Creencias y conocimientos acerca de precálculo y cálculo de un grupo de profesores de bachillerato

Ma. del Rocío Nava Álvarez & Apolinar Reyes Gutiérrez[1]
Instituto Superior de Ciencias de la Educación del Estado de México (ISCEEM)
México

Resumen. En este artículo se analizan las creencias y conocimientos que tiene un grupo de profesores de bachillerato, acerca de algunos contenidos de precálculo y cálculo. Se trata de un estudio de casos en el que participaron veinte profesores a los que se aplicó un cuestionario sobre funciones y límites, para analizar algunas de sus creencias y conocimientos respecto a diferentes temas matemáticos que intervienen en la solución de los ejercicios planteados. Los resultados muestran que casi todos los profesores participantes presentan algunas creencias que pueden estar obstaculizando el aprendizaje del cálculo.

1. Introducción

Partiendo de la premisa de que las creencias y conocimientos de los docentes influyen de manera definitiva en la formación del estudiante (Schoenfeld, 1992; Thompson, 1984; Pajares, 1992; Cooney, 1980; Villoro, 1982; Lesh y Landau, 1983; Tobin y Espinet, 1989; Mercado, 1988), y que los estudiantes tienen la convicción que "reprueban matemáticas por la forma en que el profesor las imparte" (Flores, 1988. p.16), podemos asegurar que el papel del docente es fundamental para que el alumno aprenda matemáticas.

De ahí, que se considera que saber un poco más sobre los conocimientos y creencias de los docentes de matemáticas del bachillerato propedéutico estatal, permite aproximarnos a entender algunas de las causas que obstaculizan el aprendizaje en matemáticas, y por tanto, desarrollar acciones que coadyuven en la solución de esta problemática.

Los resultados obtenidos en el estudio realizado dejan ver como las creencias y conocimientos de los profesores en muchos casos manifiestan errores que seguramente han ido transmitiendo al estudiante y que no han sido modificados, aún cuando algunos de ellos se derivan de conocimientos que adquirieren desde la primaria. Así, por ejemplo encontramos que hay profesores que al dividir entre cero, dan como resultado cero y algunos otros no saben que el cuadrado es un rectángulo.

Con la finalidad de mostrar la realidad del profesor frente a grupo, a partir de sus creencias y conocimientos de algunos contenidos de precálculo y cálculo se realizó un estudio con veinte profesores de matemáticas que laboran en el nivel medio superior, en Escuelas Preparatorias Oficiales del Estado de México (EPOEM). Los resultados de este estudio los presentamos con la intención de contribuir a las investigaciones realizadas por la comunidad científica a lo largo de los últimos años en torno a ciertos aspectos de la enseñanza del cálculo diferencial e integral en el nivel medio superior.

[1] Investigadores Educativos del Instituto Superior de Ciencias de la Educación del Estado de México. ISCEEM.

2. Antecedentes

2.1 El conocimiento del profesor

Sin duda alguna, para que realmente haya una transformación en la educación, el profesor (como agente de cambio en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas), es un elemento que debe considerarse en cualquier reforma o cambio educativo. La preparación del profesor debe ser una de las principales preocupaciones de autoridades, y educadores, dedicándole un espacio considerable de tiempo a la discusión sobre "qué competencias debe poseer el profesor para adecuarse a los procesos reformistas de la enseñanza de la matemática y de qué forma proyecta su accionar en el salón de clase" (Ibid, p.8). Consideramos que una de las competencias que debe tener el profesor de matemáticas, es el conocimiento del contenido de la materia.

Si bien, son las instituciones las que determinan los planes y programas de estudio, es de acuerdo con la visión de los docentes como se imparten los cursos de matemáticas, como afirma Lerman (1983), "el profesor es el elemento clave en el aprendizaje matemático de los estudiantes" (p.37), las creencias y conocimientos de los profesores repercuten en forma directa en la enseñanza.

Hay muchos factores que influyen de alguna manera en el aprendizaje de las matemáticas, pero al igual que Pajares (1992), se considera que las creencias y conocimientos que tiene el docente, inciden en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática, y consecuentemente en la formación de los estudiantes. El estudio de las creencias de los profesores en la enseñanza de las matemáticas es relativamente reciente, pero ha sido motivo de estudio de numerosos investigadores (Ibid, p. 47).

Además como señala Ruth Mercado (1988), los problemas ubicados aparentemente en las estrategias de enseñanza, casi siempre remiten al dominio del contenido en sí, más que a las formas de enseñarlo. Quiroz (citado en Mercado, 1988), por su parte, encuentra evidencias en trabajos con maestros en relación con los contenidos, que llevan a pensar que "antes que el problema didáctico está el dominio del contenido y antes que éste, el significado que el mismo pueda tener para los sujetos" (p.98).

Por su parte, Tobin y Espinet (1989) en base a su investigación afirman: la falta del conocimiento de la materia a impartir constituye la principal dificultad para que los profesores se impliquen en actividades innovadoras; esto se complementa considerando que un buen conocimiento de la materia para un docente supone también, entre otros aspectos:

- Estar al corriente de la historia de las ciencias, no sólo como cultura científica general, sino, como una forma de asociar los conocimientos científicos con los problemas que originaron su construcción. Así se pueden comprender también cuáles fueron las dificultades y los obstáculos epistemológicos que hubo que superar, lo que constituye una ayuda imprescindible para entender las dificultades de los estudiantes.
- Ser consciente de las estrategias empleadas en la construcción de los conocimientos.
- Conocer las interacciones Ciencia, Tecnología y Sociedad asociadas a la construcción de saberes.
- Tener algún conocimiento de los desarrollos científicos recientes y sus perspectivas.
- Adquirir conocimientos de otras disciplinas relacionadas.

