El Cálculo y su Enseñanza, Enseñanza de las Ciencias y la Matemática. Volumen 11. julio-diciembre 2018.
Cinvestav-IPN © Ciudad de México. ISSN 2007-4107. P.p. 83-97.

Reflexión sobre el conocimiento del profesor. El caso de la enseñanza de la derivada

Edgar Ponciano Bustos, Leticia Sosa Guerrero

eponcianob@gmail.com, lsosa@uaz.edu.mx

Universidad Autónoma de Zacatecas

México

Resumen. El siguiente estudio reporta una reflexión respecto a la importancia de realizar investigaciones sobre el conocimiento del profesor de matemáticas, al enseñar la derivada usando recursos didácticos tecnológicos. La base de este trabajo es la caracterización realizada por Ponciano (2016), quien utiliza como marco teórico el Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK). Se diseñó una actividad que se realizó en un taller. Esta actividad tenía por objetivo encontrar la función que modela el número de movimientos de la fichas, mediante variaciones de los movimientos apoyándose de Geogebra. Concluimos que es de suma importancia realizar investigaciones sobre el conocimiento del profesor de matemáticas, ya que dichos estudios se desarrollan en la práctica del profesor para posteriormente llevarlos a la formación inicial o continua; con el propósito de construir o reforzar su conocimiento matemático y conocimiento didáctico del contenido.

Palabras clave: Conocimiento, Profesor, Enseñanza, Derivada, Actividades con tecnología

Abstrac. The following study reports a reflection on the importance of conducting research on knowledge of the mathematics teacher by teaching the derivative using technological didactic resources. The basis of this work is the characterization made by Ponciano (2016), which uses as a theoretical framework Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK) of which an activity that was carried out in a workshop is designed. This activity was aimed at finding the function that models the number of movements of the cards, mediating variations of the movements based on Geogebra. We conclude that it is of utmost importance to carry out research on the knowledge of the mathematics teacher, since these studies are developed in the teacher's practice to later take them to the initial and / or continuous training, in order to build or strengthen their mathematical knowledge and didactic knowledge of the content.

Keywords: Knowledge, Teacher, Teaching, Derivative, Technology activities

1. Introducción.

En la literatura, existen investigadores de la Matemática Educativa interesados en la formación matemática y didáctica de los profesores en formación inicial y continua, que han centrado sus investigaciones en decretar el conocimiento necesario para enseñar matemáticas, por ende, han surgido diversos modelos que caracterizan el conocimiento del profesor de matemáticas (e.g. Shulman, 1986; Ball, Thames y Phelps, 2008; Pino-Fan, Godino, Castro y Font, 2012; Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013).

El conocimiento del profesor se ha analizado desde una perspectiva cognitiva (Clark y Peterson, 1986, citado por Llinares, 2009). El interés del estudio del conocimiento del profesor se ha centrado en investigaciones del contenido, de los eventos mentales de los docentes, en sus desarrollos mentales, las trasformaciones a través del tiempo y en especificar la asociación entre estas cogniciones y la enseñanza (Llinares, 2009).

Por otra parte, el conocimiento profesional del profesor se considera como resultado de la experiencia práctica apilada en la realización de tareas docentes específicas, que se va edificando desde su formación inicial y durante toda su carrera profesional (Llinares y Sánchez, 1990; Estepa, 2000; Climent, 2002).

El conocimiento del profesor es una variable potencial para llegar a comprender los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en el aula, generados en las situaciones de aprender a enseñar matemáticas, y del desarrollo profesional de los profesores de matemáticas (Llinares, 2009). Por su parte, Moreno (2005) expresa que, el docente es clave para el éxito y es indispensable para implementar cualquier cambio o propuesta didáctica que tengan su principio en la investigación.

Dicho lo anterior, esta investigación se centra en el análisis del conocimiento del profesor al enseñar la derivada usando recursos didácticos tecnológicos. En la búsqueda de trabajos relacionados a nuestro tema de interés, encontramos que existen escasas investigaciones. Al respecto, Gavilán (2005) menciona que existen insuficientes investigaciones enfocadas al conocimiento del profesor al enseñar la derivada. A continuación mencionamos algunos estudios.

Siguiendo en el mismo tenor, Díaz (2009) diseña un cuestionario para indagar el conocimiento de profesores universitarios en torno al significado y las interpretaciones de la derivada. Finaliza que, se debe realizar un reflexión profunda sobre qué es lo que tendría que conocer el docente de la derivada y de su uso en el tema de funciones, “de las condiciones necesarias y suficientes subyacentes en los teoremas que se mencionan y tienen una importancia especial en el cálculo” (p.88). También, los resultados de este tipo de investigaciones permitirán “diseñar adecuados programas de formación y actualización de profesores” (p.88).

Pino-Fan, Godino, Castro y Font (2012) realizan un estudio para explorar el conocimiento didáctico - matemático del tópico de la derivada con futuros profesores. Concluyeron que, en cuanto al conocimiento de los futuros docentes prevalece la resolución de tipo gráfico, verbal y técnico, es decir, la derivada como pendiente de la recta tangente y las reglas de derivación respectivamente. Esto provoca una disociación entre el conocimiento común y el especializado, que provocaría un obstáculo hacia el conocimiento ampliado. Además sugieren diseñar “procesos de enseñanza de la derivada distintos a los habituales, que se focalicen en el significado global de la derivada" (p.434).

En el trabajo de Castro, Pino-Fan y Font (2015) se menciona que el conocimiento matemático de la derivada de los profesores activos es muy amplio; también los docentes asocian la derivada con el estudio de la variación y con el cambio. Además los profesores logran identificar algunos conflictos o errores de significado de la derivada que pudieran enfrentar los estudiantes.

