

Sobre el desarrollo del Cálculo y su enseñanza

Carlos Ímaz Jahnke & Luis Moreno Armella
Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav - IPN
México

Abstract. Calculus is developed around two key ideas: variation and accumulation. We will explain how Calculus became a royal language of science during the XVII and XVIII centuries. However, beginning the XIX century, in the hands of the new mathematicians, its development took a path that did not fully consolidate the gains from the recent past but focused itself on searching for its foundations in a strange soil. As a consequence, the approach of calculus courses today enhances more formal approaches than developing ideas and methods, to solve scientific problems. We want to cast a bit of light on this educational drama.

Keywords: Calculus, history of calculus, teaching of calculus

Resumen. El Cálculo se desarrolló alrededor de dos ideas: variación y acumulación. Vamos a explicar cómo, durante los siglos XVII y XVIII, este Cálculo se tornó la lengua regia de la ciencia. Sin embargo, a comienzos del siglo XIX, en manos de los nuevos matemáticos, se fue desarrollando por un camino que no consolidó lo que vemos como ganancias del entonces pasado reciente, sino que los esfuerzos se orientaron a la búsqueda de unos fundamentos en tierra extraña. Hoy día, en consecuencia, los enfoques del cálculo se preocupan más por la formalización que por el desarrollo de las ideas y métodos genuinos del Cálculo que van dirigidos a la resolución de problemas científicos. Queremos arrojar un poco de luz, al menos, sobre este drama educativo.

Palabras clave: Cálculo, historia del cálculo, enseñanza del cálculo

1. Introducción

El cálculo es un edificio intelectual enorme articulado alrededor de dos ideas centrales: *variación* y *acumulación*. La representación clásica de estas ideas es la geométrica, lo que da origen a las figuras emblemáticas del cálculo:

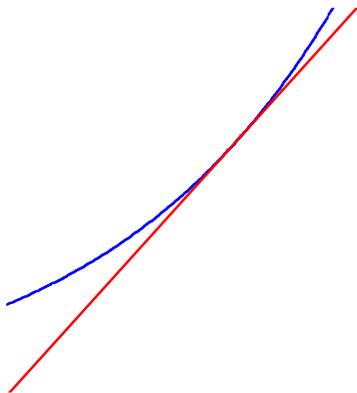


Figura 1: la variación

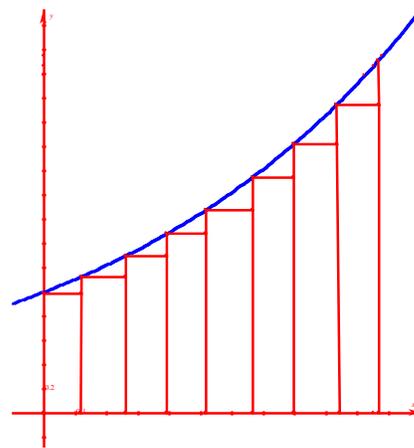


Figura 2: la acumulación

Una parte sustancial (tal vez la mas sustancial) de la historia de las matemáticas durante los siglos XVII y XVIII, trata de la evolución de estas ideas. Desde luego, no puede hablarse de generación espontánea pues el estudio geométrico del movimiento en manos de Galileo, y la geometría analítica de Descartes, ya estaban establecidos y formaban parte del arsenal conceptual de los matemáticos de entonces, matemáticos, hay que aclararlo, que no eran como los de hoy, sino que de acuerdo al espíritu de sus tiempos, concebían las matemáticas como un instrumento para desentrañar las relaciones cuantitativas del mundo material.

2. Desarrollo histórico del Cálculo

Para abordar los problemas representados mediante las figuras anteriores, matemáticos de la talla de Fermat, Cavalieri, Descartes, Wallis y muchos otros (Edwards, C. 1979), diseñaron estrategias ad-hoc para resolver casos especiales de estos problemas de variación y acumulación. Problema por problema fueron acercándose a métodos cada vez más generales mediante los casos particulares, pero sin lograr desentrañar plenamente la relación oculta entre la variación y la acumulación. Hubo que esperar al trabajo de Newton y Leibniz para que cristalizara lo que se venía gestando: el teorema fundamental del cálculo, que establece una relación profunda entre la derivada y la integral. Lo que ellos hicieron fue poner a punto las ideas que el trabajo precedente había puesto en *la zona de desarrollo potencial del cálculo*. Newton expresó de manera sencilla y categórica, lo que cada generación le debe a quienes le preceden: *Si he podido ver más lejos es porque he subido a hombros de gigantes*.

Desde esta perspectiva, el teorema fundamental del cálculo aparece entonces como la realización de esa zona de desarrollo potencial creada por la acumulación del trabajo, de las ideas, de quienes precedieron a Newton y Leibniz.

El trabajo de Newton no se limitó al hallazgo del resultado que identificaba, por así decirlo, el código genético del cálculo. Fue más allá en el estudio del movimiento permitiendo una síntesis de las leyes encontradas por Galileo y las leyes que regían el movimiento de los planetas. La parábola de tiro de Galileo y la elipse planetaria de Kepler encontraron una explicación común. Fue tal el impacto de los Principia de Newton que, con el tiempo, fue consolidándose como la manera paradigmática de hacer ciencia, y dejó en claro que para esa manera de hacerla, la mecánica era el modelo.