Estos autores nos llevan a confirmar nuestro supuesto empírico de que las creencias y conocimientos del docente influyen de manera directa en el aprendizaje del estudiante, sin embargo, en este trabajo no pretendemos demostrarlo, sino partir de él para mostrar la importancia que tiene el estudio de las creencias y conocimientos del docente dentro de la educación en general y en particular en la educación matemática.

2.2 El estudio del cálculo diferencial e integral

En el último siglo, el cálculo aunado a la computación ha permitido al ser humano realizar investigaciones tan importantes, como el análisis de tumores cancerosos. Gracias al desarrollo de nuevos aparatos como los tomógrafos o la resonancia magnética, los médicos y científicos pueden tener una mejor apreciación de las enfermedades que aquejan al ser humano y con esto pueden hacer un diagnóstico más objetivo y elegir el tratamiento adecuado.

Sin embargo, a pesar de su importancia, esta rama de las matemáticas ha tenido grandes dificultades en la enseñanza y el aprendizaje. Ello ha motivado que durante los últimos años se haya venido realizando cierta reflexión, en torno a las posibles dificultades propias en la enseñanza del cálculo (Alanís, 1987).

Son diversos los enfoques desde los cuales hoy en día se investiga la problemática de la enseñanza masiva del cálculo, según se constata por distintas reuniones académicas de especialistas interesados en dicha problemática y la creciente cantidad de estudios que se presentan en diferentes publicaciones especializadas en la enseñanza de las matemáticas. Por ejemplo, en octubre de 1987 se llevó a cabo en Estados Unidos de Norteamérica el coloquio "Calculus for a new Century", en el que participaron más de seiscientos profesionistas involucrados en la enseñanza del cálculo, e interesados en las reformas educativas (Bravo, A. y Cantoral, R. 1993, p.16).

En México, destacó el área de Cálculo-Análisis en el segundo simposio internacional sobre Investigación en Educación Matemática, celebrado en Cuernavaca Morelos; en julio de 1990 (Ibid, p. 21). En esta área participaron distinguidos especialistas en la investigación de la enseñanza del cálculo, de distintas nacionalidades, presentando los resultados más recientes que se han obtenido en este campo; otros expositores nacionales presentaron los avances de sus trabajos de tesis de maestría o doctorado, así como otros proyectos de investigación sobre los problemas de la enseñanza del cálculo.

En este marco, la preocupación por este tema, nos ha llevado a realizar diferentes trabajos, desde cursos de capacitación y actualización con los docentes, diplomados y una serie de estudios que nos han llevado a suponer que uno de los factores que influye de manera determinante en el estudiante, son los antecedentes matemáticos con que cuenta al llegar al curso de cálculo y de igual manera los conocimientos y creencias del profesor que le imparte la materia.

2.3. Las funciones y límites.

Los conceptos de función y de límite son centrales para el desarrollo del pensamiento matemático avanzado (Hitt, 1996), por ello es necesario que el alumno domine estos conceptos, antes de iniciar el estudio del cálculo.

El concepto de función se considera como uno de los más importantes en la matemática y también fuera de ella. Debido a que las funciones intervienen en numerosos procesos de la naturaleza y además de que todo profesionista que hace uso de la matemática, considera representaciones técnicas y científicas en términos matemáticos, por ende, es necesario estudiar las formas que permitan expresar las relaciones entre las magnitudes de un fenómeno. Debido a su importancia el tema de funciones es tema obligado en casi todo el currículo escolar, desde los niveles elementales hasta la educación superior. Por ello no es sorprendente que los estándares y principios para la escuela en matemáticas, abogue porque los programas desde pre-kindergarden hasta el grado 12, habilite a los estudiantes en la comprensión de modelos, relaciones y funciones (NCTM, 2000, p. 296).

Del mismo modo, el concepto de límite se presenta en muy diferentes conceptos, como el límite de series, la noción de continuidad, la derivada y la integración, por lo que aun cuando es complejo el alumno lo deberá manejar al menos de manera intuitiva.

A pesar de la importancia de estos conceptos, se ha mostrado en diferentes trabajos que los estudiantes de casi todos los niveles tienen problemas con la comprensión de estos, Pero esto no debería ser sorprendente, ya que la evolución histórica de los conceptos de función y límite, nos muestra las dificultades y problemas por las que tuvieron que pasar los grandes matemáticos para arribar a ellos, y por supuesto, esto nos sugiere que no debe ser fácil para los estudiantes, comprender este concepto. Así, "las diversas investigaciones en educación matemática relacionadas con el concepto de función, nos reportan serias dificultades de comprensión, y errores conceptuales tanto de estudiantes como de profesores" (Cuevas & Díaz, 2002, p.1).

Dado que estos conceptos son fundamentales, para el estudio del cálculo, son la base de los cuestionarios realizados a los profesores en este estudio.

2.4. El precálculo, los cursos que anteceden al cálculo

Se considera que muchos de los problemas que se tienen en la enseñanza y el aprendizaje del cálculo diferencial e integral se originan por la falta de conocimientos, y creencias erróneas que se tienen antes de iniciar el estudio del cálculo. Dentro de éste ámbito se han realizado algunas investigaciones en donde se han encontrado que los estudiantes no tienen dominio de los conceptos del precálculo, ni los pueden utilizar con fluidez; más aún, se han detectado serias deficiencias con respecto a éstos (Ferrini-Mundy y Graham., 1994; Llorens, 1999, Hitt, 2000).