En otra investigación, Pino-Fan, Godino y Font (2016) señalan que, los futuros profesores tienen un excelente conocimiento de la derivada cuando se entiende como pendiente de la recta tangente a la curva. Sin embargo los docentes tienen dificultades alrededor de la derivada, cuando: 1) conectan la derivada con temas posteriores; 2) usan distintas representaciones; 3) usan diferentes significados de la derivada; 4) resolver tareas de la derivada mediante distintos procedimientos; 5) usar la derivada como tasa de variación instantánea en una situación compleja. Se finaliza con que los futuros profesores manifiestan un conocimiento común que no es suficiente para afrontar las tareas que emergerán en la práctica, por tal motivo, los docentes requieren un conocimiento ampliado de la derivada

Por último, Ponciano (2016) caracteriza, mediante indicadores, el conocimiento de un profesor al enseñar la derivada usando recursos didácticos tecnológicos; analizando la planeación y la clase de ese profesor. Concluye que, el conocimiento matemático del profesor es muy amplio, manifiesta conocimiento sobre: tasa de variación media, tasa de variación instantánea y pendiente de una recta tangente a la curva, además evidencia conocimiento didáctico sobre Recursos Didácticos Tecnológicos (Geogebra, calculadoras gráficas y sensores), Recursos Tecnológicos de Apoyo para la Enseñanza (juego en línea, paint, word, teclas especiales de la computadora, computadoras, proyector y pizarrón electrónico) y Recursos Tecnológicos de Apoyo (Dropbox).

Asimismo, Ponciano (2016) menciona que, los resultados de la investigación podrían fortalecer, actualizar o diseñar programas para la formación de profesores y para la del formador, así como para diseñar actividades para la formación de profesores nivel superior o nivel medio superior que implemente recursos didácticos tecnológicos.

Considerando la investigación de Ponciano (2016), el objetivo de este trabajo es presentar una reflexión sobre la importancia de realizar investigaciones respecto al conocimiento del profesor de matemáticas para el diseño de actividades para la formación continua de profesores de nivel superior o nivel medio superior.

2. Marco teórico

El marco teórico implementado en esta investigación fue el MTSK (*Mathematics Teacher's Specialised Knowledge*, por sus siglas en inglés, ver la Figura 1), el cual tiene el dualismo de ser una propuesta teórica que modela el conocimiento esencial del conocimiento profesional del profesor de matemáticas, y como una herramienta metodológica que permite examinar distintas prácticas del profesor de matemáticas a través de sus categorías (Flores, Escudero y Aguilar, 2013).

El MTSK está compuesto por dos dominios de conocimiento. Por un lado, considera el conocimiento que tiene el profesor de las matemáticas como disciplina científica en un entorno escolar llamado a este dominio MK (*Mathematical Knowledge*). El otro dominio es el conocimiento didáctico del contenido, este dominio se llama PCK (*Pedagogical Content Knowledge*) (Carrillo et al., 2013). El MK y PCK están compuestos por tres subdominios cada uno los cuales son:

Subdominios del MK (Conocimiento Matemático):

- *Conocimiento de los temas (KoT)*. Este subdominio incluye, aspectos fenomenológicos, procedimientos, definiciones, propiedades y sus fundamentos, registros de representación, y aplicaciones que caractericen aspectos del tópico abordado
- *Conocimiento de la Estructura de las Matemáticas (KSM)*. En este subdominio se incorporan el conocimiento sobre temas anteriores y posteriores, ideas primordiales, y conexiones entre temas.
- *Conocimiento de las Prácticas Matemáticas (KPM)*. Es el conocimiento sobre la importancia de la validación y la demostración, el papel de los símbolos y uso del lenguaje formal, procesos a la solución de problemas como una manera de crear matemática, prácticas específicas de la misma matemática, entre otras.

Subdominios del PCK (Conocimiento Didáctico del Contenido):

- *Conocimiento de las Características de Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM)*. Es el conocimiento que tiene el docente de cómo aprenden los alumnos el contenido matemático y el desarrollo de entendimiento de dicho contenido, así como las fortalezas y dificultades e intereses y expectativas.
- *Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS)*. Es el conocimiento que posee el profesor acerca de las expectativas de aprendizaje que el alumno debe y puede alcanzar en un curso escolar, asimismo es aquello que el docente conoce sobre las capacidades conceptuales y procedimentales, y las secuencia de temas anteriores y posteriores.
- *Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT).* Se refiere al conocimiento que tiene el profesor sobre cómo representar el contenido de cara a su enseñanza. Incluye el conocimiento del profesor en cuanto a las teorías de enseñanza, recursos materiales y virtuales que el docente debe conocer para enseñar un contenido matemático, de igual modo se incluye las estrategias, técnicas, tareas y ejemplos.

El Cálculo y su Enseñanza, Enseñanza de las Ciencias y la Matemática. Volumen 11. julio-diciembre 2018.
Cinvestav-IPN © Ciudad de México. ISSN 2007-4107. P.p. 83-97.

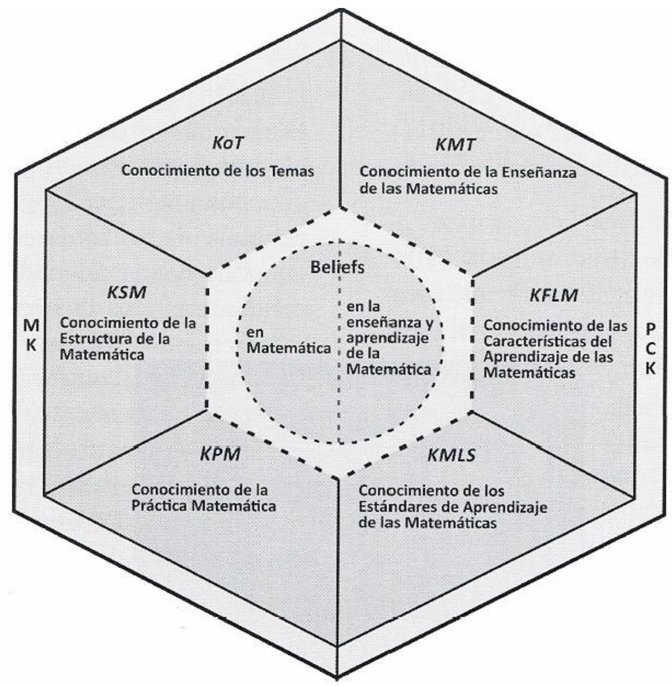


Figura 1. Dominios y subdominios del Modelo MTSK

Esta investigación se enfoca en el subdominio del KMT, en la categoría llamada Recursos y Materiales. Esta categoría hace referencia al conocimiento que tiene el profesor respecto a los beneficios o dificultades de los recursos y materiales como apoyo para la enseñanza de un determinado contenido matemático, así como sus características matemáticas y didácticas asociadas a dichos recursos (Carrillo et al., 2013; Escudero-Ávila, 2015). Es importante mencionar que también analizamos indicios de los otros subdominios del MTSK.