Con la síntesis lograda mediante el teorema fundamental, se entró a una fase denominada *análisis algebraico*. Si hubiese que señalar al principal responsable del desarrollo de esta fase, no habría mayores problemas: Euler. Tratando de expresar el despliegue de ingenio y profundidad de su trabajo, se ha dicho que Euler calculaba con la misma facilidad con la que el águila surca los cielos. En su *Introductio in Analysin Infinitorum (Introducción al Análisis de los Infinitos)* publicado el año de 1748, dejó, tal vez, su más brillante testimonio de cómo entendía las cantidades infinitamente grandes y las cantidades infinitamente pequeñas y su propuesta para manipularlas. Si hubiese que mencionar un solo resultado ejemplificador de ese texto extraordinario, escogeríamos este:

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots$$

La estrategia que sigue Euler para alcanzar este resultado es una muestra inequívoca de su intuición matemática y su sentido del número, que le hace elegir con certeza la situación “finita” que ha de extenderse al dominio de lo infinitamente grande y de lo infinitamente

pequeño. Vale la pena una vez más revisar las líneas generales de su estrategia (Euler, 1748/2000, pp. 168-169).

Primero, lo conocido (lo finito):

Si una ecuación polinomial $P(x)=0$ de grado n tiene n raíces distintas r_1, r_2, \dots, r_n , y todas son diferentes de cero, entonces,

$$P(x) = B(1-x/r_1)(1-x/r_2)\cdots(1-x/r_n) \quad (1)$$

Ahora viene lo nuevo: Sabemos que las raíces de $\text{sen}(x)/x$, son $\pi, -\pi, 2\pi, -2\pi$, etc., y todas son diferentes de cero. Por lo tanto, extendiendo el resultado (1) a un “polinomio” de grado infinito que tiene todas sus raíces diferentes de cero, como es el caso de $\text{sen}(x)/x$, se tiene:

$$\text{sen}(x)/x = (1-x/\pi)(1+x/\pi)(1-x/2\pi)(1+x/2\pi) \quad (2)$$

Que puede re-escribirse como:

$$\frac{\text{sen}(x)}{x} = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\dots \quad (3)$$

El desarrollo de $\text{sen}(x)/x$ como polinomio de grado infinito, cosa que había establecido en páginas precedentes, es:

$$\frac{\text{sen}(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots \quad (4)$$

Igualando los coeficientes de x^2 en las expresiones (3) y (4) se obtiene:

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots$$

que es a donde se quería llegar.

Viendo esta manera formal de proceder, uno podría pensar que los razonamientos basados en la guía que suministraba la física, habían quedado en el olvido. Pero no es así. Los matemáticos, entre ellos el mismo Euler, todavía se seguían ocupando de problemas físicos, siguieron escuchando a la naturaleza. Un siglo después del trabajo de Euler, Fourier sigue pensando en sintonía con Galileo quien había expresado que “el lenguaje en que está escrita la naturaleza es el lenguaje matemático”. Fourier (Bottazzini, 1986, pp. 79-80) se encargaría de recordárnoslo, en 1822, con estas palabras:

“El estudio de la naturaleza es la fuente más fértil de descubrimientos matemáticos... por ello, el análisis matemático es tan extenso como la misma naturaleza...”

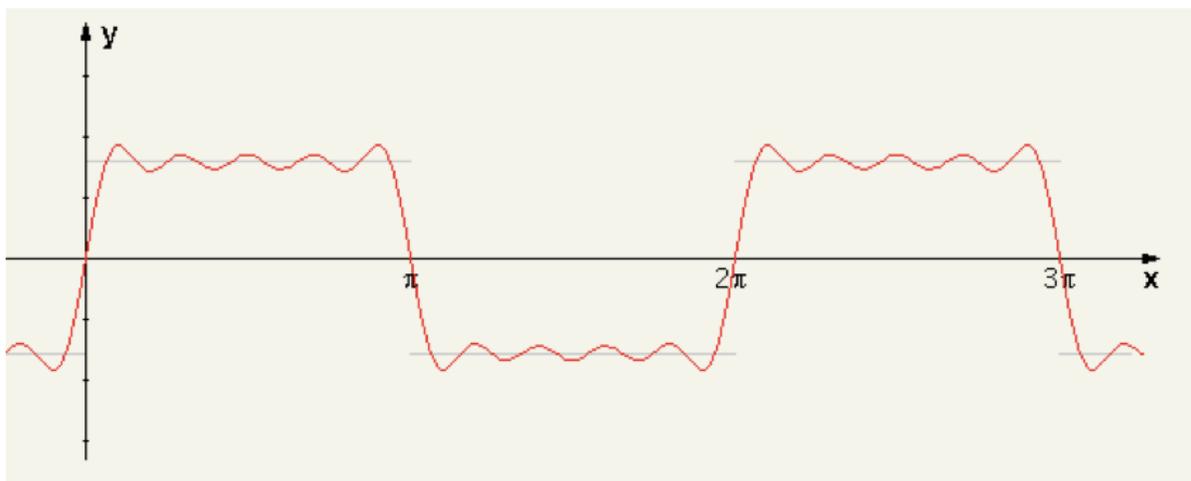
Nuestra teoría [del calor] reduce las investigaciones físicas al cálculo integral.”

Y añade:

“Las técnicas están *legitimadas* por la naturaleza física de los problemas a resolver.”