Hitt (2000) advierte que los problemas ocasionados por una concepción pobre del "precálculo" (en varios países existen cursos y libros sobre este tema), que consiste fundamentalmente en un "análisis del comportamiento de las funciones excluyendo los procesos infinitos, se agrandarán a medida que se avanza en el aprendizaje del cálculo" (p.23). Esto significa, que los estudiantes con un mal aprendizaje del precálculo, tendrán por consecuencia problemas en los cursos de cálculo.

Al llegar a los últimos semestres de bachillerato, el alumno deberá cursar cálculo diferencial e Integral. En un gran número de casos, en estos cursos el profesor se dedica a desarrollar junto con el estudiante algoritmos y, mecanizarlos. Sin embargo aun en este caso, el estudiante tiene fuertes dificultades, ya que el no contar con los conocimientos y tener creencias erróneas en aritmética, algebra, geometría, trigonometría y en general en toda la matemática anterior al cálculo, estos se convierten en un obstáculo para poder al menos aproximarse a los algoritmos empleados.

Aunada a la problemática del estudiante, en muchos casos el profesor también se encuentra en la misma situación, por lo cual difícilmente podrá conducir al estudiante a un verdadero aprendizaje del cálculo. Y sus conocimientos y creencias obstaculizarán el logro de los objetivos planteados en su enseñanza.

3. Marco Teórico

3.1 Creencias de los maestros

Schoenfeld (1992), al referirse a las creencias de los maestros, indica que las estructuras de creencias son importantes no sólo para los estudiantes, sino, también para los maestros. Simplemente, "el sentido de un maestro sobre la matemática, determina el ambiente que crea el maestro en el salón de clase. Este ambiente, recíprocamente, da forma a las creencias de los estudiantes acerca de la naturaleza de la matemática" (p.67).

Al respecto Cooney (1985) discutió el comportamiento en el salón de clase de un maestro, quien profesaba una creencia en la "resolución de problemas". El maestro consideró que planteando problemas "divertidos" o "no estándar", estaba, además de llevar a cabo una experiencia recreativa y motivadora, cumplía con los objetivos relacionados con el logro en los estudiantes de eficiencia en el manejo de los contenidos. No obstante, bajo las presiones para cubrir contenidos, el maestro sacrificó los propósitos de resolución de problemas por metas más inmediatas relativas a "entrenar" a los estudiantes en el manejo de ciertos temas (p. 56).

Pajares (1992) analiza las razones para creer. Indica que "toda creencia tiene necesariamente antecedentes biográficos, puesto que forma parte de una estructura psíquica y cumple una función en ella, puesto que consiste justamente en tener por existente al objeto de la creencia. La creencia dispone a los sujetos a responder de cierta forma ante lo que se le presenta" (p. 56). Para este autor, la creencia es un estado disposicional; una vez adquirida, permanece en el sujeto, en forma consciente o latente. Justificar, en cambio, es una actividad, un proceso que acontece en un lapso de tiempo determinado. Al justificar se realiza una operación mental por la que se infiere una proposición de otra, al hacerlo, damos razón a la creencia. Justificar supone una actividad reflexiva, en contraste hay creencias que aceptamos espontáneamente, sin ofrecer razones que las justifiquen.

En esta perspectiva se acepta que se pueden ofrecer razones de muchas creencias, es decir, aceptarlas por otras de las que sí damos razones. Cualquier creencia supone, en efecto, una consecuencia de otras creencias. Es posible entonces sostener muchas creencias en las que nunca se ha reflexionado.

Thompson (1982) establece los siguientes rasgos característicos de las creencias:

- Pueden sostenerse con diferentes grados de convicción
- No son consensuales
- Semánticamente, la creencia trae consigo una connotación de disputabilidad
- Las creencias son independientes de su validez.
- Las creencias se sostienen o justifican por razones que no se apoyan en procedimientos de evaluación y juicio relativos a su validez (pp. 54-63).

En este trabajo, los autores consideran a las creencias como:

- Saberes que tiene una persona o un grupo de personas, son el resultado de la historia personal, cuyos procesos inconscientes del pensamiento, causan un conjunto coherente de respuestas; pero estos saberes no han sido validados por una comunidad especialista en el área (comunidad científica),

3.2 El conocimiento

Respecto al conocimiento profesional del profesor o, más precisamente conocimiento del contenido pedagógico, como lo denominan An, s.; Kulm, G.; Wu, Z. (2004) es un conocimiento que incluye tres componentes: “conocimiento del contenido, conocimiento del currículum y el conocimiento de la enseñanza. El conocimiento del contenido consiste en un amplio conocimiento matemático, tan bueno como el del contenido matemático específico del grado o nivel en el que se está enseñando” (pp.146-147).

En este trabajo tendremos en mente la acepción de conocimiento del contenido como aquellos saberes que han sido evaluados, juzgados, y aceptados por un grupo de expertos en el área (comunidad científica). El conocimiento tiene criterios que involucran patrones de evidencia.

En base a lo anterior podemos hacer algunas precisiones para no confundir entre creencias y conocimientos.

- Desde el punto de vista epistemológico, el conocimiento posee la característica de tener acuerdos generales respecto a los procedimientos para evaluar su validez. Mientras el conocimiento tiene criterios que involucran patrones de evidencia, las creencias siempre se adoptan o se justifican mediante razones, las cuales no tienen nada que ver con los criterios de evidencia; esas razones son caracterizadas por la ausencia de acuerdos sobre cómo evaluarlos o juzgarlos.
- Debe tenerse presente que el conocimiento tiene cierta relatividad, característica que le permite cambiar, pero que estos cambios obedecen al reemplazo de las teorías existentes por otras nuevas. En este caso el conocimiento relativo a una época pasada se convierte en una creencia. El caso contrario también es posible, es decir, una creencia con el tiempo y el avance de las teorías, evoluciona hasta adquirir status de conocimiento, esto mediante un proceso de validación y comprobación.