3. Metodología

Para contextualizar un poco, en el trabajo de Ponciano (2016) se investiga el caso de un profesor de matemáticas que impartía clases en una Universidad de México. Este profesor estaba enseñando la derivada en un ambiente donde la tecnología fungía como apoyo esencial para realizar su práctica docente.

El caso estudiado usa en su práctica docente el Recurso Didáctico Tecnológico de Geogebra y los Recursos Tecnológicos de Apoyo para la Enseñanza: computadora, proyector y pizarrón electrónico. Enseguida describiremos de manera general las actividades que realiza el docente en su clase.

1. El docente, en la primera clase, enseña de forma algebraica y gráfica el concepto de la tasa de variación media, para después formalizar en la pendiente de la recta tangente. Construye dichos contenidos matemáticos mediante el apoyo del recurso didáctico tecnológico de Geogebra. Las herramientas principales de Geogebra que utiliza son: deslizador, segmento, perpendicular, tangente punto pendiente, latex y texto. También utiliza el recurso tecnológico de apoyo de Dropbox para guardar y retomar la actividad. Los propósitos de esta actividad

son: conocer la interpretación geométrica de la tasa de variación media; relacionar la aplicación de la tasa de variación media con su interpretación geométrica y deducir su definición; observar y comprobar cómo la recta secante se aproxima a la recta tangente conforme se reduce la amplitud del intervalo.

2. El profesor en la segunda clase utiliza la actividad realizada en la primera clase; la cual fue guardada en Dropbox. En esta sesión el profesor usa la hoja de cálculo (asocia los deslizadores) y la casilla de entrada de Geogebra. El objetivo de esta clase es calcular la variación de distintas funciones al ir moviendo el deslizador que está vinculado a la hoja de cálculo.
3. El docente en la tercera sesión inicia manipulando un juego en línea llamado “rana saltarina”. El propósito de este juego es pasar las ranas de color café de un lado y las ranas de color verde al otro lado. Los alumnos iban realizando los registros de los movimientos cuando había una rana de un lado hasta cuatro en cada lado. El profesor asocia este juego con Geogebra; las herramientas de este software que usa es: hoja de cálculo, cálculo simbólico y operaciones condicionales. Además se apoya del recurso tecnológico de apoyo de Dropbox para guardar la actividad que utilizaron los estudiantes durante la clase. El objetivo de la actividad es encontrar la función que modela el número de movimientos de las ranas, mediante las variaciones de los movimientos.
4. El facilitador en la cuarta clase usa Calculadoras Gráficas, Sensores y Geogebra. El docente utiliza estos hardwares para obtener información respecto al movimiento que realiza una persona en un intervalo de tiempo. El docente relaciona dicho recurso con Geogebra (usa hoja de cálculo y cálculo simbólico). El propósito de la actividad es buscar una función que modela el movimiento de la persona en un intervalo de tiempo de 8 segundos, mediante las variaciones de los movimientos.
5. El profesor en la última sesión vuelve a utilizar la actividad realizada en la primera clase (almacenada en Dropbox). También guarda, previamente en Dropbox, la actividad a realizar de la última clase. Asimismo, para desarrollar la actividad utiliza la herramienta Vista (Geogebra) y de recursos tecnológicos de apoyo para la enseñanza como: Paint, Word y teclas especiales. Los objetivos de la actividad son: conocer la interpretación geométrica de la tasa de variación instantánea; observar y comprobar cómo el cociente de la tasa de variación media se aproxima a la tasa de variación instantánea conforme se reduce la amplitud del intervalo.

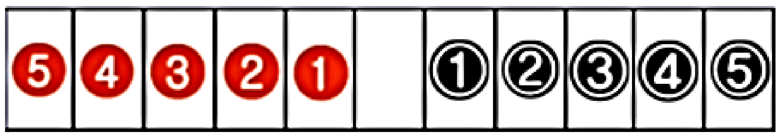
Con base en lo anterior, y analizando minuciosamente los indicadores del conocimiento del profesor, y las características matemáticas y didácticas de los recursos didácticos tecnológicos (software y hardware) usados por el caso de estudio en la investigación de Ponciano (2016), se diseña una actividad que se muestra en la siguiente sección.

3. Actividad diseñada

La actividad tiene por objetivo *encontrar la función que modela el número de movimientos de la fichas, mediantes variaciones de los movimientos*. La actividad está divida en dos secciones. La primera sección consiste en pasar las fichas negras de un lado y las fichas rojas al otro lado, para los casos de una ficha en cada lado hasta cuatro fichas en cada lado (ver la Figura 2) y un espacio en blanco para mover fichas; con base en lo anterior se encontraría de manera intuitiva la función que modela los movimientos. En la segunda sección se usa la hoja de cálculo y cálculo simbólico de Geogebra para encontrar la función que modela los movimientos y su gráfica (ver la Figura 3). En la Figura 2 y 3 mostramos fragmentos de evidencia de la actividad que se realiza.

¿Cuál es la función que modela el número de movimientos de las fichas?

¿Cuantos movimientos tuviste que hacer para cambiar las cinco fichas de posición?



a) ¿Cuántos movimientos se harían con una ficha en cada lado?

Movimiento	Fichas		
0	R	E	N
1			
2			

b) ¿Cuántos movimientos se harían con dos fichas en cada lado?

