LA NOCIÓN DE TANGENTE EN LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

Laurent Vivier

Laboratoire André Revuz – Université Paris Diderot
I.U.F.M. Centre Val de Loire – Université d'Orléans

laurent.vivier@univ-orleans.fr

Resumen: En Francia, la introducción de la derivación se apoya fuertemente en la consideración de rectas tangentes a una curva ¡Pero la noción de tangente no es definida en forma general! Investigadores en didáctica de las matemáticas abordaron este problema. Una de sus conclusiones fue la necesitad de enseñar la noción de tangente para, después, utilizarla en la introducción de la noción de derivada. Con un punto de vista didáctico e histórico, propondremos una solución al problema de enseñanza planteado. Al adaptar el método de René Descartes, se define fácilmente la noción de tangente a las curvas algebraicas. Esta etapa es importante para cambiar las concepciones de muchos de los estudiantes, que tienen una idea global, y no local, de la tangente. Luego, una introducción de la nueva noción de derivación es posible a partir de la noción de tangente, cuando la tangente ha adquirido el estatuto de objeto matemático efectivo.

Introducción

Se estudia en este artículo la noción de tangente en la enseñanza al nivel medio superior. Nuestro principal centro de interés es la enseñanza de la noción, que provoca dificultades, y también consideramos brevemente el aspecto histórico del desarrollo de la noción, mismo que permite solucionar el problema de enseñanza observado.

En la primera parte presentamos un estado del arte de la noción de tangente en la enseñanza en Francia. Se nota que las conclusiones de investigadores en didáctica de las matemáticas, algunas hechas desde hace decenas de años, siempre siguen validas. En particular, en base a los trabajos de Castela (1995), hemos propuesto un test que muestra que, antes del estudio de un capítulo sobre la derivación, la noción de tangente aparece problemática aun en clases de preparatoria científica. Eso no es sorprendente, puesto que sólo tangentes a círculos son objetos de enseñanza antes de la preparatoria.

El mayor problema es el estatuto de la noción de tangente, al menos ambiguo en el segundo año de la preparatoria: Una definición efectiva de la tangente procede de la derivada en un punto, mientras la derivación se introduce a partir de un trabajo sobre tangentes. Claramente hay un problema lógico: No se puede usar una noción que no ha sido previamente construida y que da lugar a concepciones lejos de ser adecuadas Por eso y con el fin de solucionar este problema en la organización de los cursos, proponemos una enseñanza alternativa de la noción de tangente. No es

un trastorno del programa curricular, sino una visión intermedia, procurada por las tangentes a las curvas algebraicas.
En la segunda parte discutimos unos aspectos didácticos e históricos, que constituyan metas en la nueva enseñanza que proponemos. La tercera parte tiene como propósito la introducción y el desarrollo de la noción de tangente a las curvas algebraicas, en relación con los conocimientos anteriores, es decir las tangentes a circunferencias. Finalmente en la cuarta parte se propone una nueva introducción de la derivación apoyándose fuertemente sobre la noción de tangente tal como se ha construido.
El asunto es tratado tal como se presenta en Francia, pero la mayoría de los puntos examinados son válidos para otros sistemas de enseñanza.

1. Las tangentes en la enseñanza

A nivel de la secundaria

En Francia, la noción de tangente aparece en el grado ocho de la escolaridad básica (tercer año de la secundaria francesa). Se trata de definir la tangente a un círculo en un punto. En los seis libros de texto que estudiamos se proponen una u otra de las dos concepciones siguientes:

C1: Una recta que sólo tiene un punto de intersección con el círculo,

C2: Una recta perpendicular al radio en un punto de la circunferencia.

