Resultados empíricos de la implementación de una propuesta para la enseñanza del concepto Integral Definida de funciones de una variable en el Nivel Superior

Efraín Soto Apolinar, Juan Antonio Alanís Rodríguez
Instituto Tecnológico de Monterrey campus Monterrey
México

Resumen.

Se reportan resultados observados de la implementación de una innovación para la enseñanza del Cálculo en el nivel Superior. Tras la discusión de tres problemas que involucran a la Integral Definida (longitud de arco, área bajo la curva y volumen de un sólido de revolución), se evaluó a los estudiantes. Se encontró que algunos logran establecer la Integral Definida con la cual se determina el valor exacto del área superficial de un sólido de revolución particular. Entre otras cuestiones, se observó que una fracción importante del grupo presenta deficiencias en sus habilidades del álgebra, lo cual ocasiona que no logren establecer dicha Integral Definida.

Palabras clave: Cálculo, Integral definida, enseñanza, innovación.

1. Introducción

Los problemas reportados en el aprendizaje del Cálculo han motivado una gran cantidad de propuestas e innovaciones en su enseñanza (Maggelakis y Lutzer, 2007). Sin embargo, algunos investigadores han afirmado que muchas de las innovaciones no han considerado suficientes cambios en la forma en que se presentan los conceptos fundamentales del Cálculo (Artigue, 1995; Steen, 2003). En el seno de una institución privada de nivel superior al Norte de México surge una propuesta innovadora para la enseñanza del Cálculo que fue diseñada con base en resultados de investigaciones del área de la matemática educativa (Salinas y Alanís, 2009; Salinas, Alanís y Pulido, 2011). Con la intención de caracterizar el aprendizaje y la comprensión que los estudiantes ganan del concepto Integral Definida de funciones de una variable, se realizó la observación de una implementación de dicha innovación en un curso de Matemáticas a nivel superior.

2. Descripción de la innovación implementada

Para la planeación de la instrucción del concepto de Integral Definida de funciones de una variable se utilizó como referencia la obra de Salinas, Alanís, Garza, Pulido, Santos y Escobedo (2012). Esta obra está dividida en tres tomos. En el segundo tomo de dicha obra se propone un acercamiento al concepto de Integral Definida de funciones de una variable con base en una serie de problemas que consisten en el cálculo de una cualidad de un todo (longitud de arco, área bajo la curva, volumen de un sólido de revolución, masa de un cable con densidad variable y fuerza hidrostática sobre una pared debido a un fluido). La resolución planteada para estos problemas en dicha obra se inicia calculando de manera aproximada la cualidad en cuestión. Para ello se divide el todo en partes apropiadamente (esto es, de manera que sea posible calcular para cada una de las partes la cualidad buscada) y luego se mejora la aproximación aumentando el número de cantidades en las que se divide el todo.

Con ello, los autores de esta obra esperan que el lector adquiera un esquema de proceder que le permita resolver problemas del mismo tipo que no han sido abordados otorgando mayor atención a la parte conceptual respecto a los acercamientos tradicionales, en los cuales según se ha afirmado, con frecuencia se otorga mucho énfasis a la parte algorítmica o a la formal (Alanís y Soto, 2012).

Cabe mencionar que en el planteamiento encontrado en dicha obra se hace uso de las cantidades infinitamente pequeñas, también denominadas *infinitesimales*. Asimismo, en los problemas abordados se utiliza lo que en esa obra se denomina el principio leibniziano, que consiste en considerar las curvas como si fueran líneas poligonales, con lados de longitud infinitesimal.

2.1 Planteamiento para el establecimiento de la Integral en la innovación de interés

En la referida obra, la discusión de cada situación problemática se inicia explicando cómo se interpreta geométricamente la aplicación del principio leibniziano en el cálculo de la cualidad a calcular del todo (M). En una figura incluida en la descripción de la situación problemática correspondiente, se muestra la forma de dividir el todo para la cuantificación de M, y se solicita calcular la aproximación del aporte de esa parte (representativa) a la cantidad M. Después se hacen los cálculos (aproximación numérica) de acuerdo a la explicación dada, y se realiza la primera estimación. Enseguida se vuelve a hacer la aproximación numérica, con un número mayor de divisiones. Finalmente, se argumenta que, entre más y más partes se divida M, la aproximación calculada es cada vez mejor. La justificación de esto último se basa en el parecido visual entre cada parte en la que se divide M, y la utilizada para la aproximación en el cálculo.