Movimiento	Fichas				
0	R	R	E	N	N
1					
2					

e) ¿Cuántos movimientos se tendrán que realizar para cinco, seis y siete fichas en cada lado?

f) Escribe en la siguiente tabla en número de movimientos que realizaste

No. de fichas en (x)	Número de movimientos (f(x))
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	

g) ¿Qué función modela el número de movimientos?

Figura 2. Evidencia de la actividad diseñada en la cual se realizan los registros de los movimientos (primera sección)

1. Abre Geogebra e introduce los datos de la tabla anterior en la hoja de cálculo de Geogebra (clic en el menú vista).
2. Posteriormente ingresamos los valores de número de fichas y números de movimientos, y obtenemos las variaciones mediante restas, hasta obtener cero en la última columna

h) ¿Cuántas variaciones son? ¿Qué Tipo de función modela los movimientos de la ficha?

3. Grafica los valores de las columnas de número de fichas y números de movimiento.

i) Escribe los valores a sustituir y plantea el sistema de ecuaciones:

4. Por medio del Cálculo simbólico (CAS) resolvemos el sistema de ecuaciones y encontramos los valores de a, b y c.
5. Después sustituimos los valores de a, b y c en la función $f(x) = ax^2 + bx + c$

j) ¿Qué función se obtuvo?

6. Graficamos la función anterior, para corroborar que pase por los puntos antes graficados, y condicionamos la función para valores positivos.
7. Por último, guarda el archivo como "Nombre_actividad1"

Figura 3. Evidencia de la actividad diseñada en la cual se observan las acciones a realizar en Geogebra y algunas preguntas en torno al tema (segunda sección)

La actividad se realiza en un taller, en el marco del Noveno Encuentro Internacional Sobre la Enseñanza del Cálculo. El taller está diseñado para tres horas, con media hora de receso, en la primera hora se hace una exposición sobre el MTSK, y en la hora y media restante, se lleva a cabo la actividad en una hoja y en Geogebra.

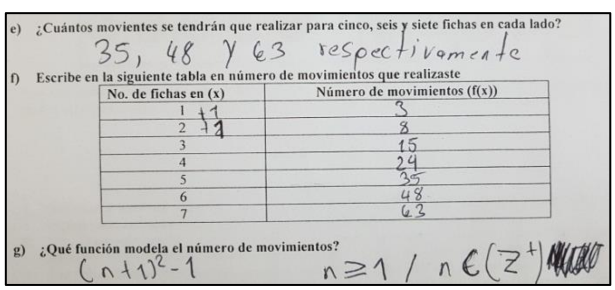
Participaron cinco informantes, de los cuales tres son futuros profesores (estudiantes de licenciatura), uno está en formación continua (estudiante de posgrado) y una docente que está en servicio. De los cinco participantes seleccionamos sólo a tres, debido a que aportan mayor información y por sus características de formación. En la siguiente sección se muestra la evidencia de los tres casos.

4. Análisis y Resultados

A continuación mostramos evidencias de lo que realizan los participantes. Seleccionamos sólo la evidencia de tres informantes: estudiante de licenciatura (caso 1), estudiante de posgrado (caso 2) y profesora en servicio (caso 3).

En la primera sección de la actividad, los participantes han de rellenar un registro de movimientos cuando hay una, dos, tres y cuatro fichas (roja y negra) en cada lado (ver la figura 2). Lo anterior le permitiría encontrar el número de movimientos para cinco, seis y siete fichas en cada lado.

El siguiente fragmento corresponde al caso 1, responde correctamente el número de movimientos para cinco, seis y siete fichas en cada lado (ver la Figura 4 inciso e) y f)). El caso 1 pudo responder sorprendentemente el inciso g), al preguntarle cómo llega a la respuesta, comenta que no estaba seguro de su respuesta, sólo había graficado los puntos en Geogebra intuitivamente dio la función, ver la Figura 7. Sin embargo menciona que estaba seguro de que la función era mayor a uno, por los valores en la tabla (ver la Figura 4). También observamos que, condiciona la función a valores enteros positivos mayor-igual a uno, es decir utiliza símbolos matemáticos y lenguaje formal de la matemática.



e) ¿Cuántos movientes se tendrán que realizar para cinco, seis y siete fichas en cada lado?

35, 48 y 63 respectivamente

f) Escribe en la siguiente tabla en número de movimientos que realizaste

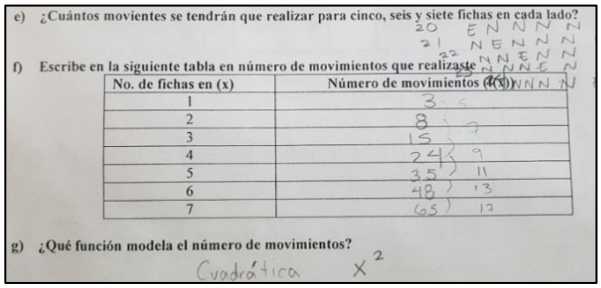
No. de fichas en (x)	Número de movimientos (f(x))
1 +1	3
2 +1	8
3	15
4	24
5	35
6	48
7	63

g) ¿Qué función modela el número de movimientos?

$(n+1)^2-1$ $n \geq 1$ / $n \in (\mathbb{Z}^+)$

Figura 4. Respuesta del futuro profesor

El profesor en formación continua no responde el inciso e). No obstante, contesta los números de movimientos para cinco, seis y siete fichas (ver la Figura 5), además agrega los incrementos. En el inciso g) responde que una función cuadrática es la que modela en número de movimiento, sin embargo no da más información.



e) ¿Cuántos movientes se tendrán que realizar para cinco, seis y siete fichas en cada lado?

f) Escribe en la siguiente tabla en número de movimientos que realizaste

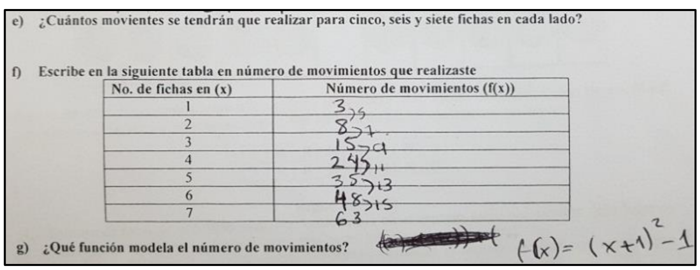
No. de fichas en (x)	Número de movimientos (f(x))
1	3
2	8
3	15
4	24
5	35
6	48
7	65

g) ¿Qué función modela el número de movimientos?

