suma+
Secciones
Julio 2019
91
pp. 97-104

Con un centímetro cuadrado

Miquel Albertí Palmer

Crónica de una clase no anunciada

El área de un rectángulo se obtiene multiplicando la base por la altura. La de un triángulo se obtiene del mismo modo, pero dividiendo el resultado por dos. Todo el mundo lo sabe. Se sabe qué calcular, pero en la inmensa mayoría de los casos no se sabe por qué. Otras fórmulas como las del perímetro y el área del círculo, si se recuerdan, suelen confundirse una con otra porque se confunden los significados de los términos perímetro y área. Significados que en su momento se creyeron en lugar de experimentarse, de vivirse suficientemente.

El recuerdo de algo creído sin análisis, sin reflexión, es el recuerdo de una obediencia, no el recuerdo de una vivencia. Y sin vivencia no se produce auténtico aprendizaje. Los recuerdos de creencias están asociados a la transmisión de conocimientos vividos por otros y no por uno mismo. Se trata de un falso aprendizaje, pues uno aprende verdaderamente lo que vive, no el dictado de lo vivido por otros. Ya se ha expuesto en esta sección lo difícil que resulta introducir razonamientos en hechos asimilados mediante creencias.

Volviendo a la cuestión de inicio, otras incomprensiones del área tienen que ver con interpretaciones visuales de relaciones espaciales no razonadas, como las ilustradas en la figura 1.

Artículo solicitado por *Suma* en marzo de 2019 y aceptado en abril de 2019

La primera resolución representa un cuadrado plausible de 6×6 celdas (cada una sería de 1 cm^2). En cambio, el cuadrado de la segunda resolución es de 5×5 celdas. En la primera se da por hecho que el rectángulo sombreado ocupa la tercera parte del cuadrado, como si fuese equivalente al rectángulo de 6×2 celdas. En la segunda se interpreta como la mitad. Pero en lugar de tomarlo de 5×2 celdas, se hace una interpretación libre y ajena al dibujo trazado, un error que conduce al mismo resultado que el obtenido en la otra resolución: 12 cm^2.

Se diría que en la primera resolución se ha considerado que las dos diagonales del rectángulo sombreado son de 2 cm de longitud, el mismo problema de interpretación visual tratado en el número anterior de esta sección. Así, el ancho de tres rectángulos es de 2×3 cm = 6 cm, el lado del cuadrado. En cambio, no se ha hecho lo mismo con el lado mayor del rectángulo sombreado, de cuatro tramos diagonales, sino que se le ha atribuido una longitud de 6 celdas para componer con dos gemelos el cuadrado de lado 6 cm.

Ambas soluciones ponen de manifiesto escasez de vivencias del mismo estilo: falta de interpretación visual objetiva (dibujo), de análisis visual para establecer relaciones espaciales, de cuantificación y comparación de magnitudes y de práctica con situaciones fácilmente representables. De ahí que me detuviese en estos aspectos llegado el momento de abordar cuestiones de cuantificación y medida espacial.

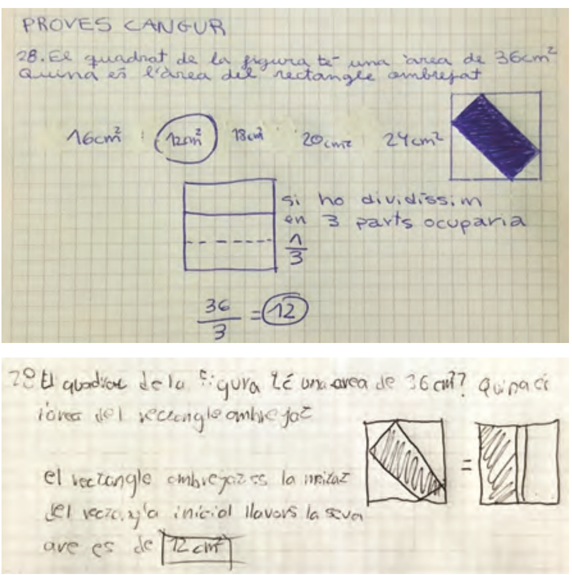

Figura 1. Dos soluciones a un problema de la *Prova Cangur* (2017): «El cuadrado de la figura tiene un área de 36 cm^2. ¿Cuál es el área del rectángulo sombreado?»