En la generalización de este bosquejo de técnica de solución de la situación problemática, se muestra primero, algebraicamente, el resultado de la aproximación resultante de dividir M en n partes. Luego se utiliza un acercamiento dinámico de la idea de límite, en donde se argumenta que las partes utilizadas en el cálculo aproximado de M son más parecidas a sus contrapartes exactas conforme n aumenta. Finalmente, afirman que el valor exacto de la cualidad M que se desea calcular se obtiene cuando la cantidad de particiones (n) es infinita.

Establecido lo anterior, se representa a la cantidad M como una Integral, pero en esta ocasión (acercamiento estático) se considera de inicio que M ha sido dividida en una cantidad infinita de partes, cada una de ellas infinitamente pequeña, denotada por dM. Por tanto, se concluye que M se puede calcular a partir de la suma de cada una de esas partes dM, lo cual representan como: $M = \int dM$.

La discusión de la situación problemática se concluye unificando ambos acercamientos: en primer lugar tienen en cuenta un acercamiento dinámico que involucra al infinito potencial; después se utiliza un acercamiento estático, que involucra al infinito actual. Esto les permite definir a la Integral definida de funciones de una variable como un proceso de límite y a la vez como la suma de una cantidad infinita de infinitesimales.

3. Metodología

El salón de clase en el que se impartió la instrucción contaba con computadora de escritorio, conectada a un proyector (cañón) que fue utilizado con frecuencia. También había aproximadamente 40 sillas denominadas (por su fabricante, steelcase) *node*. Esas sillas tienen movilidad que le dan posibilidad al estudiante de desplazarse para formar equipos de trabajo. También cuentan con un soporte con espacio suficiente para colocar una computadora portátil o una libreta o libro de texto.

Los participantes en el estudio fueron 35 estudiantes inscritos en el curso denominado "Matemáticas 2" cuyos contenidos corresponden al Cálculo Integral. Los participantes eran en su mayoría estudiantes de segundo semestre de alguna carrera de ingeniería. Se entiende que la mayoría de los estudiantes llevó un curso preuniversitario de Cálculo (posiblemente tradicional), aunque no se confirmó esto en la mayoría de los casos.
Para la obtención de datos para este trabajo se realizó observación no participante. El observador (uno de los autores de este trabajo) asistió a las sesiones de clase durante las primeras 15 sesiones del curso. Cada sesión de clases fue videograbada y se hicieron anotaciones de campo a lo largo de ellas. Se impartieron dos sesiones a la semana y en general cada sesión duró 90 minutos.

Para motivar el concepto de Integral Definida, el profesor propuso las primeras tres (de las cinco) problemáticas planteadas en la primera Unidad del tomo dos de la obra de Salinas et al (2012) al inicio del curso, en el mismo orden que aparecen en dicha obra. Se entregó a los estudiantes en una hoja el problema correspondiente y ellos trabajaron en equipo en su resolución durante aproximadamente 15 minutos (3 estudiantes por equipo). Después el profesor discutía con los estudiantes la resolución de la problemática y finalmente generalizaba el procedimiento para presentar el cálculo exacto con base en una Integral Definida. Durante la discusión de cada problemática en clase, el profesor hizo énfasis en el procedimiento planteado en Salinas et al (2012). Este procedimiento permitió el diseño de una rúbrica analítica que facilita evaluar las actividades de los estudiantes. Dicha rúbrica sirve como guía para el establecimiento de la Integral Definida con cierto detalle, y por tanto también para la planeación de la instrucción de este concepto matemático. El trabajo de los estudiantes y la discusión de la situación en general, requerían de dos sesiones. En la tercera sesión se abordaban problemas del mismo tipo con la intención de que los estudiantes se apropien de la metodología y la interioricen.