Podemos decir que una creencia puede llegar a ser un conocimiento, o que un conocimiento después de algún tiempo pase a ser una creencia. De tal forma que todo conocimiento es una creencia pero no toda creencia es conocimiento, ya que existen muchas creencias que son erróneas.

4. Metodología de la Investigación

En este trabajo realizamos un **estudio de caso**, el caso que nos refiere corresponde al trabajo realizado con un grupo de docentes que laboran en el nivel medio superior, todos ellos maestros frente a grupo.

En base a un cuestionario que fue aplicado a los profesores, empleando metodología cualitativa, hacemos el análisis de las creencias que tienen los maestros acerca del contenido de precálculo, que es la parte sustancial del trabajo, también hacemos uso del método cuantitativo sólo para señalar los conocimientos del contenido que tienen los docentes en este estudio.

4.1 El cuestionario

El cuestionario contempla dos situaciones, por un lado, una parte referencial del docente, en donde se les solicita información relacionada con su grado máximo de estudios, su especialidad, años de servicio y asignaturas que imparte; y por otro, la parte medular del cuestionario que contiene las ocho preguntas, en esta parte se les pidió resolver los ejercicios en forma individual, todas las preguntas están relacionadas con los temas de funciones y límites.

Aun cuando los ejercicios están basados en estos dos temas, podemos darnos cuenta del conocimiento que tienen los maestros acerca de la aritmética en sus operaciones básicas, así como el conocimiento de sucesiones y series. Del dominio que tienen en álgebra en algunas operaciones como productos notables, factorización, reducción de expresiones algebraicas, el conocimiento de funciones, tabulación y gráficas, entre otros temas algebraicos; así también en el conocimiento que tienen de trigonometría, en identidades trigonométricas, y el conocimiento que tienen de la geometría plana en congruencia y semejanza de triángulos y el uso adecuado del plano cartesiano. Además de que todas las preguntas están diseñadas para aportarnos algunos conocimientos de precálculo y cálculo, también se cuidó que existieran diferentes procesos para resolver el ejercicio.

Para la solución de los ejercicios que contempla el cuestionario, el tiempo fue libre, es decir cada profesor dispuso del tiempo que consideró necesario para poder resolverlo, los maestros entregaron el instrumento anexando sus procesos en hojas blancas, el tiempo mínimo fue de una hora y media, y el último maestro lo entregó en dos horas.

Las preguntas que conforman el cuestionario, son las siguientes:

GRADO MÁXIMO DE ESTUDIOS:

ESPECIALIDAD:

AñOS DE SERVICIO:

ASIGNATURAS QUE IMPARTE:

INSTRUCCIONES: Resuelva los siguientes ejercicios

1. Hallar el límite de la siguiente función algebraica

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x+1}$$

2. Hallar el límite de la siguiente función trigonométrica.

$$\lim_{x\to 2}\left(\csc^2(x-2)-\cot^2(\mathrm{x}-2)\right)$$

3. Se tiene un cuadrado de área igual a 16 centímetros cuadrados; en sus puntos medios, son los vértices de otro cuadrado inscrito en el primero; de este segundo con las mismas condiciones se encuentra inscrito otro, en este tercero otro y así sucesivamente ¿cuál será el límite de la suma de todas las áreas a partir del segundo cuadrado?

4. Un granjero tiene 14 metros de malla de alambre y desea cercar una zona rectangular para reproducir un cierto tipo de semilla. ¿Qué dimensiones debe tener esa zona rectangular para que sea la mayor posible?

a) Resolver el problema sin emplear cálculo

b) Resolver el problema empleando cálculo

5. Bosquejar la gráfica de la siguiente función: $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x+3}$

6. Calcular el área bajo la curva de $f(x)=|x+2|$, y el eje x en el intervalo $[-3, 3]$

7. Hallar el área entre el eje x y la gráfica de:

$$f(x)=\begin{cases} x & 0 \le x < 1 \\ 3x-1 & 1 < x \le 2 \end{cases}$$

8. Se lanza un objeto verticalmente hacia arriba. La función $s(t)=50t-5t^2$ modela la altura (en metros), donde *t* representa el tiempo (en segundos).

Hallar: a) altura máxima.
b) altura en los instantes 3, 5 y 7 segundos.
c) tiempo de subida y bajada.
d) tiempo total de vuelo.

4.2 Descripción de la población

La población estuvo integrada por 20 profesores, todos ellos maestros frente a grupo, de escuelas preparatorias oficiales del estado de México (EPOEM), los 20 docentes trabajan en la misma zona escolar.

Todos ellos, imparten asignaturas relacionadas con el área de matemáticas como: álgebra, trigonometría, geometría analítica, cálculo diferencial e integral, entre otras. Y su preparación profesional está relacionada con esta materia.

En el siguiente cuadro observamos el porcentaje de maestros involucrados en este estudio que trabajan asignaturas previas al cálculo como: álgebra, trigonometría y geometría analítica, y el de aquellos que además de las asignaturas antes mencionadas, trabajan con cálculo diferencial e integral.