Un problema de área deriva en uno aritmético

La escasez de vivencia matemática del área también emerge en actividades como la siguiente, planteada a raíz de la pregunta «¿Dónde vivo y cómo lo expreso?» del proyecto L'INSiTU que se viene desarrollando desde hace algunos años en el INS Vallès de Sabadell. Las dificultades de aprendizaje afloraron en la actividad dedicada a representar la planta del aula de clase a escala haciendo corresponder cada celda de su cuaderno cuadriculado con una baldosa cuadrada del aula.

Una vez realizada dicha correspondencia el objetivo era averiguar, además del área del aula, la escala a la que se había hecho dicha representación. Como consecuencia de ello se pondría de manifiesto que la relación de escala hacía referencia a la longitud (E1:60) y no al área (E1:3600).

En el momento de realizar esta actividad llevaban ya ocho meses trabajando en hojas cuadriculadas sin que a nadie se le hubiese ocurrido medir la celda de su cuadrícula. Hacerlo resultaba esencial para establecer la relación entre la baldosa real (un cuadrado de 30 cm de lado) y la baldosa ficticia (celda cuadrada de 5 mm de lado).

Puesto que las paredes del aula no se levantaban del suelo justo en el borde de las baldosas, tampoco las representaciones en sus cuadernos coincidían con líneas de la cuadrícula. De ahí que fuese necesario determinar el área de partes de las celdas. Fue al calcular la unidad de área de su cuadrícula, el área de una celda, cuando surgió un problema. Tal y como se ha mencionado, la gran mayoría fueron capaces de calcular dicha área aplicando la fórmula aprendida (base por altura) y obteniendo 0,25 cm^2. Pero resultó evidente que no comprendían el significado de este resultado:

—Ell@s: ¡Pero 0,25 es más pequeño que 0,5!

—Profesor: ¿0,25 qué?

—Ell@s: Centímetros cuadrados.

—Profesor: Entonces no puedes comparar. Una cosa son cm y otra cm^2. Una cosa es longitud; y la otra, es área.

—Ell@s: Pero cuando multiplico 0,5 por 0,5 me da 0,25. ¡Y 0,25 es más pequeño que 0,5!

—Profesor: ¿Comprendéis qué significan esos 0,25 cm^2?

Nadie decía nada. Estaba claro que no se entendía el significado del cálculo realizado y que la sorpresa era que al multiplicar dos números el resultado fuese menor que cada uno de los factores. El problema del área había derivado en un problema aritmético. Con el fin de incitar su comprensión, les propuse dibujar 1 cm^2 en sus cuadernos cuadriculados.

Aparecieron más dificultades. Muchos necesitaron ayuda para ver incluso la solución más sencilla: trazar un cuadrado de lado 1 cm, es decir, una figura compuesta de $2\times2 = 4$ celdas. Cuando al fin se dieron cuenta de ello, se crearon multitud de sinapsis:

—Ell@s: Ah! Claro. Un centímetro cuadrado son cuatro cuadraditos y los 0,25 cm^2 son la cuarta parte del centímetro cuadrado, ya que 0,25=1/4: un cuarto de cuadradito.

Esa alumna acababa de darse cuenta de la relación ilustrada en la figura 2.

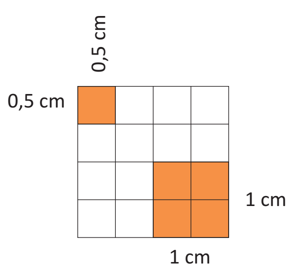

Figura 2. Una celda de la cuadrícula y su relación con un centímetro cuadrado

Y no solo eso. También se hacía claro por qué al multiplicar 0,5 por 0,5 el resultado era un número inferior:

—Ell@s: Sí, claro. Un cuarto es la mitad de un medio.

—Ell@s: Multiplicar por 0,5 es lo mismo que dividir por 2.

—Ell@s: Por eso 0,25, el cuarto, es más pequeño que 0,5, la mitad.

Llegados a este punto se había hecho evidente que para dibujar un centímetro cuadrado bastaba combinar cuatro celdas de la cuadrícula, cada una de ellas de un cuarto de centímetro cuadrado. También parecía bastante claro que el modo en que se combinasen esas cuatro celdas no importaba, pues la figura resultante continuaría teniendo 1 cm^2 de área. Un problema de área había derivado en uno aritmético. La comprensión se halló en ambos ámbitos, entre la relación espacial de área y la relación aritmética de equivalencia entre una fracción y su expresión decimal.