Entonces, si bien es cierto que podemos recurrir a las analogías, como brillantemente demostró Euler para encontrar sus resultados, Fourier regresaba a escuchar a la naturaleza. Si Euler hubiese conocido *El Método Mecánico* de Arquímedes, uno podría pensar que se inspiró en él para hallar sus resultados. En efecto, Arquímedes describe en su carta a Eratóstenes un método que le permite hallar resultados geométricos aunque “después haya que demostrarlos con el

rigor de la geometría”, es decir, al estilo de Euclides. En estas pocas líneas hemos levantado el velo y al otro lado de la ventana vemos, en el teatro de la historia de las matemáticas, un drama: En Grecia, la lucha entre los partidarios de la demostración rigurosa, al estilo euclidiano, y quienes desde una postura pluralista, como Arquímedes, defienden otras opciones como la de imaginar los objetos geométricos como objetos físicos lo que hace posible ponerlos en una balanza y si pesan igual, es porque tienen el mismo volumen, si son sólidos, o la misma área, si es que son planos. No describiremos aquí el método mecánico de Arquímedes, pero sí queremos recordar que permaneció en el limbo y allí estuvo mientras los geómetras del siglo XVII iniciaban la ardua tarea de “poner los hombros” que sostuvieron a Newton y Leibniz, para ser redescubierto sólo a inicios del siglo XX. Ese drama que vemos como una tensión en el seno de la cultura griega, entre la intuición y la deducción, entre el rigor y la analogía, siguió como las raíces de un árbol, penetrando el suelo matemático y llegó a los siglos XVII, XVIII, manifestándose, como lo acabamos de ver, en la obra de Euler y desde luego en quienes lo antecedieron. Líneas arriba hemos escrito: “Fourier regresaba a escuchar la naturaleza”, en efecto, en su teoría analítica del calor enuncia un resultado que parecía inconcebible en su tiempo, a saber, que toda función (de las de su época, claro) puede expresarse como una serie de senos y cosenos. Lo ilustramos con la siguiente gráfica en la que se ve cómo una función (discontinua) que toma valores fijos positivos y negativos, alternadamente, está siendo aproximada por una suma (parcial) de una serie de senos y cosenos:



Para Fourier, las funciones eran *modelos* matemáticos mediante los cuales se representaba un fenómeno físico. De manera que la plausibilidad y la legitimidad del resultado matemático provienen de su naturaleza de modelo (Bottazzini, 1986, pp. 61, 79-80).

El resultado de Fourier se mostraba demasiado incómodo. Pero a la vez, era muy útil...un verdadero dilema. El dilema proviene de una especie de disonancia entre el enunciado matemático y la manera de justificarlo, interpretándolo físicamente. Agustín Cauchy debió percibir esa disonancia al intentar enseñar el cálculo que ya para la tercera década del siglo XIX, empezaba a ser conocido como *Análisis*, en sus escritos. Por primera vez, los matemáticos (Cauchy entre ellos) tenían responsabilidades docentes, y seguramente esas obligaciones pusieron, ante los ojos de muchos, la necesidad de una exposición clara de los principios matemáticos. Esto ocurría en Francia y Alemania, en las universidades.

Las *lecciones de Análisis* de Cauchy (Edwards, 1979, pp. 310-311) se basan en una noción de límite imaginado como un proceso dinámico sobre el continuo de la recta numérica. Los

números están representados por sus expansiones decimales. Nos describe que la función f es *continua*, entre los dos límites asignados a la variable x , si para cada valor de esta variable entre estos límites, el valor numérico de la diferencia

$$f(x + a) - f(x)$$

decrece indefinidamente cuando el valor numérico de a decrece indefinidamente. Nótese el lenguaje dinámico. Tal vez pueda decirse que Cauchy es a la organización de las ideas de límite, función continua y demás nociones que van surgiendo del desarrollo del cálculo, lo que fue a la geometría griega Euclides: un gran sistematizador. Lo que no es poco.

Es muy posible que las motivaciones originales de Cauchy hayan provenido de dos circunstancias: por un lado, la necesidad de contar con versiones, conceptualmente claras, para su trabajo docente; por otro lado, una transformación en las maneras de hacer matemáticas, la emergencia de un nuevo paradigma. Cauchy mismo (Bottazzini, 1986, p.102) nos dice:

“En cuanto a los métodos, he buscado darles todo el rigor que se exige en geometría de modo que no haya que recurrir a razonamientos extraídos de la generalidad del álgebra.

[esta última forma de razonar] no puede considerarse mas que como inducciones adecuadas para hacer presentir la verdad, pero que no van de acuerdo con la exactitud de las matemáticas.”

No hay que olvidar que cuando Cauchy escribe estas ideas, casi al mismo tiempo se está gestando la fundación de las geometrías no-euclidianas. Estas, ponen en tela de juicio la intuición del espacio que se había erigido como el gran obstáculo para superar los problemas derivados de una interpretación demasiado física del postulado de las paralelas. De manera que estaba en el aire, en una atmósfera propicia para el cambio, que se abandonaran los métodos inductivos y se adoptaran otros menos dependientes de la intuición. Eso trató de hacer Cauchy. Pero cada persona es hija de su época y no siempre logra romper todos los lazos que lo vinculan con el modo de pensar de su tiempo. Cauchy logró señalar un camino nuevo, pero sólo avanzó parcialmente por él. Empezaba a nacer esa *especie* que llamamos hoy día *matemático* (puro).

Sin embargo, los *científicos* siguieron pensando que la guía segura era la naturaleza. Hacia 1890 Heaviside, a su manera otro experto en el manejo virtuoso de los infinitesimales, explicaba (Young, 1992, p. 355): *La serie es divergente, por lo tanto podemos hacer algo con ella*. Y sin embargo, en 1828, Abel sostenía (Young, op. cit. p. 355; Bottazzini, 1986, p. 90) que: *Las series divergentes son una invención diabólica; es una vergüenza basarnos en ellas para hacer una demostración*.

Estas citas son interesantes porque ilustran la disonancia entre: (i) una forma de hacer matemáticas que las ve como modelos simbólicos de aspectos de la naturaleza y por lo tanto basa su legitimidad en la fidelidad de esos modelos y (ii) la forma de hacer matemáticas que las ve como una actividad simbólica que debe generar sus propios criterios de legitimidad. Después de las geometrías no-euclidianas, el razonamiento geométrico estaba un poco desacreditado para ser tomado como fundamento de la versión emergente del cálculo. Quedaba todavía la aritmética como posible fuente de legitimidad. Un contemporáneo de Cauchy, Bernardo Bolzano, se expresó en 1817, en estos términos (Bottazzini, 1986, p.90) con respecto al programa emergente:

“Es claro que es una intolerable ofensa en contra del método correcto deducir verdades de las matemáticas puras (aritmética, álgebra, análisis) de consideraciones que pertenecen a una parte meramente aplicada, a saber, la geometría.”