Asignaturas que imparte	No	Porcentaje
Sólo previas al cálculo	11	55 %
Previas al cálculo y cálculo	9	45 %

Vale la pena destacar que no todos los maestros tienen formación docente en el área de matemáticas. En el siguiente cuadro mostramos su nivel de escolaridad, en donde podemos observar que algunos tienen licenciatura o maestría en educación matemática, y otros son graduados en alguna ingeniería. El hecho que muchos ingenieros impartan clases de matemáticas en el nivel medio superior en escuelas públicas y privadas es muy común en México y en particular en el Estado de México[2]. La experiencia laboral de los profesores también es muy variada pues fluctúa entre dos y veintiocho años.

[2] En 1981 se abre el servicio de educación media superior en el Estado de México a través de la SECYBS, inicia instrumentando el plan y los programas de estudio del colegio de ciencias y humanidades (CCH) dependientes de la UNAM, que a su vez se derivó de los programas de la Escuela Nacional Preparatoria (ENP);. Así el Estado de

Nivel de escolaridad	No	Porcentaje
Licenciatura en matemáticas (Estudios de Normal)	4	20 %
Maestría en Educación Matemática	3	15 %
Ingeniería (industrial, mecánico, químico)	8	40 %
Arquitecto	3	15 %
Otras licenciaturas (contaduría, administración)	2	10 %

5. Resultados

5.1 Conocimientos

Los resultados referentes a los conocimientos, muestran que ningún profesor contestó correctamente las ocho preguntas del cuestionario, y si hubo, quien no contestó acertadamente ninguna. Los resultados se muestran en la siguiente tabla:

MAESTRO	No. Res. Inc.	% error
1	7	87.5
2	6	75
3	8	100
4	6	75
5	6	75
6	6	75
7	3	37.5
8	7	87.5
9	3	37.5
10	4	50
11	2	25
12	5	62.5
13	6	75
14	7	87.5
15	1	12.5
16	6	75
17	8	100
18	5	62.5
19	5	62.5

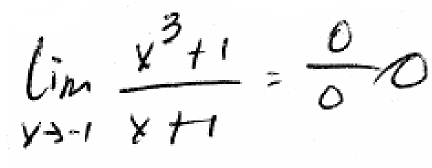
México inicia en el ciclo escolar 1981-1982 con 3 escuelas, para el ciclo escolar 1989-1990 contaba con 87 preparatorias, para el ciclo escolar 1993-199, se ofrecía el servicio en 133 escuelas, a partir de este año se incluyen también los bachilleratos propedéuticos tecnológicos; para el ciclo escolar 1996-1997, el número de escuelas llegó a 197. desde sus inicios, la dependencia del nivel medio superior ha dificultado la conformación de una planta académica con el perfil requerido; por lo que en su mayor parte se fue integrando con personal proveniente de los niveles superior (normales) para su dirección y administración, y de educación primaria y secundaria para el área de orientación y docencia, así como un número muy significativo desde sus inicios y en la actualidad de profesionistas provenientes de otros campos (Pérez, 2002, pp. 56-60)

20	2	25

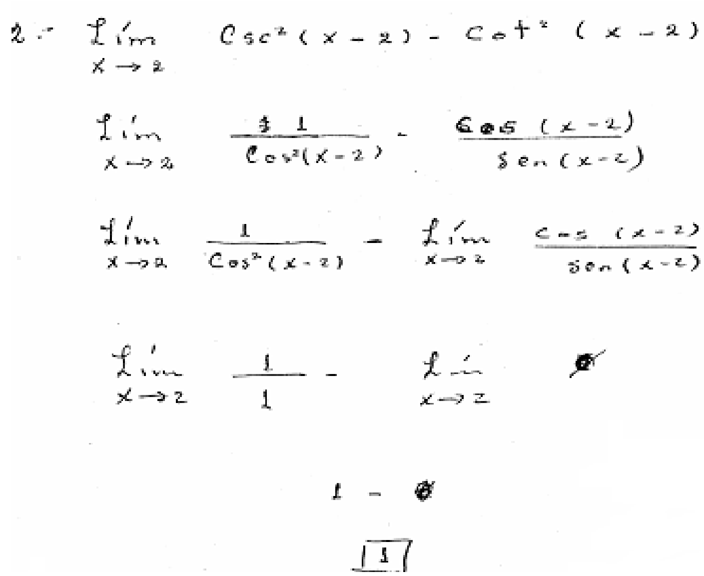
5.2 Creencias

En este apartado, resaltamos las creencias erróneas del profesor, porque son las que influyen de manera negativa en el aprendizaje del estudiante, además de considerar otras que se presentaron y que pueden ser fácilmente superadas.

- En el cálculo de los límites $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+1}{x+1}$ y $\lim\limits_{x\to 2}\left(\csc^2(x-2)-\cot^2(\mathrm{x}-2)\right)$, dentro de las respuestas, encontramos la falsa creencia en los profesores de que "*la división entre cero se puede realizar*", así en la primera función llegan a la indeterminación $\dfrac{0}{0}$, y dan como resultado el cero.



En la segunda, también se presenta esta creencia en algunos, después de que separan la función y llegan a $\lim\limits_{x\to 2}\cot^2\left(x-2\right)=\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{1}{0}$, volviendo a dar como respuesta cero.



En el caso de la primera función, también quedó de manifiesto que algunos profesores desconocen cómo factorizar la suma de cubos, ya que lo hacen de manera errónea y en otros, recurrieron a realizar la división de polinomios.

$$\lim_{x\to -1} = \frac{\cancel{(x+1)}(x^2-x+1)}{\cancel{(x+1)}} = \lim_{x\to -1} x^2-x+1 = (-1)^2-(-1)-1$$
$$= 1+1-1$$
$$= 1$$

---

1) $\lim_{x\to -1} \frac{x^3+1}{x+1} = \frac{\cancel{(x+1)}(x^2-x+1)}{\cancel{(x+1)}} = x^2-x+1$

$(-1)^2-(-1)+1$

$1+1+1=3$

$$\begin{array}{r|l} & x^2-x+1 \\ x+1 & x^3+1 \\ & -x^3-x^2 \\ \hline & -x^2+1 \\ & +x^2+x \\ \hline & x+1 \end{array}$$

En las funciones trigonométricas, no hay un manejo de las identidades y existe un desconocimiento de cómo simplificar las expresiones empleando la reducción a senos y cósenos.