Además del trabajo desarrollado por los alumnos durante las sesiones de instrucción, el profesor dejó a los estudiantes tarea (extra-clase) al final de la discusión de cada situación problemática, la cual consistía en cinco problemas con una estructura similar a los problemas vistos en clase. Esta tarea debía ser devuelta (completamente resuelta) por los estudiantes al profesor una clase después de ser entregada. Para la elaboración de esta tarea, los estudiantes tuvieron acceso a la rúbrica analítica antes mencionada. La mayoría de los estudiantes entregó la tarea a tiempo, y al parecer, seguían la rúbrica propuesta para la resolución de los ejercicios.

Después de terminar de estudiar y discutir las primeras tres situaciones problemáticas en clase, de las cinco incluidas en la primera unidad del tomo dos de Salinas et al (2012), se aplicó una evaluación en la que se incluían 4 ejercicios con estructura semejante a los discutidos en clase y en las tareas extra-clase y un problema no abordado previamente. Específicamente, se trató del problema del establecimiento y cálculo de la Integral Definida con la cual se obtiene el valor exacto del área superficial de un sólido que se obtiene al girar alrededor del eje x la región limitada por la gráfica de la función $y = f(x) = x^3$, el eje x y las rectas $x = 1$ y $x = 2$. Para la resolución de la evaluación se otorgó a los estudiantes un máximo de 90 minutos.

Por experiencia se sabe que cuando se solicita calcular el área superficial de un sólido de revolución, los estudiantes con frecuencia calculan alguna otra magnitud (el área bajo la curva o el volumen del sólido de revolución). Con la intención de que los estudiantes comprendieran qué debían calcular en ese problema, el profesor titular al inicio de la aplicación de la evaluación solicitó a los estudiantes le indicaran levantando la mano cuándo habían llegado al último problema (del cálculo del área superficial del sólido de revolución) para explicarles en qué consistía éste exactamente. Para facilitar la visualización de la superficie cuya área debían calcular, el profesor mostraba a los estudiantes un material concreto, generado por medio de una impresión 3D, mostrado en la figura 1.

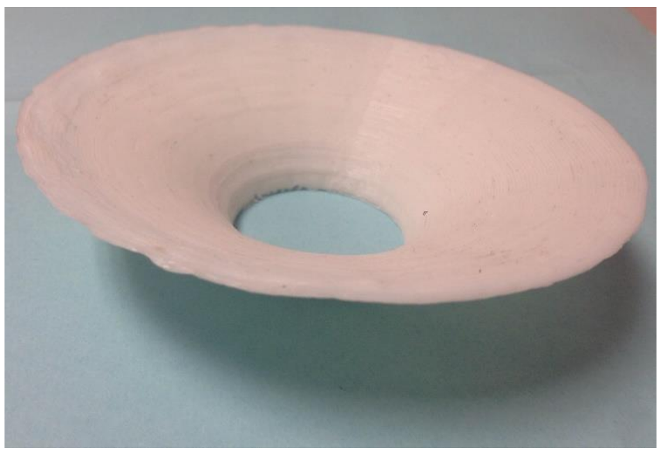

Figura 1: Material concreto mostrado a los estudiantes.

4. Resultados observados

De los 35 estudiantes, cinco lograron establecer la Integral Definida con la cual se calcula el área superficial del sólido de revolución mencionado, algo que, según han observado los autores de este trabajo, es muy difícil de lograr (acaso sea posible) en los cursos tradicionales. De ellos, uno cometió error al calcular la antiderivada y otro no lo intentó. Cada uno de los otros tres determinó correctamente el valor del área superficial solicitada en el problema.

Algunos estudiantes no lograron establecer correctamente la Integral Definida que permite calcular el área superficial del sólido de revolución referido a causa de errores de varios tipos: (a) se observó que cuatro estudiantes no contestaron el problema (posiblemente no lo intentaron o no les alcanzó el tiempo); (b) aunque no se detectó error alguno en el procedimiento de dos de ellos, dejaron el desarrollo inconcluso; (c) 11 cometieron algún error algebraico y eso ocasionó que obtuvieran una Integral Definida que no resuelve el problema planteado en la evaluación; (d) tres calcularon el volumen del sólido de revolución (problema que se discutió en clase); (e) tres calcularon el área bajo la curva (problema discutido en clase); (f) siete calcularon la longitud de arco de la curva con la intención de utilizar este resultado en el cálculo del área superficial; (g) un estudiante realizó una aproximación del área superficial, sin establecer la Integral Definida y (h) uno más no mostró el desarrollo de su procedimiento, solamente el resultado.