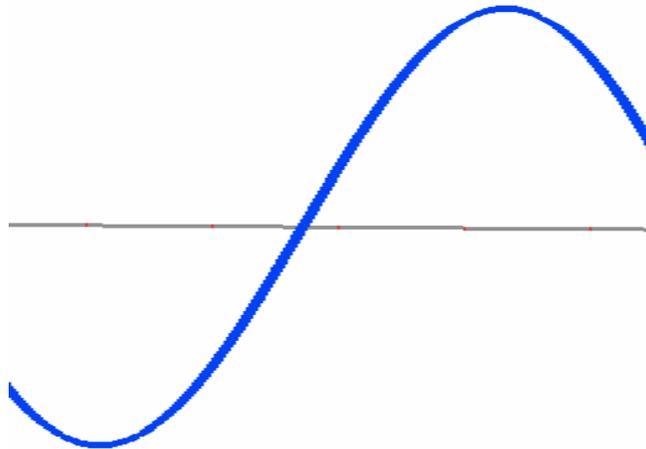
Y continuaba:

“No menos inadmisibile es la prueba que algunos han construido mediante la inclusión de los conceptos de tiempo y movimiento... nadie podrá negar que los conceptos de tiempo y movimiento son tan externos a las matemáticas como el concepto de espacio...”

La prueba inadmisibile a la que alude Bolzano en este pasaje es la del teorema del valor intermedio: *si una cantidad varía continuamente entre dos valores, entonces toma todos los valores comprendidos entre estos dos valores*. En un lenguaje más “moderno” se enuncia en estos términos:

Si una función continua f , definida sobre algún intervalo $[a, b]$ es tal que $f(a) < 0 < f(b)$, entonces existe c , entre a y b , tal que $f(c) = 0$.

Gráficamente la situación es como esta:



Y la forma geométrica de discurrir sobre este teorema es imaginar que viajamos sobre la curva continua empezando desde el extremo de la izquierda y entonces, en algún momento, debemos cruzar el segmento horizontal que representa el dominio de la función. Esto es lo que para Bolzano resulta inadmisibile como parte de las matemáticas, es decir, recurrir al movimiento que considera una idea por fuera de las matemáticas, tanto como las de tiempo y espacio. Estas concepciones, como las de Bolzano, empezaron a llenar la atmósfera de las matemáticas, como un gas que va llenando una habitación encerrada haciéndose más denso por momentos. Las ideas son parte de la cultura y por ello, viajan en el tiempo impregnando el modo de pensar. Tal vez por ello, Farkas Bolyai le insistía a su hijo Janos, a que publicara pronto sus ideas sobre la geometría no-euclidiana, pues (Kline, 1962, p. 559) *...parece ser cierto que las cosas tienen un tiempo en el que se las descubre simultáneamente en distintos lugares, justo como las violetas aparecen por todas partes durante la primavera*. Como esas violetas, las intenciones de Bolzano de fundar el razonamiento matemático en la aritmética, dejando por fuera la geometría,

florecieron mas adelante en el intelecto de Richard Dedekind. En 1858, siendo profesor del Politécnico de Zurich, Dedekind tuvo que enseñar cálculo. Y entonces tomó conciencia de que la fundamentación aritmética del cálculo tampoco descansaba sobre bases sólidas (Fauvel & Gray, 1987, p. 573). Dijo así:

“En 1858, siendo profesor del Politécnico de Zurich, me vi obligado a enseñar los fundamentos del cálculo diferencial y más que nunca antes, sentí la falta de una fundamentación científica para la aritmética. En particular, me veía obligado a dar una justificación geométrica al hecho que una magnitud creciente y acotada debe tener un límite.”

Desde luego, el que *una magnitud creciente y acotada tenga un límite* es la traducción aritmética del hecho de que la recta numérica sea continua. Bolzano había reconocido este hecho como crucial para dar una versión aritmética de los fundamentos del cálculo pero no logró llevar a buen puerto su propósito. Dedekind iba a lograrlo, pero los costos educativos, como veremos más adelante, serían enormes. Gradualmente, lo que en manos de Cauchy parecía una buena idea, la de esclarecer las bases del cálculo para que aparte de claridad se inyectara legitimidad a los razonamientos (y evitar los “abusos” inductivos de gente como Euler), ahora se había transformado en un programa que alejaba ineluctablemente al cálculo de lo que había sido en otros tiempos. Ante los ojos de la comunidad emergía una nueva disciplina con una estructura intencional donde ya difícilmente se reconocían las manos de Leibniz o las de Newton. Dedekind (Fauvel & Gray, op. cit. p.573-574) continuaba:

“Considero que el concepto de número es totalmente independiente de las nociones de espacio y tiempo... Los números son creaciones libres de la mente humana; sirven como un medio para aprehender más fácilmente y con más agudeza, la diversidad de las cosas... [incluso] para investigar nuestras nociones de espacio y tiempo, al relacionar estas últimas, con el dominio numérico creado en nuestra mente.”