Cuadrática x^2

Figura 5. Respuesta del profesor en formación continua

El caso 3 no responde la pregunta del inciso e), ver la Figura 6. Sin embargo, como se observa en la Figura 6, puede encontrar los movimientos para la fichas cinco, seis y siete en cada lado, incluyendo el incremento que va teniendo cada movimiento. En lo que respecta al inciso g), primero había escrito que se trataba de una función exponencial, sin embargo raya y anota la función que se esperaba, interpretamos que realiza el cambio cuando avanza en la actividad, se da cuenta de su error y realiza la corrección.



e) ¿Cuántos movientes se tendrán que realizar para cinco, seis y siete fichas en cada lado?

f) Escribe en la siguiente tabla en número de movimientos que realizaste

No. de fichas en (x)	Número de movimientos (f(x))
1	3 > 5
2	8 > 7
3	15 > 9
4	24 > 11
5	35 > 13
6	48 > 15
7	63

g) ¿Qué función modela el número de movimientos? $f(x) = (x+1)^2 - 1$

Figura 6. Respuesta de la profesora en servicio

De lo descrito anteriormente concluimos que, los tres casos muestran indicios de conocimiento de la estructura matemática del tema anterior de funciones con variaciones. También observamos que, los tres casos representan el tópico de función cuadrática de forma verbal o algebraica, evidenciando indicios de conocimiento de los temas matemáticos. Es importante mencionar que, el caso 1 sorprendentemente utilizó Geogebra para responder la pregunta, así como símbolos matemáticos y lenguaje formal; de lo anterior se sospecha que el caso podría dar oportunidades para indagar más sobre el conocimiento de las prácticas matemáticas y conocimiento de la enseñanza de las matemáticas adquiridos en su formación académica. El caso 3 en un primer momento escribe y menciona que la función era exponencial, pero corrige su respuesta después de haber realizado la actividad; podemos decir que Geogebra fue buen apoyo para reforzar su conocimiento matemático.

El Cálculo y su Enseñanza, Enseñanza de las Ciencias y la Matemática. Volumen 11. julio-diciembre 2018.
Cinvestav-IPN © Ciudad de México. ISSN 2007-4107. P.p. 83-97.

En la segunda sección de la actividad los tres casos se apoyan de Geogebra para encontrar la función, usando esencialmente la hoja de cálculo y el cálculo simbólico. El tallerista, indica cómo obtener las variaciones en la hoja de cálculo. Enseguida el docente pregunta: ¿Cuántas variaciones son? ¿Qué tipo de función modela los movimientos de la ficha? Y al final cuestiona: ¿Qué función se obtiene?

Después, el docente indica que grafiquen las columnas Número de fichas y Número de movimientos con las herramientas *Crea/Lista de puntos*. Para encontrar la función, el profesor sugiere, construir y resolver un sistema de ecuaciones de $3x3$ (utilizando cálculo simbólico) para encontrar los valores de $a, b\ y\ c$ y sustituir en la función $f(x) = ax^2 + bx + c$. Por último el docente pide graficar la función y condicionar x a valores positivos. A continuación mostramos evidencia de lo que realizan los casos en Geogebra y en la hoja de actividades.

La siguiente imagen corresponde al caso 1. En ella podemos observar que primero ubica los puntos (A-G) con base en los valores de la tabla (ver la Figura 4). Calcula las variaciones en Geogebra, y con base en ello responde que el tipo de función que modela el número de movimientos es cuadrática. Después, formula el sistema de ecuaciones y mediante el cálculo simbólico resuelve el sistema de ecuaciones y encuentra los valores de $a, b\ y\ c$. Sustituye los valores $(a, b\ y\ c)$ en $f(x) = ax^2 + bx + c$ para encontrar la función que modela los movimientos. Finalmente, condiciona la función a valores positivos. En la Figura 8 se puede observar el sistema de ecuaciones y la función que modela los movimientos, y en la Figura 7 se observa la gráfica de la función.

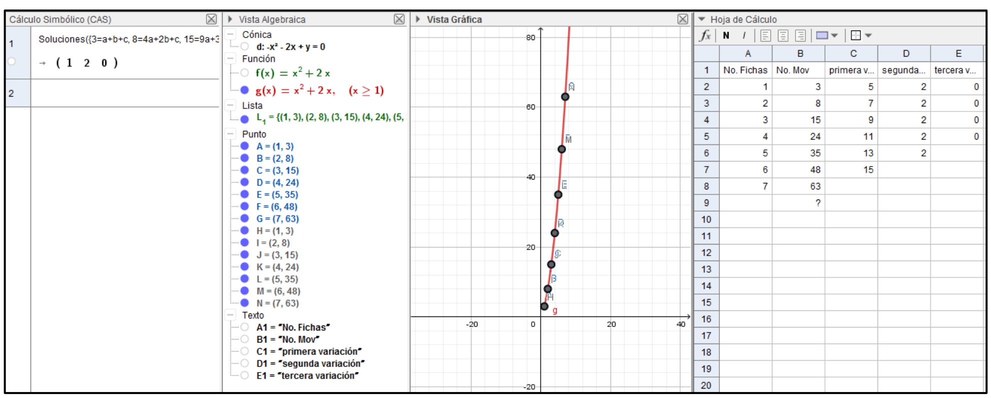


Figura 7. Actividad en Geogebra del futuro profesor

El Cálculo y su Enseñanza, Enseñanza de las Ciencias y la Matemática. Volumen 11. julio-diciembre 2018.
Cinvestav-IPN © Ciudad de México. ISSN 2007-4107. P.p. 83-97.