De los seis libros estudiados, tres (*Phare*, *Transmath* y *Bréal*) escogen C1 como definición y expresan C2 como propiedad, uno (*Diabolo*) hace la elección inversa, y los dos demás (*Triangle* y *Dimathème*) sólo institucionalizan C2 aunque C1 está presente como observación o en una actividad de introducción.
Entonces no hay una definición escogida por unanimidad, pero la importancia de estas dos concepciones de la tangente se destaca con evidencia. Se entiende el interés de C2 para el trabajo geométrico, y el vinculo entre C1 y una concepción antigua (véase el Libro III de los *Elementos* de Euclides). En la resolución de las tareas geométricas propuestas por los libros de texto, sólo hace falta usar C2, y C1 únicamente sirve en actividades de introducción en las que prevalece la visualización, misma que la educación de este nivel pretende reducir. En estas actividades de introducción se esboza la coordinación entre ambas concepciones: La coordinación siempre se basa en la visualización, aun cuando esta se oculta en el libro *Phare*.
Dentro del marco de los paradigmas geométricos (Houdement & Kuzniak, 2000, 2006 ; Kuzniak 2009), C1 se puede interpretar como definición de la tangente en el paradigma de la Geometría I, y C2 como definición de la tangente en el paradigma

de la Geometría II. En fin, las concepciones C1 y C2 tienen una utilidad local. No se generaliza[1] C2, y C1 sólo se generaliza a las cónicas.

El segundo año de la preparatoria científica

No se dice nada nuevo sobre el tema durante casi tres años. Otra vez se presenta la noción de tangente en el curso sobre las derivadas en el segundo año de la preparatoria (grado 11). Nuestra elección de estudiar el segundo año de la preparatoria científica se aclara por dos motivos: el primero es la importancia que tiene la noción de tangente a una curva por ser recurrente en los programas curriculares científicos, la segunda es que así consideramos de inmediato a los estudiantes más metidos en las matemáticas enseñadas.
En los programas curriculares del segundo grado de la preparatoria científica, la tangente sólo aparece en un párrafo que refiere a una definición subordinada a la derivabilidad. Sin embargo se precisa que la noción de derivada debe ser introducida por una aproximación cinemática o gráfica. En este estudio consideramos la aproximación gráfica, con la posibilidad expresada en los programas curriculares de usar la computación para mostrar zooms sobre una curva.
Los contenidos de los libros de texto[2] son muy similares: Después de un capítulo sobre la parábola[3] y las funciones cuadráticas está el capítulo sobre la derivación. Para introducir esta última se usan de manera sistematizada tres aproximaciones: cinemática, gráfica con zooms y gráfica con límites de secantes. Por supuesto aparece en el curso la definición de las tangentes a las curvas como la currícula lo prescribe. Surge un problema de progresión: La noción de derivada se apoya fuertemente sobre la noción de tangente, mientras que es a partir de la derivación que se define la tangente.
También hay, sin ningún vínculo con el curso sobre las funciones, un capítulo sobre el círculo con en particular las ecuaciones de círculo. En él se trabaja la noción de tangente al círculo, con la concepción C2 de la secundaria, con la ayuda del producto escalar. Casi no se usa en los libros de texto la nueva noción de tangente, desarrollada en el capítulo sobre la derivación.
Después de las concepciones *antiguas* C1 y C2 de la secundaria, los libros de texto presentan dos nuevas concepciones institucionalizadas de la noción de tangente:

C3: límite de las rectas secantes en un punto de la curva;

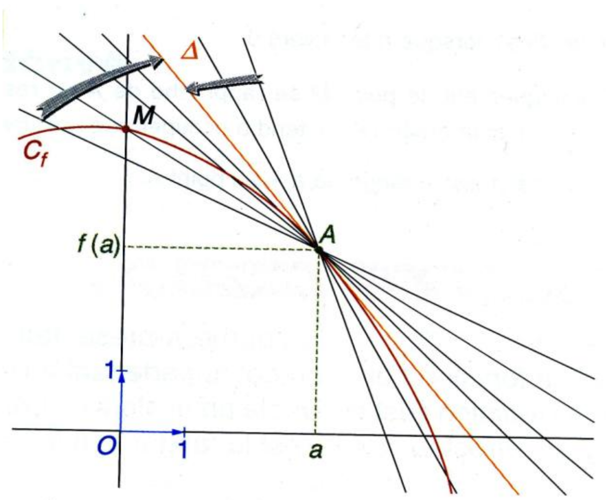
[1] Nos limitamos al nivel medio superior: la geometría euclidiana, en la que se considera un único producto escalar.
[2] Los libros de texto estudiados son: Bréal, Déclic, Fractale, Indice, Math’x y Repère.
[3] A veces, en libros de texto, hay algunos ejercicios sobre las tangentes a una paráboladonde se usa la concepción C1 de la tangente, pero sin nexo con la derivación.