3. Problemas de enseñanza

Si bien Dedekind reconoce que la interpretación geométrica de la proposición *una magnitud creciente y acotada tiene un límite* resultaba conveniente desde un punto de vista pedagógico, ello no podía tomarse como fundamento *científico* del cálculo. Es posible que Dedekind haya vislumbrado la diferencia entre “dotar al cálculo de fundamentos científicos” y el enfoque que resultaba adecuado para la enseñanza. Pero desafortunadamente no resultó así entre las generaciones posteriores (incluidas las nuestras) y se ha terminado, en gran medida, por olvidar o confundir el programa pedagógico con el programa de fundamentación. Habría que decir: el cálculo es una disciplina distinta a su fundamentación. Sin duda la fundamentación es muy importante, pero para otros propósitos. Aquí vale la pena recordar un punto de vista ya célebre de René Thom (Howson, 1973, p. 202):

“El verdadero problema al que se enfrenta la enseñanza no es el del rigor sino el problema del desarrollo del significado y de la existencia de los objetos matemáticos... si hay que elegir entre el rigor y el significado, sin duda elijo el significado.”

La aritmetización, todo un programa, no se detuvo con Dedekind. Sin embargo, lo que hemos expuesto aquí nos parece suficiente para mostrar los orígenes de una confusión que con una

resistencia digna de mejores causas, sigue gravitando entre nosotros. En lo que sigue, vamos a adoptar un punto de vista que analiza problemas de enseñanza derivados de esta confusión y que llevan a olvidar las raíces del cálculo y a sustituirlas por el aparato formal del análisis matemático derivado del cálculo. La situación resultante es un curso de cálculo tensado entre dos extremos: uno, los problemas de variación y cambio y el otro un lenguaje aritmetizado que no corresponde a la problemática natural del cálculo. Algunas de las dificultades y de los retos implícitos en el aprendizaje del cálculo infinitesimal aún desde antes, ya habían sido señalados por Euler, quien los centraba en el manejo eficaz del álgebra y del concepto de infinito, y están comentados en el prefacio a su obra *Introductio in analysin infinitorum*. Desde luego que esa conceptualización del infinito no está explicitada pero no es difícil deducirla de las manipulaciones que Euler hace. Mas lo curioso es que las cosas no mejoraron con el tiempo, y si bien muchos de esos retos y dificultades cambiaron, muy por el contrario, los progresos en la fundamentación del análisis matemático nos fueron llevando a posiciones verdaderamente críticas como nos lo hace patente el párrafo siguiente, que hemos sacado de una carta escrita alrededor de 1932 por el matemático ruso Nicolai Luzin. Esa carta expone con claridad meridiana la situación de la enseñanza del cálculo en la Unión Soviética en la década de los treinta del siglo pasado. Pero se puede hacer extensiva en tiempo y espacio a casi cualquier otro país. Luzin se expresó de esta manera:

“Veo las cuestiones de la fundamentación del análisis infinitesimal sin tristeza, enojo o irritación. Lo que hicieron Weierstrass y Cantor fue muy bueno. Así tenía que hacerse. Pero si ello se corresponde con lo que tenemos en nuestra consciencia, eso es otro asunto. Me salta una brutal contradicción entre las fórmulas intuitivamente claras del cálculo integral con el incomparablemente artificial y complejo trabajo invertido en las justificaciones y demostraciones. Se debe ser muy estúpido para no ver esto de inmediato, y muy irresponsable si, habiéndose percatado de ello, uno se acomoda a esta atmósfera lógica artificial olvidándose de esa brutal contradicción.”

La carta fue escrita para argumentar a favor de un texto de cálculo (de hecho estaba dirigida a su autor) que retomaba los infinitesimales, que fue publicado en aquellos días y que Luzin consideraba la forma más natural de introducir las ideas del tema, en contra de la opinión mayoritaria de los matemáticos soviéticos. Pero resultaba aún más impactante si sabemos que fue escrita por un matemático que era, en su momento, de los más destacados desarrolladores del análisis en su forma moderna. La lectura de la carta, en toda su extensión será provechosa, al menos, para cualquier profesor de cálculo o de análisis. El lector interesado puede leer la carta íntegra (en versión al inglés) en la revista *American Mathematical Monthly* del año 2000. Allí podrá encontrar la referencia a la versión original en ruso. Aprovechamos aquí para resaltar que dicha carta permaneció relegada en algún oscuro archivo burocrático de la municipalidad de Moscú, casi hasta los albores del siglo XXI, como un alegato más para explicitar el síndrome de Cantor del que hablaremos más adelante, pero en este caso seguramente con su pizca de condimento político ya que era sabido que Marx no aceptaba los infinitesimales.

Las cosas tampoco mejoraron para nada a lo largo del siglo XX, ni en lo que va del XXI, de hecho la tendencia parece apuntar a que seguirán por mal camino. Por ejemplo, en el texto “*Calculus*” escrito por G. B. Thomas, profesor del M.I.T., versión de 1968 (Addison-Wesley), se puede encontrar el siguiente diamante en bruto:

“ dx , llamada la diferencial de x , puede representar cualquier número; esto es, dx es otra variable independiente y su dominio es $-\infty < dx < +\infty$.”

Seguido de,

“ dy , llamada la diferencial de y , representa la función de x y de dx definida por $dy = f'(x) dx$. Obsérvese que $dy/dx = f'(x)$, nada hay de misterioso en ello, así lo planeamos.”

Más adelante propone el siguiente problema, *encontrar una aproximación razonable (?) del número $(1.001)^7 - 2(1.001)^{4/3} + 3$* . Le sugerimos al lector que, sin prisas ni prejuicios, haga una reflexión sobre lo escrito en dicho texto, pero desde luego, si no nota nada raro le sugerimos que consulte con personas conocedoras del cálculo y de su entera confianza.