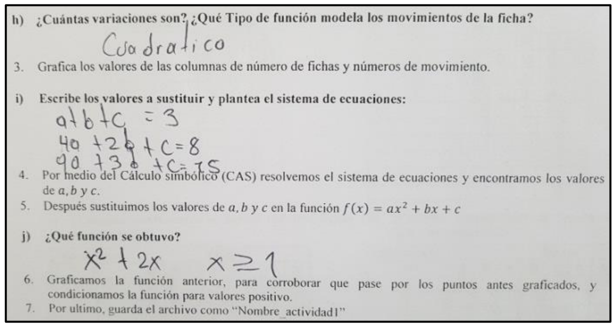

h) ¿Cuántas variaciones son? ¿Qué Tipo de función modela los movimientos de la ficha?
Cuadratico
3. Grafica los valores de las columnas de número de fichas y números de movimiento.
i) Escribe los valores a sustituir y plantea el sistema de ecuaciones:
a+b+c = 3
4a +2b + c=8
9a +3b +c=15
4. Por medio del Cálculo simbólico (CAS) resolvemos el sistema de ecuaciones y encontramos los valores de a, b y c.
5. Después sustituimos los valores de a, b y c en la función $f(x) = ax^2 + bx + c$
j) ¿Qué función se obtuvo?
$x^2 + 2x$ $x \geq 1$
6. Graficamos la función anterior, para corroborar que pase por los puntos antes graficados, y condicionamos la función para valores positivo.
7. Por ultimo, guarda el archivo como "Nombre_actividad1"

Figura 8. Respuesta en la hoja de actividad del futuro profesor

El caso 2 realiza el cálculo de las variaciones y ubica las coordenadas. En el inciso h) responde correctamente que son tres variaciones, además propone que el tipo de función que modela los movimientos es cuadrática, ver la Figura 11. También propone el sistema de ecuaciones y lo resuelve, pero no se apoya de Geogebra por un problema de actualización, sin embargo, excepcionalmente resuelve el sistema de ecuaciones de manera algebraica, como se observa en la Figura 10. A pesar de que el docente no usa Geogebra, encuentra los valores de a, b y c, y por consecuencia la función que modela los movimientos, la cual graficó. En la Figura 11 se encuentra el sistema de ecuaciones y la función cuadrática, y en la Figura 9 se visualiza la gráfica de la función.

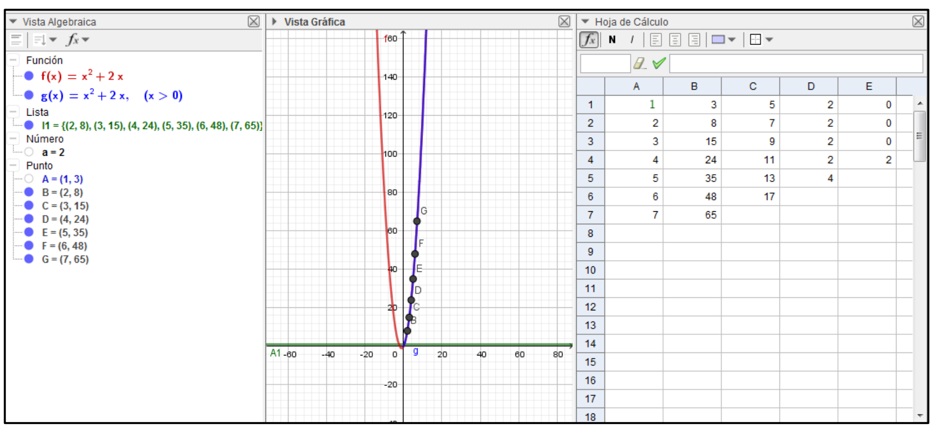


Figura 9. Actividad en Geogebra del profesor en formación continua

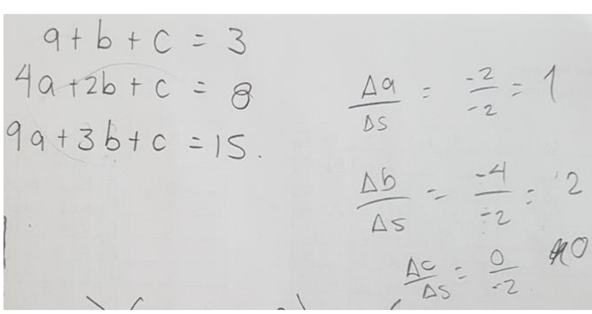


Figura 10. Solución del sistema de ecuaciones

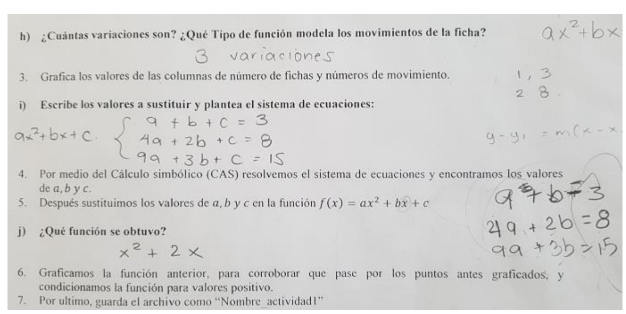

h) ¿Cuántas variaciones son? ¿Qué Tipo de función modela los movimientos de la ficha?
3 variaciones
3. Grafica los valores de las columnas de número de fichas y números de movimiento.
i) Escribe los valores a sustituir y plantea el sistema de ecuaciones:
ax²+bx+c
9 + b + c = 3
4a + 2b + c = 8
9a + 3b + C = 15
4. Por medio del Cálculo simbólico (CAS) resolvemos el sistema de ecuaciones y encontramos los valores de a, b y c.
5. Después sustituimos los valores de a, b y c en la función $f(x) = ax^2 + bx + c$
j) ¿Qué función se obtuvo?
$x^2 + 2x$
6. Graficamos la función anterior, para corroborar que pase por los puntos antes graficados, y condicionamos la función para valores positivo.
7. Por ultimo, guarda el archivo como "Nombre_actividad1"

Figura 11. Respuesta en la hoja de actividad del futuro profesor

El Cálculo y su Enseñanza, Enseñanza de las Ciencias y la Matemática. Volumen 11. julio-diciembre 2018.
Cinvestav-IPN © Ciudad de México. ISSN 2007-4107. P.p. 83-97.