Con todo, se observó que algunos los estudiantes no utilizaron la rúbrica como una guía para el establecimiento de la Integral Definida para la resolución del problema del cálculo del área superficial, a pesar de que el profesor permitió su uso durante la resolución del examen.

5. Análisis de resultados

El hecho de que uno de cada siete estudiantes logre establecer la Integral definida con la cual calcular el área superficial de un sólido de revolución indica que la implementación del acercamiento en la instrucción ha permitido a algunos estudiantes abordar exitosamente un problema en un contexto distinto a lo que se cubrió en clase (5 de 35). Sin embargo, cabe señalar que en todos los problemas abordados, tanto en clase como en las evaluaciones requieren de la partición del todo de una misma manera (dividir un intervalo del eje x y a partir de ello, deducir sus contrapartes para y y de ahí caracterizar un elemento diferencial de la magnitud a calcular: longitud de arco, área bajo la curva, volumen del sólido de revolución y área superficial del sólido de revolución). En los casos en los que la partición se deba realizar de una manera distinta (por ejemplo, formando anillos concéntricos), los estudiantes deberán abordar la problemática con una estrategia que no han visto y, en estos casos, ellos tendrán que identificar que la forma de dividir al todo debe cambiar. Por tanto, es recomendable estudiar los casos en los que los tipos de problemas requieren de una partición distinta a la que se ha discutido en este trabajo.

También es importante resaltar que una buena fracción de estudiantes calcula área bajo la curva (3 de 35) o el volumen de un sólido de revolución (3 de 35) o la longitud de arco de la gráfica involucrada en el problema (7 de 35), en lugar de calcular el área superficial del sólido de revolución. Esto no puede atribuirse a que los estudiantes confundan el problema, pues se les explicó a cada uno lo que éste pedía. Posiblemente esto se daba a una inercia que puede adjudicarse, al menos parcialmente, a las prácticas de los cursos preuniversitarios tradicionales de Cálculo, en los que se envía a los estudiantes el mensaje de que para calcular un área basta integrar la función dada, cuando esto no es necesariamente cierto. Respecto de los acercamientos tradicionales se ha reportado que en ellos con frecuencia se promueve el significado de la Integral a partir del cálculo de áreas (Cordero, 2003; Thompson, Byerley y Hatfield, 2013), lo cual parece ser una consecuencia de un desequilibrio entre las componentes conceptual y algorítmica (Chappell y Killpatrick, 2003; Mahir, 2009; Muñoz-Ortega, 2000; Petterson y Scheja, 2008).

El acercamiento planteado en Salinas et al (2012) tiene una carga conceptual a la Integral Definida de funciones de una variable, pero la costumbre del uso de las fórmulas de manera indiscriminada para resolver problemas (ocasionado por una enseñanza mecanicista, de acuerdo con Alanís y Soto (2010)), es muy fuerte en algunos estudiantes, según se ha evidenciado en este trabajo. Esta última afirmación tiene su base en el hecho de que a pesar de que se hizo énfasis durante las sesiones de instrucción en que la rúbrica era una guía para resolver problemas del mismo tipo, algunos estudiantes no la consideraron para la resolución del problema (aún para el problema que resolvieron: cálculo del área bajo la curva o volumen del sólido de revolución).

6. Conclusiones

Después de analizar los resultados obtenidos en la evaluación aplicada a los participantes, se encontró que uno de cada siete estudiantes establece la Integral Definida con la cual se calcula el área superficial de un sólido de revolución; pero tres de los 35 participantes logran además calcular el valor numérico de dicha área. Se puede afirmar que prácticamente, uno de cada tres estudiantes no logra establecer la Integral Definida debido a que comete errores algebraicos (generalmente el profesor de matemáticas da por sentado que el estudiante tiene suficientes conocimientos y habilidades algebraicas, pues es uno de los prerrequisitos para los cursos de Cálculo). Es conveniente por tanto, realizar una evaluación diagnóstica al inicio del curso y sugerir a los estudiantes que lo requieran, de acuerdo con su resultado, que refuercen los conocimientos previos requeridos para el curso.