Algunos se arriesgaron a dibujar figuras de un centímetro cuadrado entre las que aparecieron casillas partidas por la mitad mediante el trazo de sus diagonales (el diálogo y las reflexiones asociadas habían inspirado la creatividad). Para que todos trabajasen sobre la cuestión y aprendiesen que cambiando la forma puede conservarse el área de una figura les encargué un pequeño trabajo titulado «1 cm^2: diferentes maneras de verlo» (figura 3). Consistiría en que cada uno aportase diferentes figuras de área un centímetro cuadrado con las que conformaríamos un póster con las 23 escogidas por ellos y que considerasen más representativas.

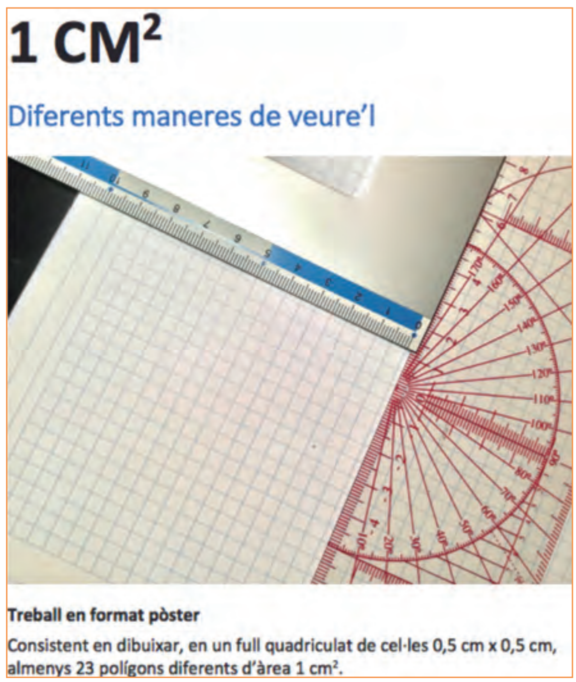

Figura 3. Portada del trabajo sobre diferentes modos de ver un centímetro cuadrado

Algunas personas que solían obtener buenas calificaciones fueron menos creativos. No es raro que cuando se libera a una persona de la obediencia y la reproducción de patrones muestre dificultades para ampliar su horizonte y se sienta un tanto bloqueada ante el vasto campo de libertad que se le ofrece. Pese a ello, la riqueza de sus producciones superó mis expectativas. Tanto, que no pude evitar dedicar más tiempo al análisis de la diversidad de figuras de 1 cm^2. La figura 4 recoge los 23 centímetros cuadrados seleccionados.

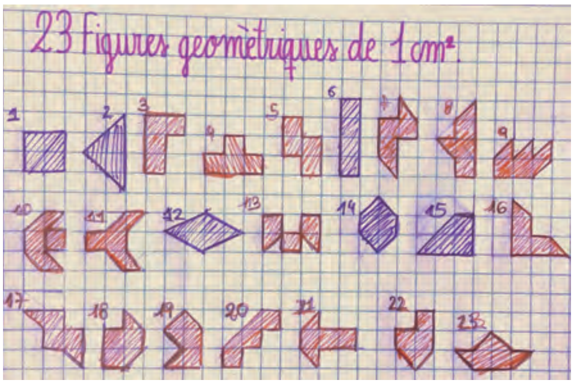

Figura 4. Veintitrés centímetros cuadrados

Un par de alumnos se dieron cuenta de que las cinco figuras del Tetris, compuestas todas por cuatro cuadraditos, tendrían un centímetro cuadrado de área y las dibujaron (figura 5).

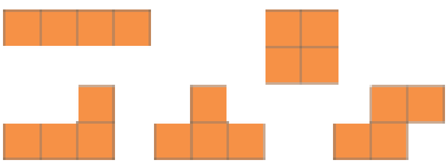

Figura 5. Los cinco tetraminós del Tetris

Un nuevo diálogo en la clase fue incitado por la pregunta:

—Profesor: ¿Pueden hacerse más figuras como las del Tetris enganchando cuatro celdas?

La imposibilidad se hizo evidente tras una sucesión de pruebas en las que se acordó que el cambio de posición entre una figura y una copia suya no las hacía diferentes, sino que lo que determinaba su naturaleza era el número de casillas adosadas (cuatro, en este caso) y el modo en que se componían.