Más recientemente, en un texto de cálculo escrito por el profesor J. Stewart, de la Universidad de McMaster (Editorial Thomson, 1998), a lo largo de un par de páginas se logra demostrar que

$$1 + (1/4) + (1/9) + (1/16) + \dots < 2,$$

y sin el menor asomo de rubor se comenta que hacía ya casi 250 años que Euler (en su libro *Introductio*), también en un par de páginas y sin usar cálculo, había probado que la suma es de hecho igual a $\pi^2/6$ (en realidad Euler demostraba bastante más que eso, como ya vimos anteriormente), pero que esa demostración *estaba fuera del alcance del texto*. La impresión que nos queda es que la enseñanza y el conocimiento del cálculo, según el criterio del profesor Stewart, han estado progresando a la manera de los cangrejos.

Seguramente no será demasiado difícil encontrar muchos otros ejemplos de acomodo a esa lógica artificial y consecuente olvido de las brutales contradicciones, sobre los que escribía Luzin. Existen también muchos otros puntos teóricos en los cuales la enseñanza del cálculo está en deuda, veamos un par de ejemplos.

Cuando estudiamos ecuaciones diferenciales ordinarias y se define el llamado problema de condición inicial, se plantean y se ejemplifican las posibilidades de que el problema no tenga solución, o de que tenga más de una, sin darnos cuenta de que tales posibilidades están implícitamente en contradicción con el problema mismo, en efecto, ¿cómo es posible que habiendo especificado un lugar de inicio y una dirección de salida nos resulta que no vamos a ningún sitio, o aun peor, nos vayamos indistintamente a varios sitios diferentes? Dicho en pocas palabras, ¿cómo es posible que exista indeterminación si estamos en condiciones teóricas que son claramente determinísticas? La explicación, si recurrimos a campos con infinitesimales, está en que existen soluciones que nunca se alejan más de una distancia infinitesimal de su lugar de inicio, es decir que en nuestro cálculo con números reales no las vemos (no existen). Y aparecen, así mismo, soluciones que arrancan de puntos diferentes, pero infinitesimalmente próximos (esto es, parecen salir del mismo sitio), pero eventualmente se separan tanto como queramos.

Por cierto, la observación que se hace en el párrafo anterior parece testimoniar que el modelo infinitesimal del análisis es no solo más conveniente sino de hecho necesario, en concordancia con la filosofía de que las mejores teorías son aquellas que más o mejor explican. Seguramente que Luzin estaría de acuerdo con esta afirmación.

Otra deuda involucra al llamado Teorema Fundamental del Cálculo, piedra angular en el desarrollo del cálculo. Este suele aparecer como en un acto de circo en la enseñanza, cosa que

podiera haber estado justificada en los albores de la historia de las matemáticas, pero no en el siglo XX (menos el XXI), cuando una reflexión madura puede arrojar luces sobre los contextos originales y dar una explicación *al día*. Hoy, este resultado debe ser una consecuencia directa del hecho de que los operadores ∂ y Σ , definidos sobre secuencias numéricas por medio de las expresiones

$$\begin{aligned}\partial(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) &= (x_1, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}) \\ \Sigma(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) &= (x_1, x_1 + x_2, \dots, x_1 + x_2 + \dots + x_n),\end{aligned}$$

resultan ser recíprocos, esto es, $\partial * \Sigma = \Sigma * \partial = \text{identidad}$ (lo cual es muy fácil de comprobar), y que el operador ∂ es en esencia la diferenciación y el operador Σ la integración; las cuales son, como dijimos al inicio de este escrito, las dos ideas centrales del cálculo.

De esta manera podemos darnos cuenta de que la enseñanza del cálculo padece de diversas *patologías*. Destacaremos algunas que seguramente el lector podrá reconocer, pues además de su persistencia son densas en el ámbito educativo:

1.- Una grave *indigestión crónica* provocada por excesos de rigor debidos a una confusión contagiosa entre el cálculo y el análisis, que llamaremos síndrome de Klein, en recuerdo del conocido matemático alemán del siglo XIX, primero en pregonar que el cálculo se podía entender mejor sólo desde las cumbres del análisis. Esta tesis, para desgracia de millones de estudiantes, es compartida en grandes sectores de los ámbitos académicos.

2.- Un tipo de *desorden inmunológico* que se manifiesta como severa alergia, con abultado historial y complicada etiología típicos de las alergias, a los infinitesimales y que produce un desorbitado rechazo a ellos, que llamaremos síndrome de Cantor, en recuerdo de otro conocidísimo matemático alemán del siglo XIX, quien en un arrebato matemático con sabor puritano bautizó a los infinitesimales como "*bacilos coléricos de la matemática*", ni más ni menos.

3.- Una atrofia muscular atípica, que desencadena una feroz aversión al estudio del cálculo, y que es provocada por la frecuente manipulación de tremendos mamotretos conocidos como "*textos de cálculo*", cuya escritura, fabricación y venta significan un pingüe negocio muy difícil de deshacer, pero que a su vez representan una sórdida amenaza a la enseñanza y daremos en llamar, dicha atrofia, *síndrome texticular*.

Lo que hemos señalado hasta este punto conforma, sin pretensiones de exhaustividad, pero sin lugar a dudas, un buen análisis etiológico y diagnóstico sobre la enseñanza del cálculo diferencial e integral, casi universalmente válido para este inicio del siglo XXI. Por otro lado, creemos que existe consenso en considerar que el desarrollo de estudios y acciones, que pudiéramos llamar clínico-terapéuticos, relacionados con la enseñanza de las matemáticas, y en particular del cálculo, se concentran en los inicios del siglo XX y con señalada tasa de crecimiento a lo largo del eje positivo del tiempo, para hablar con lingo propio del cálculo. Para comentar a este respecto recurrimos a un escrito de Michèle Artigue (1998), "*Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿Qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares?*", que fue presentado al ICME-8 (Sevilla 1996). Este documento, escrito por una reconocida investigadora de los problemas didácticos del análisis, contiene un breve y conciso resumen de investigaciones (internacionales) hechas sobre el tema hacia finales del siglo XX, así como las adecuaciones curriculares (francesas) pertinentes para el bachillerato a lo largo de todo ese siglo. Todas las investigaciones reportadas giran alrededor de los

problemas que supuestamente se les presentan a los estudiantes que se inician en el aprendizaje del cálculo, y particularmente se mencionan las siguientes:

- Las dificultades ligadas a la complejidad matemática de los objetos básicos de este campo conceptual: los números reales, las funciones y las sucesiones, objetos que están siempre en construcción cuando se empieza la enseñanza del análisis.
- Las dificultades ligadas a la conceptualización de la noción de límite, noción central del campo y a su denominación técnica.
- Las dificultades ligadas a la necesaria ruptura con modos de pensamiento característicos del funcionamiento algebraico.