El caso 3 calcula las variaciones y ubica las coordenadas. Para el inciso h) responde que son tres variaciones, y con dicha respuesta propone que el tipo de función que modela los movimientos es polinómica, en particular cuadrática. Formula el sistema de ecuaciones y con ayuda del cálculo simbólico resuelve el sistema de ecuaciones y encuentra los valores de a, b y c; sustituye dichos valores en $f(x) = ax^2 + bx + c$ para encontrar la función que modela los movimientos, ver la Figura 12. Por último, condiciona la función a valores positivos. En la Figura 13 se puede observar el sistema de ecuaciones y la función cuadrática que modela los movimientos.

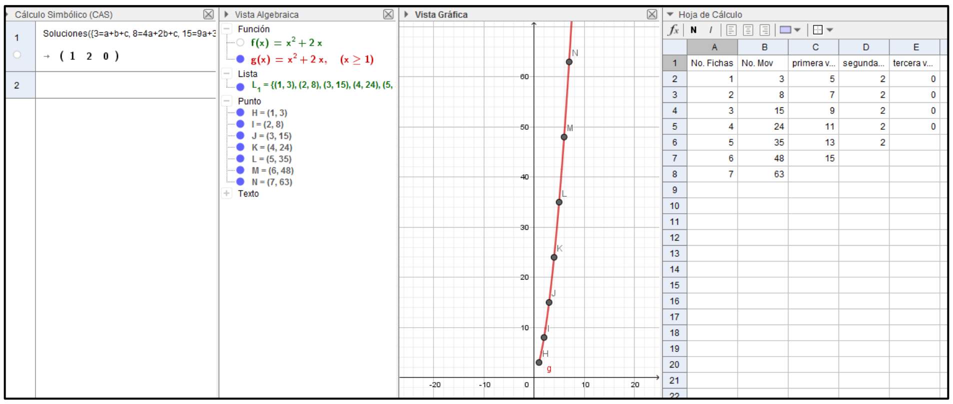


Figura 12. Actividad en Geogebra de la profesora en servicio

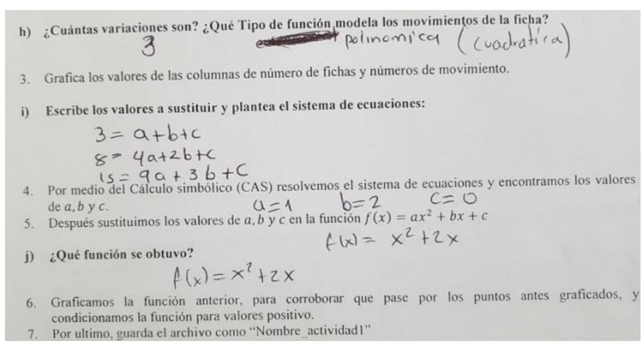

h) ¿Cuántas variaciones son? ¿Qué Tipo de función modela los movimientos de la ficha?
3 polinomica (cuadratica)
3. Grafica los valores de las columnas de número de fichas y números de movimiento.
i) Escribe los valores a sustituir y plantea el sistema de ecuaciones:
3= a+b+c
8= 4a+2b+c
15= 9a+3b+c
4. Por medio del Cálculo simbólico (CAS) resolvemos el sistema de ecuaciones y encontramos los valores de a, b y c.
a=1 b=2 c=0
5. Después sustituimos los valores de a, b y c en la función $f(x) = ax^2 + bx + c$
f(x)= x²+2x
j) ¿Qué función se obtuvo?
f(x)= x²+2x
6. Graficamos la función anterior, para corroborar que pase por los puntos antes graficados, y condicionamos la función para valores positivo.
7. Por ultimo, guarda el archivo como "Nombre_actividad1"

Figura 13. Respuesta en la hoja de actividad de la profesora en servicio

De lo analizado anteriormente, finalizamos que, los tres casos evidencian conocimiento de la enseñanza de la matemática, en particular de Geogebra como recurso didáctico. Sin embargo los tres mencionan que sólo habían utilizado Geogebra para actividades de geometría y de funciones; y que las herramientas de hoja de cálculo y cálculo simbólico no las conocían. Además, ellos muestran indicios de conocimiento de la estructura matemática de temas anteriores al de variaciones, como lo son: funciones y solución de sistemas de ecuaciones. De igual manera, en los tres casos, al encontrar la función que modela el número de movimientos, se sospecha que podrían mostrar conocimiento de las prácticas de las matemáticas. Asimismo, en los tres casos podemos observar indicios de conocimiento de los temas matemáticos, en cuanto a registros de representación: algebraica y grafica de la función cuadrática, tanto en la hoja de actividad como en Geogebra.

Cabe mencionar que el caso 2 no utiliza el cálculo simbólico para solucionar el sistema de ecuaciones porque tuvo un problema de actualización del Geogebra, pero excepcionalmente soluciona el sistema de ecuaciones, esto nos da elementos para concluir que tiene conocimiento de la estructura matemática, que le permite solucionar algún problema que pueda emerger de los recursos tecnológicos.

5. Conclusiones y Reflexión final

La actividad diseñada fue de gran ayuda para los participantes, ya que la mayoría de ellos mencionaron que estaban sorprendidos porque no conocían las herramientas que utilizamos de Geogebra. Además les parece interesante la conexión del tema con otros conocimientos matemáticos anteriores. Asimismo, muestran satisfacción al conocer que con Geogebra se pueden diseñar actividades no tradicionales, con el propósito de que los estudiantes se interesen y aprendan del tópico de la derivada y otros temas relacionados.