En pleno proceso observé a alguien dibujando una figura significativamente distinta de las compuestas hasta ese momento (figura 6). Le pregunté si podría reproducirla en la pizarra para que el resto de la clase pudiese verla. Y lo hizo.

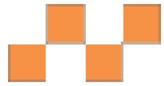

Figura 6. Un centímetro cuadrado distinto

A la vista de todo el mundo, se incitó un nuevo diálogo:

—Ell@s: ¡Esta no vale!
—Profesor: ¿Por qué no?
—Ell@s: No está enganchada.
—Ell@s: Los cuadrados no se tocan.
—Profesor: ¿No? Recordad lo que dijimos sobre las encrucijadas urbanas. ¿Cómo se formaban?

En este punto, y desde la perspectiva del proyecto L'INSiTU, el profesor no debería haber intervenido y limitar su labor a tan solo guiar el diálogo. Pero a menudo la emoción del descubrimiento y el ansia de comunicarlo provoca incontinencia verbal. No podemos permanecer callados. Lo mismo le ocurre al alumnado cuando ven una idea muy clara y no pueden evitar levantar la mano y agitarla sin cesar solicitando intervenir.

—Ell@s: Era donde se cruzaban dos calles.
—Profesor: Eso es. Ahora imaginad dos rectas (las tracé en la pizarra). ¿Qué tienen en común esas dos rectas?
—Ell@s: El ángulo.
—Profesor: Sí. El ángulo que forman. Pero, ¿tienen algo más en común?
—Ell@s: Sí. Ahí donde se cruzan.
—Profesor: ¿Por qué?
—Ell@s: Porque está en las dos rectas.
—Ell@s: Ah, sí. Se tocan en la punta.
—Profesor: ¿Qué se tocan en la punta?
—Ell@s: Los cuadraditos.
—Profesor: ¿Qué cuadraditos?
—Ell@s: Los dibujados. Los cuatro se tocan por las puntas.
—Profesor: ¿Y qué es la punta?
—Ell@s: En la punta se cortan los lados.
—Ell@s: La punta también es una encrucijada, la de los lados.
—Ell@s: Es el punto de intersección.
—Profesor: Entonces, ¿la figura está enganchada o no lo está?
—Ell@s: Sí, lo está, pero de modo distinto.

—Ell@s: Está enganchada por un punto; las otras, por una línea.

—Profesor: Exacto. La conexión no es igual, pero continua habiéndola.

En este fragmento reflexivo y dialogado el profesor intervino menos, pero debería haberse contenido más aún, hasta cuando no quedase más remedio o el bloqueo de ideas impidiese el avance argumentativo. A continuación, planteé una reflexión sobre las figuras del Tetris:

—Profesor: ¿Qué figura del Tetris diríais que es la que está más enganchada?

—Ell@s: El cuadrado.

—Profesor: ¿Por qué la consideráis más enganchada que las demás?

No sabían qué decir. Les dije que quizá percibamos el cuadrado del Tetris como más enganchado que las demás figuras porque está más apelotonado. Pero eso no les ayudó. Les propuse contar el número de lados compartidos en cada una de las cinco figuras. Todas tienen 3, excepto el cuadrado, que tiene 4. Y repetí la pregunta:

—Profesor: Entonces, ¿cuál diríais que es la figura más enganchada y por qué?

—Ell@s: ¡El cuadrado! Tiene 4 lados comunes.

Habíamos encontrado un criterio numérico y objetivo de cuantificar la conexión. Se había establecido un grado de conectividad entre las figuras del Tetris. Lejos de ser definitivo, lo relevante del proceso es que dicho grado de conectividad de una figura se supedita a una cuestión geométrica, cuantificada y objetiva, dejando de ser una opinión al obedecer un criterio razonado. Entonces les propuse diseñar otras figuras unidas por los vértices. Su creatividad no se redujo a ello, también compusieron centímetros cuadrados agujereados como algunos que pueden verse en la figura 10.

Ser o parecer: he ahí el dilema

Alguien planteó una nueva cuestión. Aunque se había dicho que la posición no cambiaba la naturaleza de las figuras del Tetris, una persona consideraba como figuras distintas un cuadrado posicionado sobre uno de sus lados y el mismo cuadrado posicionado sobre uno de sus vértices. Su argumento era que si veía las figuras distintas, estas debían serlo. Según esa persona, la figura 7 mostraría un cuadrado y otra figura que no lo es.