En realidad, con poco que analicemos la sustancia y el contexto de estas dificultades, nos daremos cuenta de que son propiciadas, más que nada, por el síndrome de Klein. Por ejemplo, cuando hemos hipotecado, en aras de la pulcritud analítica, nuestra libertad de decir que *“una función f es continua en algún punto a , solo si b cerca de a implica $f(b)$ cerca de $f(a)$ ”*, frase que para ser entendida no requiere de ninguna ruptura de pensamientos o salto de obstáculos, pero que si requiere, claro está, de que tengamos un concepto de *cercanía* que no sea por cuenta propia un galimatías. O cuando se resalta como problema educativo muy importante el hecho de que los estudiantes, por lo general, no alcanzan a *“reconocer que las sucesiones son también funciones”*, cosa que no alcanzamos a comprender cual sea su relevancia para el cálculo. O cuando nos sorprendemos por el hecho de que la mayoría de los estudiantes no acaba de digerir la *“igualdad”* $0.999\dots = 1$ que, para ellos, prácticamente nos hemos sacado de la chistera.

El síndrome de Cantor también ha dejado sus huellas imborrables. Como bien recuerda Artigue, con respecto a la gran reforma curricular hecha en Francia el año de 1902,

“Para los matemáticos involucrados en esta reforma del bachillerato, la enseñanza del análisis debía de ser rigurosa, liberada de toda clase de metafísica (esto es de toda clase de infinitesimales), pero, a la vez, debía de ser accesible a los estudiantes y útil para las matemáticas y también para las ciencias físicas.”

Esta es sin lugar a dudas una declaración, que es aparentemente compartida por Artigue, de aquel grupo de matemáticos involucrados en la reforma que fue catapultada por el síndrome referido, pues cómo, si no, entender esta conexión hecha entre infinitesimales y metafísica. Sin embargo, la patología del síndrome trata de suavizarse aun más de lo hecho en el párrafo antes citado al recurrir a Poincaré, quien dice en referencia a dicha reforma:

“Sin duda es difícil para un profesor enseñar lo que no le satisface enteramente; pero la satisfacción del profesor no es el único objetivo de la enseñanza; uno debe preocuparse primero de lo que es la mente del alumno y a donde quiere llevarla.”

Sorprende (tal vez ya no nos debería sorprender) la persistencia de investigadores del campo en querer encontrar la clave del entendimiento del cálculo en la noción de límite. Seguimos insistiendo que nos estamos refiriendo *a la entrada* en este importante cuerpo de ideas matemáticas, tal y como lo hemos descrito en la primera parte de este trabajo. Regresemos a la persistencia aludida que parece guiada por una ideología que no deja ver la rica historia de la materia. En un trabajo publicado en 2008, su autor K. Roh vuelve a la carga:

“El concepto de límite es una de las ideas más fundamentales no sólo para desarrollar el cálculo sino para desarrollar el pensamiento matemático más allá del cálculo en la búsqueda del rigor matemático (cursivas nuestras).”

No parece quedar duda alguna que esa ideología ha fijado en el espíritu de los investigadores (seguramente no todos) una única manera de concebir el desarrollo del cálculo y que consiste en re-organizarlo a través de una versión rigurosa del concepto de límite. Pensamos que las dificultades, si no todas al menos una parte sustancial de ellas, a las que los estudiantes se enfrentan proceden no tanto del cálculo sino de esta forma artificial de presentarlo. Ya no es sorpresa pues, que en el trabajo referido (Roh, 2008, p. 218) la experimentación permita concluir:

“... la mayoría de los estudiantes no adoptaron el punto de vista formal sobre límites. Cottrill et al. (1996) hicieron ver que muy pocos estudiantes comprendieron la definición formal de límite, y que *ninguno aplicó la definición formal de límite* a situaciones específicas (cursivas nuestras).”

Líneas más adelante añade:

“... las palabras empleadas para expresar las imágenes dinámicas de límite como “aproximándose” o “acercándose” *no capturan el significado matemático del concepto de límite* (cursivas nuestras)”

Este trabajo representativo de las investigaciones de este tenor, está escrito con sumo cuidado y además recoge las investigaciones que le preceden, con igual celo. Por ello lo consideramos representativo del estado de la investigación dentro de este paradigma. Sin embargo, nos queda la sensación que no extrae la conclusión que parece flotar como evidencia ante nuestros ojos: si los estudiantes no adoptan el concepto formal de límite, si no lo aplican, si las imágenes dinámicas (como las de Newton) no capturan el significado de la noción formalizada de límite, *entonces quizá haya que abandonar este acercamiento curricular al cálculo*. Pareciera que las dificultades de los estudiantes no se presentan cuando tratan de entender el cálculo como disciplina que estudia la variación y la acumulación sino cuando se enfrentan (o mejor: los enfrentan y ellos no saben por qué) a un concepto formalizado de límite. En resumen: las dificultades de los estudiantes no provienen del cálculo sino de un currículum artificial. Dado que ya conocemos el historial en el siglo XX de las reformas curriculares matemáticas en casi todo el mundo, no solo las francesas, aun cuando éstas han sido de las más influyentes, debemos de admitir que poco caso se les ha estado haciendo a matemáticos como Henri Poincarè, Nicolai Luzin, René Thom y muchísimos otros, que se han manifestado muy claramente de maneras análogas respecto a que debieran respetarse las prioridades pedagógicas por encima de las de corte teórico-filosófico- matemático.

