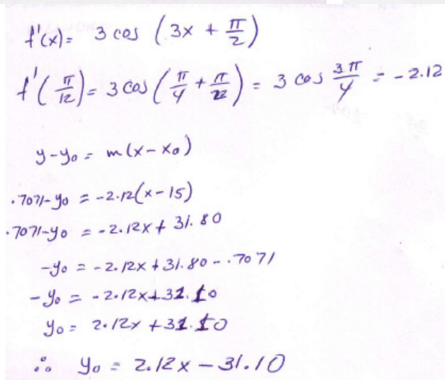




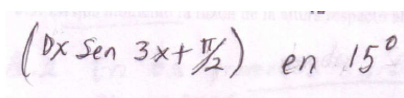
En el caso (**U2**) se confunde en la suma de los argumentos de la función y entonces opta por abandonarlo.







Finalmente el caso (**I1**) resulta interesante debido a que todo el algoritmo lo desarrolla muy bien, sin embargo al sustituirlos en la ecuación de la recta no distingue entre las variables y las constantes. Con (**N2**) aparece la notación D_x, la cual parece indicar el proceso de derivación de la función *f(x)*.



Estos elementos permiten afirmar que la interpretación geométrica de la derivada como pendiente de la recta tangente a la curva en un punto es una idea fuerte, Este hecho parece estar más cercano al sistema de conocimientos del profesor que de las simples creencias; sin embargo puede ser que esto sea consecuencia de un buen aprendizaje del algoritmo y no a un conocimiento profundo del carácter puntual de la derivada.

En relación al último problema donde se pide seleccionar la gráfica que muestra la variación de la altura del agua en función del tiempo parece, que la idea de razón de cambio, al menos en un problema con esta presentación y contexto es una idea fuertes; sin embargo la información no es suficiente para afirmar que pertenece al sistema de conocimientos de la comunidad, (**N1**, **N2**, **T2**, **U1**, **U2**, **I1**, **P)** se requiere del planteamiento de otros problemas que exploren en el profesor si relaciona la derivada con esta interpretación y de que manera lo hace.

5. Conclusiones

Partiendo primero de que ninguno de los profesores de esta muestra contestó correctamente la totalidad de los ítems del cuestionario; luego, que las respuestas no son consensúales en la muestra completa ni en las pequeñas comunidades de enseñanza, que existen diferencias a veces muy profundas en dichas respuestas y en las trayectorias de solución dadas y que las evidencias que proporciona son bastante discutibles en unos casos y muchas veces erróneas, se puede concluir que la comunidad tiene una serie de ideas encapsuladas que funcionan de manera aislada y a veces de manera contradictoria, que más que formar un sistema de conocimiento regido por la verdad de las creencias apoyado en evidencias forman en la comunidad total y en las comunidades de enseñanza un sistema de creencias. En el caso de las comunidades es notable el hecho de que tanto entre sus integrantes como entre éstas se manifiesta diversidad en las respuestas, esto nos lleva a concluir que el conocimiento no es propiedad de ninguna comunidad. Ante esta situación se tiene que aceptar que el salón de clases no necesariamente es el lugar donde se construye conocimiento, sino que en muchas ocasiones es un espacio donde se recrean las creencias del profesor, lo cual puede explicar el origen de muchos de los obstáculos que manifiesta el estudiante. Después de todo esto, se debe reflexionar acerca de que es lo que debiera conocer el profesor no sólo de la derivada sino una reflexión profunda de la utilidad de la derivada en el estudio de las funciones, de las condiciones necesarias y suficientes subyacentes en los teoremas que se mencionan y tienen una importancia especial en el cálculo. Reflexionar acerca del concepto mismo de función y sus elementos subyacentes como su dominio y el papel de los contraejemplos en la construcción del significado, entre otros. Los resultados de este tipo de estudio a la vez que son importantes para la investigación deben serlo también para diseñar adecuados programas de formación y actualización de profesores.

Referencias

Abelson P. R. (1979) Differences between belief and knowledge systems. *Cognitive Science* (3).

Leder, G. C., Pehkonen E. & Törner, G. (Eds.) (2002). *Beliefs: A hidden variable in Mathematics Education*. Kluwer Academic Publishers. Liège, Belgica.

Calderhead, J. (1996). Teachers: Beliefs and knowledge. En D.C. Berliner y R.C. Calfee (Eds.), *Handbook of educational psychology*, New York, Macmillan.