Figura 7. Dos figuras... ¿iguales?

La discusión, extensa e intensa, resultaba relevante porque subyace en la consideración mayoritaria de que los rombos siempre descansan sobre uno de sus vértices, por lo que la interpretación de su naturaleza suele derivarse a partir de la forma y posición en lugar de la medida de sus lados y ángulos. Prueba de ello es que nadie declarará como rombo el cuadrilátero de la izquierda de la figura 7. La intransigencia de dicha perspectiva generó tensiones que se zanjaron cuando otro alumno replicó al que la mantenía:

—Ell@s: Si me miras sigo siendo yo mismo aunque me veas de frente, de espaldas o de lado, ¿a que sí?

Esa contribución resultó crucial para comprender un aspecto que trasciende el de la medida como es la diferencia entre ser y la percepción del ser. Entonces volvimos a los cuadrados de la figura 7:

—Ell@s: Son la misma figura, pero hay que girar 45° para que se vean iguales.

—Profesor: Girar sí, pero ¿dónde y hacia dónde?

—Ell@s: En el centro del cuadrado.

—Profesor: ¿Y dónde está el centro del cuadrado?

—Ell@s: En las diagonales. Dibujas las diagonales y lo tienes.

—Ell@s: Uno está de punta y el otro plano. Girando uno tienes el otro.

—Profesor: ¿Qué quieres decir con plano?

—Ell@s: Plano, sobre el suelo.

—Ell@s: En la pizarra no hay suelo.

—Ell@s: Sí, la base de la pizarra. El otro está de punta encima de ella.

—Profesor: ¿Qué relación tiene el lado del cuadrado con la base de la pizarra?

—Ell@s: Paralelos, tiene el lado paralelo. Y el de punta... no.

—Profesor: El que está de punta, ¿no tiene nada en común con la pizarra?

—Ell@s: No, ningún lado. Todos forman ángulos.

—Profesor: ¿Qué ángulos?

—Ell@s: Esos de 45°.

—Profesor: Y si trazamos las diagonales, ¿qué pasa con el que está de punta?

—Ell@s: Hay una vertical y otra horizontal.

—Profesor: ¿Y geométricamente?

—Ell@s: Una es paralela al suelo.

—Ell@s: A la base de la pizarra.

—Ell@s: ¡Claro! Un cuadrado tiene los lados paralelos a la pizarra. El otro, tiene las diagonales paralelas a la pizarra.

—Profesor: Ahí lo tenéis. Necesitamos un referente. En este caso, la base y los lados de la pizarra.

La figura 8 ilustra y resume este diálogo en el que se destaca la relación entre las diferentes posiciones de dos figuras iguales:

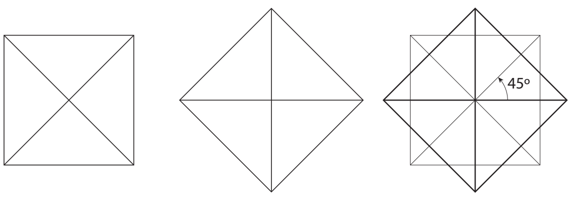

Figura 8. Dos cuadrados iguales aparentemente distintos

Simetría y belleza

La discusión sobre la percepción me llevó a preguntar qué figura consideraban más hermosa, la superior o la inferior de la figura 9, que alguien había dibujado (también con área de un centímetro cuadrado). Su respuesta respondió a mis expectativas: todos estuvieron de acuerdo que el centímetro cuadrado simétrico era más bello que el asimétrico, si bien solamente una persona adujo el término simetría como justificación.

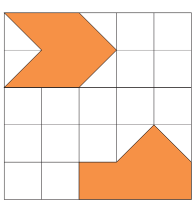

Figura 9. El cm^2 simétrico fue considerado más hermoso que el asimétrico

El análisis desarrollado sirvió para clasificar las figuras compuestas de cuatro celdas (1 cm^2). Se agruparon centímetros cuadrados (figura 10) según criterios diversos.