- Respecto a las funciones donde se pide:

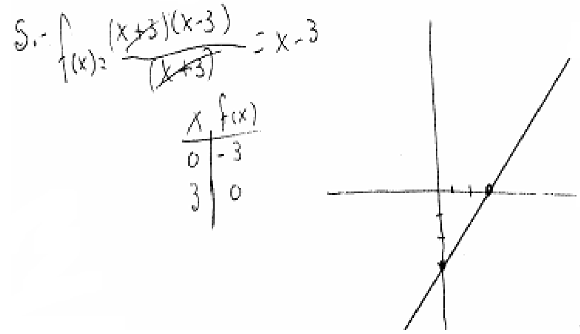
❖ la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x+3}$

❖ hallar el área bajo la gráfica de:

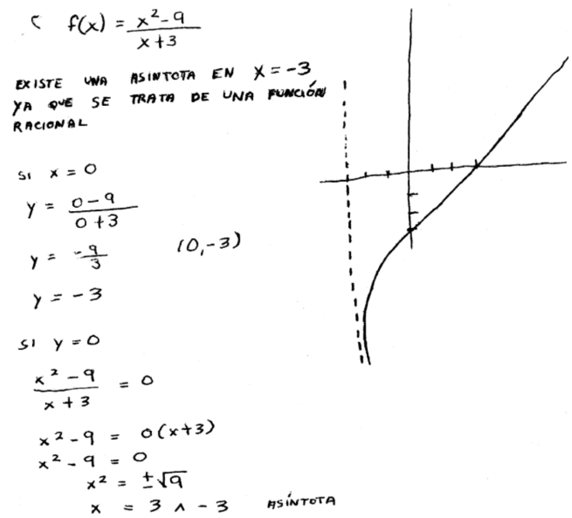
$$f(x)=\begin{cases} x & 0\le x<1 \\ 3x-1 & 1<x\le 2 \end{cases}$$

❖ y Calcular el área bajo la curva de $f(x)=|x+2|$

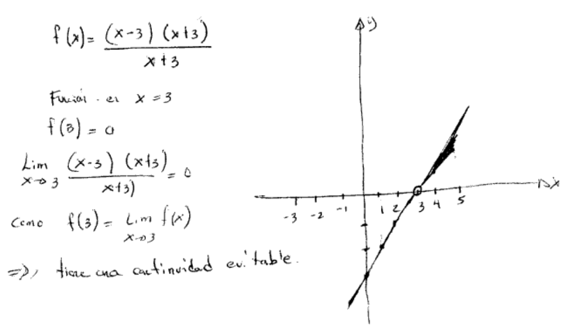
existe en la mayoría de los profesores la falsa creencia de considerar que la función $f(x)=x-3$ es *equivalente* a la función $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x+3}$, ya que reducen la función algebraicamente sin analizar que la función original no está definida para $x=-3$, de donde realizan la gráfica sin señalar la discontinuidad.

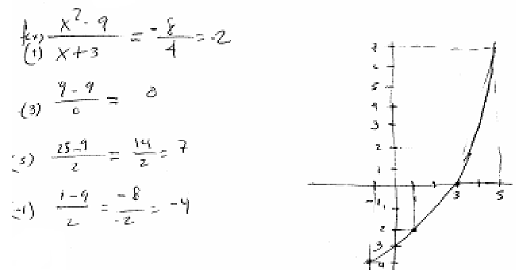


Hay quien tienen la creencia que *por tratarse de una función racional, la función tiene asíntota* en $x = -3$.

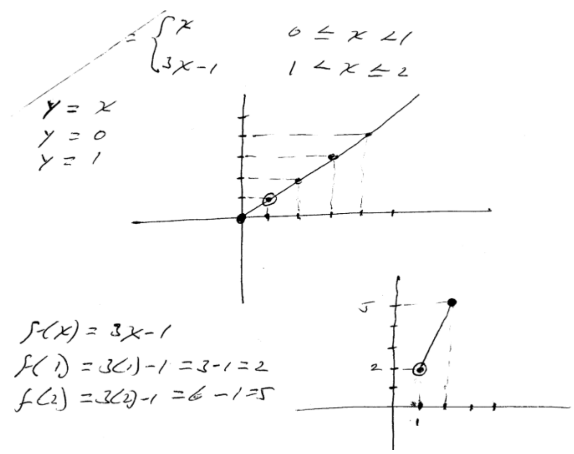


Algunos, consideran que en $f(3) = 0$ se encuentra *la discontinuidad* y otros trazan la función en forma de parábola, suponemos que por el grado del numerador.