Cooney, T. J. & Wiegel, H. G. (2003). Examining the Mathematics in Mathematics Teacher Education. In *Second International Handbook of Mathematics Education*. Bishop, A.J. et.al. (eds.). Kluwer Academic Publishers. Liège, Belgica.

Courant, R. y F. J. (1982). *Introducción al cálculo y al análisis matemático*. Limusa. México.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. D. Reidel Publishing Company. Dordrecht. Holland.

Gutiérrez, A. y Boero, P. (eds.) (2006). *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*. Sense Publishers. Rotterdam.

Green F. T. (1971). *The Activities of teaching*. McGraw-Hill. Tokyo.

Houston, R. (ed.) (1990). *Handbook of Research on Teacher Education*. New York. Macmillan.

Kaput, J. and Dubinsky, E. (Eds.) (1994). *Research Issues in Learning. Undergraduate Mathematics*. The Mathematical Association of America. Notes number **33**.

Krantz, G. S. (1999). *How to teach Mathematics*. American Mathematical Society. Providence, Rhode Island.

Leatham, K. R. (2006). Viewing Mathematics teacher's beliefs as a sensible system. *Journal of Mathematics Teacher Education*. 9, 91-102. Springer. Netherlands.

Lester, F. (2007). *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*. NCTM. Information age Publishing. Inc. USA.

Moreno Moreno, M. y Azcarate Gimenez, C. (2003). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Enseñanza de las ciencias*. 21 (2), Barcelona, p. 265-280.

Musgrave, A. (1993). *Common Sense, science and scepticism. A historical Introduction to the Theory of knowledge*. Cambridge University Press.

Ollerton, M. (2001). Inclusion, learning and teaching mathematics Beliefs and values. En *Issues in mathematics teaching*. Gates, Peter (ed.). Routledge Falmer. London.

Pajares, F. M. (1992). Teachers' Beliefs and Educational Research: Cleaning Up a Messy Construct. *Review of Educational Research*. **62**(3).

Putnam, R. y Borko, H. (2000). El aprendizaje del profesor: Implicaciones de las nuevas perspectivas de la cognición. En B. Biddle, T. Good, e I. Goodson, (Eds.) *La enseñanza y los profesores I. La profesión de enseñar*. Barcelona, Paidós.

Rico, L. R. et.al. (1995). *Conocimientos y creencias de los profesores de matemáticas sobre evaluación.* Departamento de Didáctica de la Matemática Universidad de Granada y Departamento de Didáctica de la Universidad de Almeria. España.

Schoenfeld, A. (1998). Toward a theory of teaching in context. *Issues in Education*. **4**(1). p. 1-94.

Schön, D.A. (1983). *The reflective practitioner*. New York. Basic books

Shulman, L.S. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher*. **15**, 4-14.

Shulman, L.S. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review*. **57**(1)

Shulman, L.S. (1990). "Paradigmas y programas de investigación en el estudio de la enseñanza: una perspectiva contemporánea", en M.C. Wittrock (comp.). *La investigación de la enseñanza I. Enfoques, teorías y métodos*, Barcelona, Paidós

Skemp, R. R. (1987). Relational Understanding and Instrumental Understanding. In the Psychology of Learning Mathematics. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Steiner, M. (1975). *Mathematical Knowledge*. Cornell University Press. Ithaca and London.

Thompson, A. (1994). Teacher´s beliefs and conceptions: A Synthesis of the Research, en Grows, D. (ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York. Macmillan.

Thompson, A. (1984). The relationship of teacher´s conceptions of mathematics and mathematics teaching to instructional practice. *Educational Studies in Mathematics*. **15**.

Thompson, A. (1992). Teacher´s beliefs and conceptions: A síntesis of the Research. En Grows, D. (ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York. Macmillan.

Thompson, P. W. (1994). Images of rate and operacional understanding of the fundamental theorem of calculus. *Educational Studies in Mathematics*. Kluwer Academic Publishers. **26**.

Torner, G. (1999). Narration as a Tool for Analyzing Beliefs on Calculus-a case study. En Hitt F. y Santos, M. (eds.). *Proceedings of the 20th first Annual Meeting. North America chapter of the International Group for the Psichology of Mathematics Education*. Vol. 2. Clearinghouse for Sciences Mathematics & Enviromental Education. Columbus.

Vila Corts, A. y Callejo de la Vega, M. L. (2004). *Matemáticas para aprender a pensar. El papel de las creencias en la resolución de problemas*. Narcea Editores. Madrid.

Villoro, Luis. (1982). *Creer, saber, conocer*. Siglo veintiuno editores. México.

Miguel Díaz Chávez
mdfou@hotmail.com