Esa labor estaba asociada a una cuestión crucial del aprendizaje matemático como es la descomposición de una figura en otras más simples o su complementación con otras sencillas para completar un todo mayor de área más fácil de obtener, lo que nos devuelve al inicio de este artículo. Sin duda, demuestra mayor competencia matemática quien es capaz de relacionar el área de una figura compleja con la suma de las áreas de sus partes más sencillas o como parte de un todo mayor que ella. Así se justificaron las áreas de los dos triángulos en la línea inferior de la figura 10:

—Ell@s: El área es de 1 cm^2 porque la figura es la mitad de 8 cuadraditos.

—Ell@s: El área es de 1 cm^2 porque la figura es la mitad de un 4×2.

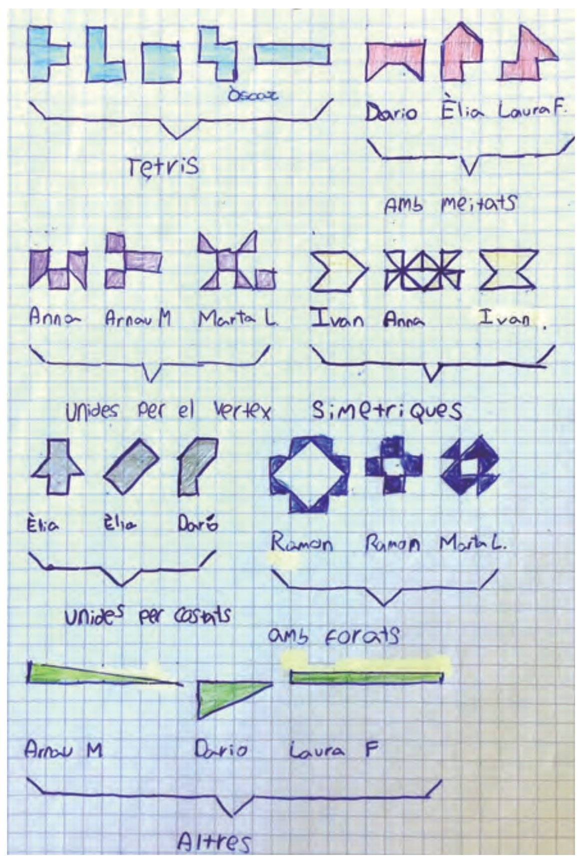

Figura 10. Clasificación de otros 23 centímetros cuadrados según diversos criterios

Conclusiones

Derribando paradigmas

El proceso seguido a través de varios diálogos y de la experimentación en el aula sobre las diferentes formas de representación de un centímetro cuadrado se resume en la tabla 1.

Como suele ocurrir en matemáticas, todo empieza dando por sentado un paradigma tácito que nadie ha explicitado ni discutido. Cuando alguien más creativo realiza una aportación que trasciende dicho paradigma el resto se da cuenta de que se habían asumido unos límites que no habían sido impuestos. Así se pasó de dibujar celdas enteras a fraccionadas, de conectarlas por los lados a conectarlas por los vértices y a trazar centímetros cuadrados con agujeros.

Dichas consideraciones van mucho más allá de la pretensión inicial consistente en representar un centímetro cuadrado para que el alumnado se diese cuenta de que con diferentes formas puede conservarse el área. Esa fue la principal conclusión matemática. Pero como se ha apreciado, esta no se deriva de modo aislado de toda una serie de consideraciones más propias del ámbito social y vinculadas a un aspecto primordial de la geometría como es la percepción. Debería ser natural que al tratar problemas de geometría se pusiese en cuestión la diferencia entre ser y parecer, entre lo que es una cosa y el modo en que la vemos. El pensamiento matemático contribuye, si no a dilucidar definitivamente esa dicotomía, por lo menos a proporcionar referentes objetivos (cuantificados) para aclararla en casos elementales como son los relativos a figuras geométricas.

Geometría de la percepción visual

¿Por qué percibimos de forma diferente el punto de la esquina de un cuadrado de un punto intermedio en cualquiera de uno de sus lados? La esquina, el vértice, es, de hecho, la intersección de dos líneas o, visto de otro modo, donde se produce un cambio de dirección en la línea que conforma el perfil del cuadrado: un ángulo. En un punto intermedio del lado no existe cambio de dirección ni intersección alguna que permita distinguirlo de sus vecinos. El punto intermedio de un segmento no provoca un estímulo visual como el de un punto extremo o vértice.