Queremos ahora referirnos aquí a otro asunto que está muy correlacionado con ese síndrome cantoriano. En el año de 1966 aparece un interesante libro intitulado “*Non-standard analysis*”, escrito por el profesor germano-americano Abraham Robinson. Suele decirse que el trabajo expuesto en este libro tiene como propósito dar una solución a las contradicciones que planteaba el uso de infinitesimales en el cálculo diferencial e integral, pero en realidad el interés principal del autor parecía estar en abrir nuevas formas de inquisición y de argumentación para el análisis. Vemos así que inicia el libro con una amplia exposición de antecedentes técnicos de lógica matemática, sigue una parte sobre cálculo propiamente hablando, pero los siguientes seis capítulos tratan asuntos de topología general, medida, integración y distribuciones, variable

compleja, espacio lineales, grupos topológicos y de Lie, principio de Dirichlet, flujos laminados, principio de Saint-Venant, etc., todo lo cual conforma un poderoso guiso extremadamente difícil de digerir, pero termina con un interesante capítulo sobre historia del cálculo, que sí recomendamos como lectura para profesores del tema. La aparición de este libro desencadenó un verdadero alud de textos de cálculo infinitesimal (ahora sí con infinitésimos) y otro alud concomitante de intentos de subir esta versión “moderna” hacia la currícula, estimulados por la atrayente perspectiva de poder utilizar infinitesimales para abordar los obstáculos en la enseñanza del cálculo. Mas todo esto parece haberse frenado bruscamente debido al efecto friccionante del síndrome de Cantor, pero ahora aumentado por el escollo que significa tener que recurrir a sofisticados temas de lógica matemática para poder acceder de manera “legal” al usufructo de los infinitesimales. No hace mucho un coautor, de uno de esos textos infinitesimalistas, nos confesaba que pensaba regresar al viejo sendero para escribir un texto que sí le fuese económicamente redituable. Hoy en día es prácticamente imposible hablar de infinitesimales sin que, de inmediato, la gente comente: “*Eso es análisis no-estándar, imposible de entender*”, y se cierran a la comunicación. Parece ser que el trabajo de Robinson terminó por funcionar en reversa, en lo que respecta al uso de los infinitesimales en la enseñanza del cálculo, al conseguir inyectarle renovados bríos al síndrome de Cantor.

4. Conclusión

Sabemos que actualmente reina, en casi todo el mundo, una reforma más, que parece propiciar un acercamiento denominado como intuitivo que está fuertemente respaldado con gigantescos libros de texto y poderosos programas de computadora. No queremos parecer catastrofistas, pero no resulta demasiado difícil imaginar la clase de síndrome que puede generarse. A la mejor sería más provechoso hacerle caso al profesor Andre Weil quien hace unos treinta años señalaba (véase Hairer & Wanner, 1995, p.1), en versión recargada de algo que ya había expresado Lagrange hace más de doscientos años:

“Estoy convencido de que nuestros estudiantes sacarían más provecho si estudiaran con el libro *Introductio in Analysin Infinitorum* de Euler en lugar de los textos modernos.”

Como ya dijimos, es muy claro que el análisis histórico, las investigaciones didácticas y los cambios curriculares nos están enseñando, de manera pertinaz, que llevamos la brújula que nos sirve de guía para entender el tema en cuestión, totalmente descompuesta, pero que, de manera igualmente pertinaz, estuviésemos decididos a no corregirla.

Nosotros estamos de acuerdo con Euler, Luzin, Poincaré, Thom, Weil, etc., principalmente con el espíritu de sus ideas, el cual está muy lejos de ser una amenaza como aparentemente proponen las ideologías dominantes de la docencia y de la “decencia” que imperan para la enseñanza del cálculo, casi desde los tiempos de George Berkeley, obispo de Cloyne.

Referencias

- Artigue, M.** (1998). *Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares?* Revista Latinoamericana Mat. Educ., Vol. I No.1.
- Bottazzini, U.** (1986). *The Higher Calculus: A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass*. Springer-Verlag; New York.

- Edwards, C.** (1979). *The Historical Developments of the Calculus*. Springer-Verlag: New York.
- Euler, L.** (1748/2000). *Introducción al Análisis de los Infinitos*. Versión al español editada por la Real Sociedad Matemática Española: Sevilla.
- Fauvel, J. & Gray, J.** (eds) (1987). *The History of Mathematics: A Reader*. MacMillan Education: London.
- Hairer, E. & Wanner, G.** (1995). *Analysis by its History*. Springer: New York.
- Howson, G.** (ed), (1973). *Developments in Mathematical Education*. Proceedings of the Second International Congress on Mathematical Education, Cambridge U. Press: Cambridge.
- Kline, M.** (1962). *Mathematics: A Cultural Approach*. Addison-Wesley: Reading, MA.
- Robinson, A.** (1996). *Non – standard Analysis*. North – Holland Pub. Co.
- Roh, K.H.** (2008). *Students' images and their understanding of definitions of the limit of a sequence*. Educational Studies in Mathematics **69**, 217-233.
- Young, R.** (1992). *Excursions in Calculus*. En la serie: Dolciani Mathematical Expositions 13, Mathematical Association of America; Washington, DC.

Carlos ÍMAZ JAHNKE
cimaz@cinvestav.mx

Luis Enrique MORENO ARMELLA
lmorenoarmella@gmail.com