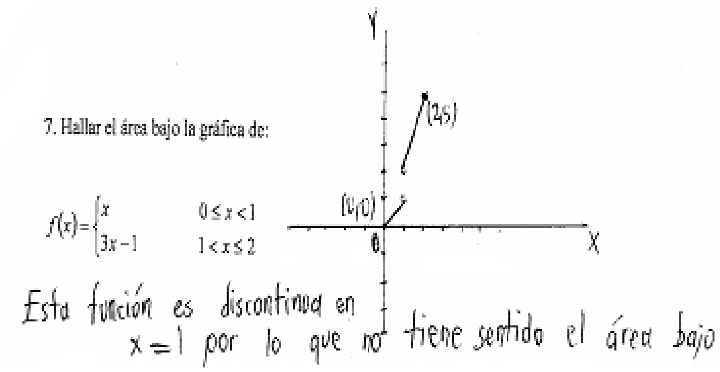




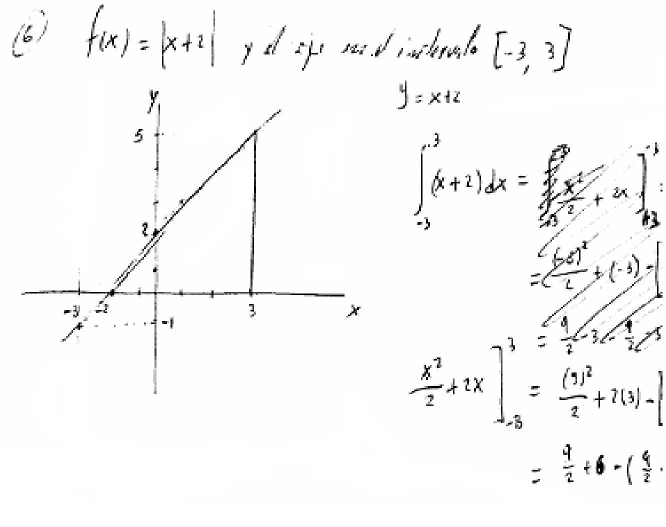
Respecto a la función definida por partes, existen profesores que suponen que no es una función, sino *dos funciones independientes*, manifiestan en este caso un desconocimiento de este tipo de funciones.



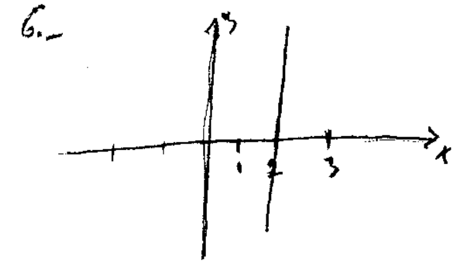
Además, algunos consideran que por tratarse de una función discontinua *no es posible obtener el área*.



En la función valor absoluto, nuevamente se manifiesta el desconocimiento de este tipo de funciones, ya que consideran que la integral $\int_{-3}^{3} |x+2| dx$ es *equivalente* a la integral $\int_{-3}^{3} (x+2) dx$. Es decir, algunos profesores creen que la función $f(x) = |x+2|$ (valor absoluto), es *equivalente* a la función lineal $f(x) = x + 2$, ya que al momento de realizar la gráfica no consideran el valor absoluto.



En algunos casos se muestra un total desconocimiento de la función como se muestra en la siguiente gráfica:



- En algunas otras respuestas se manifiestan creencias que no permiten llegar al profesor a soluciones adecuadas, aquí mencionamos algunas:
  - ❖ Hay quien no considera al cuadrado dentro de los rectángulos.

$$x = \frac{7}{2} \qquad y = \frac{7}{2}$$

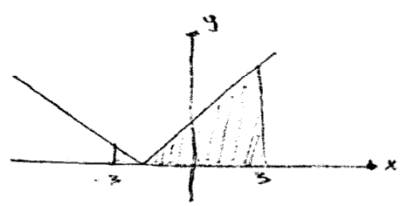
PERO RESULTA UN CUADRADO NO RECTÁNGULO

  - ❖ Algunos profesores, consideran que es necesario emplear la derivada para calcular máximos y mínimos, en algunos casos como realizan mal el planteamiento, derivan una función errónea

$$y = 7x - x^2 \qquad y = 14h - h^2$$
$$y' = 7 - 2x \qquad y' = 14 - 2h$$

  - ❖ Consideran que el calculando de áreas bajo la curva, solo se puede realizar empleando cálculo integral, no recurren a la gráfica, ni a la observación.

$f(x) = |x+2|$



$A_1 = 1.7u^2$ $\quad A_1 + A_2 = 1.7 + 7.3 = 9\,u^2$

$A_2 = 7.3\,u^2$

$$\int f(x) = \int |x+2|\,dx$$
$$= \frac{1x^2}{2} + C$$
$$\frac{x^2}{2}\Big|_{-3}^{3} = \frac{9}{2} + \frac{9}{2} = \frac{18}{2} = 9\,u^2$$

- Hay casos como los siguientes que muestran que el nivel de conocimientos de los profesores es muy limitado aún en operaciones básicas

$$(\sqrt{8})^2 = 2 \; ; \quad \left(\frac{\sqrt{8}}{2}\right)^2 = 4 \; ; \quad (1)^2 = 2$$

Cabe aclarar que en el estudio se analiza cada una de las preguntas con más detalle, lo cual permite ver algunos otros conocimientos y creencias del docente, sin embargo aquí quisimos mostrar algunos de los casos que nos parecen más relevantes.

6. Conclusiones

En general los profesores que participaron en el estudio presentan una baja comprensión no sólo de los conceptos de función y de límite, sino de conocimientos básicos, como la división entre cero, las operaciones básicas y la graficación, entre otros. Además es claro que algunos no analizan la lógica de la respuesta, ni siquiera aplican el sentido común; es decir, no analiza lo razonable o irrazonable del resultado.

En base a lo que señala Schoenfeld (1992), al decir que muchas de las creencias de los alumnos son producto de las que tienen sus maestros; podemos concluir que muchos de los errores de los estudiantes en las evaluaciones se derivan de las falsas creencias que tenemos los docentes.