Soto y Alanís indican que “históricamente, las dificultades ocasionadas por la complejidad de los conceptos matemáticos sobre los cuales descansa el proceso de integración (particularmente el infinito), fueron evadidos –en cierta medida– por medio de un proceso de aproximación a la magnitud que se desea calcular” (Soto y Alanís, 2014, Pág. 19). El planteamiento propuesto en Salinas et al (2012), en efecto, inicia con una aproximación a la magnitud que se va a calcular dividiendo el todo en un número manejable de partes. Esto podría explicar por qué algunos estudiantes adquieren un esquema invariante de solución que les permite abordar exitosamente el problema del cálculo del área superficial de un sólido de revolución.

Tras la implementación del acercamiento planteado en Salinas et al (2012) al concepto de Integral Definida de funciones de una variable, se pueden ver resultados alentadores que invitan al desarrollo de un estudio a profundidad que permita explicar por qué algunos estudiantes sí logran resolver problemas que requieren del uso de la Integral Definida que nunca habían visto y cómo puede incrementarse esta fracción de estudiantes. Esa investigación se está llevando a cabo actualmente.

7. Bibliografía, Referencias y Notas

Alanís, J. y Soto, E. (2012). La Integral de funciones de una variable: Enseñanza Actual. *El Cálculo y su Enseñanza, 3*(1), 1-6.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del Cálculo: Problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. Gómez, P. (Eds.). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática*. México: Grupo Editorial Iberoamericano. 97-140.

Chappell, K.K., y Killpatrick, K. (2003). Effects of concept-based instruction on students' conceptual understanding and procedural knowledge of Calculus. Primus: Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies, 13(1), 17-37.Cordero, F. (2003). *Reconstrucción de significados del Cálculo Integral: La noción de acumulación como una argumentación*. México, DF: Grupo Editorial Iberoamérica, SA de CV.

Mahir, N. (2009). Conceptual and procedural performance of undergraduate students in integration. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 40*(2), 201-211.

Maggelakis, S. y Lutzer, C. (2007). Optimizing student success in Calculus. *PRIMUS: Problems, Resources and Issues in Mathematics Undergraduate Studies, 17*(3), 284-299.

Muñoz, O.G. (2000). Elementos de enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el Cálculo Integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 3*(2), 131-170.

Petterson, K., y Scheja, M. (2008). Algorithmic contexts and learning potentiality: A case study of students' understanding of Calculus. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 39*(6), 767-784.

Salinas, P. y Alanís, J.A. (2009). Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del Cálculo dentro de una institución educativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 12*(3), 355-382.

Salinas, P., Alanís, J.A. y Pulido, R. (2011). Cálculo de una variable: Reconstrucción para el aprendizaje y la enseñanza. *Didac, 56-57*(62-69).

Salinas, P., Alanís, J.A., Garza, J., Pulido, R., Santos, F., y Escobedo, J. (2012). *Cálculo Aplicado: Competencias matemáticas a través de contextos*. México, DF: CENGAGE Learning.

Soto, E., Alanís, J. (2014). Antecedentes y surgimiento de la Integral acorde a Leibniz. *Eureka, 31*(4), 7-23.

Steen, L.A. (2003). Analysis 2000: Challenges and opportunities. En D. Couray, D. Furinghetti, F., Gispert, H., Hodgson, B.R., Schubring, G. (Eds.), *One Hundred Years of L'Enseignement*

Mathèmatique: Moments of Mathematics Education in the Twentieth Century. Monograph No. 39 (pp. 91-210). Génova: L'Enseignement Mathèmatique.

Thompson, P.W., Byerley, C., y Hatfield, N. (2013). A conceptual approach to Calculus made posible by technology. *Computers in the Schools, 30*, 124-147.