Los tres casos evidencian conocimiento matemático de la derivada que se ve reflejado en las respuestas de la actividad, se tendrían que realizar otras actividades donde se consideren otros acercamientos de la derivada para saber qué tan amplio o limitado es su conocimiento alrededor del tema. En lo que respecta al conocimiento didáctico del contenido, es decir los recursos didácticos tecnológicos, los participantes evidencian conocimiento básico de Geogebra, sin embargo desconocían las herramientas usadas de Geogebra. Lo anterior nos permite concluir que es importante conocer y reflexionar las características matemáticas, didácticas, usos e intencionalidades de los recursos didácticos teológicos de tipo software y hardware, para planificar y crear tareas en torno a la derivada y otros contenidos matemáticos.

En lo que respecta al MTSK, los tres casos evidenciaron conocimientos de los subdominios del conocimiento de los temas y conocimiento de la enseñanza de las matemáticas; e indicios del conocimiento de la estructura matemática y de la práctica matemática. Interpretamos que esas evidencias se deben a la misma naturaleza del contenido matemático, la experiencia (académica y/o profesional), y a su formación académica de los informantes. También creemos que, para que se evidencien el conocimiento de las características de aprendizaje y el conocimiento de los estándares de aprendizaje, se deberían de realizar por ejemplo, preguntas sobre fortalezas y dificultades, y expectativas de aprendizaje (respectivamente) que han tenido de la derivada en su experiencia y formación académica, y cómo utilizarla para fortalecer el aprendizaje de los alumnos.

Reflexionamos que es de se suma importancia realizar investigaciones sobre el conocimiento del profesor de matemáticas, ya que dichas investigaciones se desarrollan en la práctica del profesor para posteriormente llevarlos para la práctica (formación inicial o continua). También este tipo de estudios permiten diseñar actividades de formación para los profesores, dichas actividades se pueden ejecutar en un taller o en cursos de actualización o de formación; con el objetivo de que el docente mejore su práctica docente. Asimismo, coincidiendo con Ponciano (2016) este tipo de estudios puede ser de gran utilidad para perfeccionar, actualizar o crear programas para la formación de profesores y para el formador.

De igual manera, los estudios sobre el conocimiento del profesor apoyarían a los futuros profesores, a los docentes en formación continua y en servicio, que no tengan una fuerte formación académica en matemáticas, a reflexionar sobre lo que deberían de conocer de la derivada (teoremas, ejemplos, contraejemplos, aplicaciones y acercamiento de la derivada) y cómo se conectan matemáticamente con tópicos anteriores y posteriores, con el fin de construir y/o reforzar su conocimiento matemático para que diseñen actividades con recursos didácticos tecnológicos. Asimismo, ayudarán a construir, actualizar y/o fortalecer nuevo conocimiento didáctico respeto a cómo enseñar la derivada usando recursos didácticos tecnológicos; reflejándose en el diseño y planeación de actividades hasta su puesta en escena en el aula.

6. Referencias

Ball, D. L., Thames, M. H., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching. What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C., y Muñoz-Catalán, M.C. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Haser y M.A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the VIII Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 8)*, (pp. 2985-2994). Ankara: Middle East Technical Universitiy.

Castro, W., Pino-Fan, L., Font, V. (2015). El conocimiento didáctico-matemático para la enseñanza de la derivada de profesores colombianos activos. En Flores, Rebeca (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 28* (pp. 1591-1598). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Climent, N. (2002). *El desarrollo profesional del maestro de primaria respecto de la enseñanza de la matemática: Un estudio de caso*. Tesis de Doctorado no publicada. Universidad de Huelva. España.

Díaz, M. (2009). *Conocimientos de los profesores preuniversitarios de Cálculo acerca del significado y las interpretaciones de la derivada*. Recuperado el 30 de marzo de 2015 de http://www.matedu.cinvestav.mx/~elcalculoysuensenanza/investigacion/articulosPDF/MDiaz.pdf

Estepa, J. (2000). El conocimiento profesional de los profesores de ciencias sociales. En J. Pagés, J. Estepa y G. Travé (Eds.), *Modelos, contenidos y experiencias en la formación profesional del profesorado de Ciencias Sociales* (pp. 313-334). Huelva, España: Universidad de Huelva Publicaciones.

Escudero-Ávila, D. (2015). *Una caracterización del conocimiento didáctico del contenido como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de secundaria*. Tesis de Doctorado no publicada. Universidad de Huelva. España.

Flores, E., Escudero, D.I., y Aguilar, A. (2013). Oportunidades que brindan algunos escenarios para mostrar evidencias del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 275-282). Bilbao: SEIEM.

Gavilán, J. (2005). *El papel del profesor en la enseñanza de la derivada. Análisis desde una perspectiva cognitiva*. Tesis de Doctorado no publicado. Universidad de Sevilla, España.

Llinares, S. y Sánchez, V. (1990). Las creencias epistemológicas sobre la naturaleza de las matemáticas y su enseñanza y el proceso de llegar a ser un profesor. *Enseñanza, 8*, 165-180.

Llinares, S. (2009). Conocimiento profesional del profesor de matemáticas: conocimiento, creencias y contexto en relación a la noción de función. *Colección Digital Eudoxus*, (15).

Pino-Fan, L., Godino, J.D., Castro, W.F., y Font, V. (2012). Conocimiento didáctico-matemático de profesores en formación: explorando el conocimiento especializado sobre la derivada. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 427 - 434). Jaén: SEIEM

Pino-Fan, L., Godino, J. D., y Font, V. (2016). Assessing key epistemic features of didactic-mathematical knowledge of prospective teachers: The case of the derivative. *Journal of Mathematical Teacher Education*, *21* (1), 63-94.

Ponciano, E. (2016). *Conocimiento de la enseñanza de la derivada usando recursos didácticos tecnológicos. El caso de un profesor*. Tesis de maestría no publicada. Universidad Autónoma de Zacatecas. México.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.