Que la esquina nos parezca más o menos puntiaguda depende precisamente de la medida del ángulo (figura 11). Cuanto más agudo, más puntiaguda vemos la esquina, llegando a convertirse en el extremo de un segmento cuando su ángulo es nulo (0°). Cuanto más obtuso, menos

Tipología de la figura	Consideración social
Compuesta por celdas enteras	Paradigma asumido tácitamente
Compuesta por secciones de celdas	Ampliación del paradigma
Conexa por los lados	Paradigma asumido tácitamente
Conexa por los vértices	Invalidada al principio (no afín al paradigma)
Agujereada	Invalidada al principio (no afín al paradigma)
Simétrica	Hermosa
Asimétrica	No hermosa

Tabla 1. Consideración social de diversos centímetros cuadrados

Figura 11. El vértice de un ángulo se distingue claramente de sus vecinos cuando es agudo, mucho menos cuando es obtuso y acaba por confundirse con ellos cuando se hace llano

puntiaguda la esquina. Incluso llega a desaparecer cuando el ángulo se hace llano (180°) y la esquina se ha abierto en un segmento.

La objetividad y cuantificación matemáticas sirvieron para atribuir causas a la percepción visual. Es decir, para establecer justificaciones geométricas objetivas de los motivos que nos llevan a relacionar los elementos figurativos que observamos visualmente.

Habilidades de pensamiento

Aprender a pensar con objetividad es basar los razonamientos en las llamadas habilidades de pensamiento. Estas se clasifican en cuatro grandes grupos (GrupIREF, 2012):

— Habilidades de investigación: formular hipótesis, averiguar, observar, buscar alternativas, anticipar consecuencias, seleccionar posibilidades, imaginar.

— Habilidades de conceptualización y análisis: formular conceptos precisos, poner ejemplos y contraejemplos, hallar semejanzas y diferencias, comparar y contrastar, definir, agrupar y clasificar, ordenar.

— Habilidades de razonamiento: buscar y ofrecer razones, hacer inferencias, razonar condicionalmente, establecer relaciones de causa y efecto, establecer relaciones entre las partes y la totalidad, entre los fines y los medios.

— Habilidades de comunicación, traducción y formulación: narrar y describir, interpretar, improvisar, traducir de un lenguaje a otro, resumir.

Tras lo expuesto se habrá hecho claro que muchas de esas habilidades de pensamiento se llevaron a cabo en esa clase no anunciada de matemáticas y que un enfoque constructivista del aprendizaje ayuda al alumnado a aprender a pensar. Es más, resulta fácil asociar todas esas habilidades con clases de matemáticas que fomenten la construcción de aprendizaje matemático y el desarrollo de sus competencias. Por tanto, somos educadores de una materia que de modo natural está inmersa en aquellos proyectos cuya base sea el pensamiento razonado como es el del proyecto de Filosofia 3/18 que el GrupIREF está impulsando en muchos centros de primaria y algunos de secundaria en Cataluña.

El cambio de representación es una estrategia doble de aprendizaje matemático (CBAM 7). Por una parte, media en la comprensión. Por otra, incita la creatividad. De ambas surge el aprendizaje. La dificultad de comprensión de que el producto de un número por un decimal entre cero y uno dé como resultado un número inferior a este se disipan al interpretar ese decimal menor que la unidad como fracción, lo que exige un cambio de representación. Así uno da significado a un resultado de entrada incognoscible, es decir, aprende. El cambio de representación espacial de un mismo centímetro cuadrado, provoca la creación de múltiples conexiones e incita la observación y análisis de propiedades insólitas como fueron las figuras del Tetris, el establecimiento de nuevas relaciones espaciales, las figuras agujereadas y los diferentes grados de conectividad.

Toda esa riqueza de aprendizaje constructivista se debió, sobre todo, al modo en que fue gestionada en el aula. Ahí fue crucial la incitación al diálogo filosófico. Parafraseando a Lipman (2016) podemos resumir esa clase no anunciada expresando que el aprendizaje se produjo en un entorno en el que no se enseña al alumnado qué decir, sino que se propicia un entorno de situaciones en las que el alumnado siente la importancia de intervenir y decir lo que quiere decir.

Referencias bibliográficas

Lipman, M. (2016), *El lugar del pensamiento en la educación*, Octaedro editorial.

GrupIREF (2012), *Filosofía 3/18*, versión catalana de *Philosophy for Children*.

Miquel Albertí Palmer
INS Vallès (Sabadell)
<alberti.miquel@gmail.com>