Después de haber realizado este estudio confirmamos lo que señala Orton (1983, p. 43), que “las dificultades algebraicas pueden estar obscureciendo las ideas del cálculo”. Y más que dificultades, las creencias de algunos conceptos algebraicos que tiene el maestro.

Si partimos de que dentro de los planes y programas de educación media superior, se señala que el perfil, en cuanto a matemáticas, del alumno que ha culminado el bachillerato propedéutico estatal, es tener conocimientos amplios de aritmética, álgebra, trigonometría, geometría analítica y cálculo diferencial e integral. ¿Cómo se puede lograr esto? si después del estudio observamos que el profesor tiene grandes dificultades en estos contenidos, y es precisamente el encargado de conducir a los estudiantes a lograr este perfil.

Cabe también hacer una reflexión, el grupo de profesores que participó en el estudio tiene un perfil acorde a la materia que imparte, sin embargo en el Estado de México aún existe un gran número de docentes que tienen una formación que no tiene nada que ver con las matemáticas y tiene a su cargo materias de esta área, ¿Qué pueden enseñar a sus estudiantes?

Por último, podemos afirmar que un factor que tiene una fuerte influencia en la calidad de la educación es el docente, y mientras no se implementen por parte de las autoridades, estrategias adecuadas de capacitación y actualización, que permitan que éste tenga la formación adecuada para plantear propuestas y ayudar a mejorar la educación en el país, o al menos cuente con los elementos mínimos para poder dar un curso a los alumnos, seguiremos ocupando los últimos lugares en educación.

Bibliografía

Alanís, J. (1987). *Algunos aspectos sobre la enseñanza del concepto de función.* Revista Matemática Educativa No 1. Programa Nacional de Formación y Actualización de profesores de Matemáticas. México.

An, s.; Kulm, G.; Wu, Z. (2004). *The pedagogical content knowledge of middle school, mathematics teachers* in China and the U.S. Journal of Mathematics Teacher Education, Vol. 7, No 2

Bravo, A. y Cantoral, R. (1993). *Matemática en contexto: Un caso,* Memorias de la VII Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa. Departamento de Matemática. Universidad de Panamá, Panamá.

Cooney, T. J. (1980). *Research on teaching and teacher education*; en Schaumway, R. (1980); Research methods in Mathematics Education; NCTM.

Cooney, T. J. (1985). *A beginning teacher's view of problem solving.* Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 16, No 5

Cuevas, A. & Díaz, J. (2002). *Un modelo para la construcción de sistemas tutoriales inteligentes (sti) para la enseñanza de las matemáticas: caso del concepto función.* Memorias de la conferencia iberoamericana en sistemas, cibernética e informática del 18 al 21 de julio en Orlando Florida. USA.

Ferrini-Mundy, J. & Graham. K. (1994). *Research in calculus learning: understanding of limits, derivatives, and integrals.* In research issues in undergraduate mathematics learning. Ed. Dubinsky, MAA Notes Number 33.

Flores, A. (1988). *El meollo de las matemáticas*; Centro de Investigación en Matemáticas, Guanajuato, Gto.

Hitt, F. (1996). *El concepto de límite y la importancia del infinito potencial y actual*. Memorias del VI Simposio Internacional en Educación Matemática. Grupo Editorial Iberoamericana, México.

Hitt, F. (2000). *El concepto de infinito:* Obstáculo en el aprendizaje de límite y continuidad de funciones. En *Matemática educativa: un cuarto de siglo en investigación,* sobre el XXV Aniversario del Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN.

Lesh, R. y Landau, M. (1983). *Acquisition of mathematics concepts and process.* Academic Press. USA.

Lerman, S. (1983). *Problem solving or knowledge centered*: The influence of philosophy on mathematics teaching. International Journal of Mathematical education in science and technology, Vol. 14, No 1

Llorens, J. L. (1999). *Visualización de la recta tangente a una curva.* Educación matemática. Vol. 11. No. 2

Mercado, R. (1988). *Formación de maestros y práctica docente*. DIE Memorias. Departamento de Investigaciones Educativas, CINVESTAV- IPN, México.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics: Discussion Draft. Standards 2000 Project.* The National Council of Teacher of Mathematics, Inc. Reston, VA.

Orton, A. (1983). *Students understanding of differentiation.* Educational studies in Mathematics, Vol. 14

Pajares, M. F. (1992). Teacher's beliefs and educational research: Clearing up a messy construct. *Review of Educational Research.* Vol. 62, No 3

Pérez, D. (2002). *Educación media superior en el Estado de México.* ISCEEM. México.

Quiroz, E. R. (1987). citado en Mercado, Ruth (1988) *Formación de maestros y práctica docente*. DIE Memorias. Departamento de Investigaciones Educativas, CINVESTAV- IPN, México.

Schoenfeld, A. (1992). *Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics.* En Grows, D. (ed): Handbook of Research on Mathematics teaching and learning, NCTM.

Tobin, K. y Espinet, M. (1989). *Impediments to change: aplications of coaching in high school science teaching*. Journal of Research in Science Teaching, 26.

Thompson, A. (1982). *Teacher´s conception of mathematis: Tree case studies. Unpublished doctoral dissertation, University of Georgia, Athens.*

Thompson, A. (1984). *The relationship of teacher´s conceptions of mathematics teaching to instructional practice.* Educational studies in Mathematics.

Villoro, L. (1982). *Creer, saber conocer.* Siglo XXI Editores.

Ma. del Rocío Nava Álvarez

Apolinar Reyes Gutiérrez
polyr66@yahoo.com.mx