C4: recta que pasa por un punto de la curva, y cuya pendiente es el número derivado.

La aproximación C3 por límites de rectas, a pesar de que se encuentra en todos los libros de texto, no está explícitamente en los programas curriculares, no permite resolver problemas y se abandonará luego de la introducción del número derivado. Sólo tiene un valor de ostentación para introducir la tangente con el objetivo de relacionar su pendiente con el límite de la tasa de crecimiento

– C3 parece tener el mismo papel de ostensión que tenía C1 en la secundaria.

La figura 1 da un ejemplo de lo que se encuentra en libros de texto franceses:



« *En bougeant le point M vers A, la sécante tend vers la tangente.* »
Traducción: *Al mover el punto M hacia A, la secante tiende hacia la tangente.*
(Déclic 1^{re} S, p. 71)

Figura 1

¡Así la recta (*OA*) no sería una secante a la curva! Se observa que de forma implícita y local, la palabra “secante” ha cambiado de significado.

Las concepciones de la noción de tangente

El capítulo sobre la derivación marca una ruptura con los aprendizajes de los años anteriores. Ahora bien, la noción de tangente sólo se ha considerado en el caso de círculos. Resulta que la enseñanza de la derivada se apoya sobre concepciones *intuitivas* de la noción de tangente. Más allá de la flagrante carencia de rigor matemático, uno no puede dejar de pensar que las ideas intuitivas de los estudiantes se inspiran en gran parte de las concepciones C1 y C2. Estas últimas no son adecuadas para el cálculo. Además la introducción de la derivación se basa sobre C3, que bien pueda estar lejana de las concepciones iniciales de los estudiantes. ¿Por qué aparecería C3 espontáneamente?

En fin en la enseñanza en Francia, se observan cuatro concepciones institucionalizadas de la noción de tangente: dos del marco geométrico, C1 y C2, y dos del marco analítico, C3 y C4. Nunca se trabajan los vínculos entre ambos grupos. La desconexión de los contenidos matemáticos propios de los marcos en

los que se considera la noción de tangente podría reinterpretarse por la desconexión de las *praxeologías* (Barbé, Bosch, Espinoza & Gascón, 2005 ; Garcia, Gascón, Ruiz Higueras & Bosch, 2006). En particular, no se enseña que la nueva noción, con la derivación, generaliza la definición de tangente a un círculo.
Los estudiantes en general sólo tienen una concepción parcial, a menudo falsa, de la noción de tangente. Los estudios de Sierpinska (1985) y de Castela (1995) mostraron una gran disparidad de concepciones. En particular la percepción global C1, basada en la tangente al círculo, es frecuente y tenaz[4].
Retomamos el test central del estudio de Castela (1995), en el que se proponen una curva y una recta, y se pregunta si la recta es o no es tangente a la curva. Este nuevo test (cf. annexe A) propone una curva y un punto, y pide trazar la tangente si es posible y si no aclarar por qué. Se aplicó el test en tres clases de segundo año de preparatoria científica de tres ciudades diferentes, sea una población de 88 estudiantes. La aplicación duro 20 minutos y tuvo lugar en octubre de 2009, antes de cualquier enseñanza de la derivada.
Los primeros resultados muestran un gran número de estudiantes teniendo concepciones erróneas sobre la noción de tangente (cf. Anexo B)

- 33% tienen concepciones relacionadas con el círculo (C2) : o bien escriben que es imposible trazar una tangente porque no es un círculo, o bien trazan una perpendicular a un radio imaginario;
- 27% tienen una concepción global (C1);
- 28% declara imposible el trazar una tangente a un trozo rectilíneo;
- 27% corresponden a diversos casos particulares.

Por supuesto, estas concepciones no se excluyen mutuamente, y a menudo se observan asociaciones y hasta contradicciones. Sin embargo, más de la mitad de los estudiantes (51%) tienen concepciones de la noción de tangentes acorde a la enseñanza secundaria (C1 o C2). Pues, sólo 22% de los estudiantes tienen las concepciones que parecen adecuadas al marco gráfico. En fin, la introducción de la derivada por las tangentes sólo puede ser provechosa para uno de cada cinco estudiantes en clases científicas.
Se observa que ningún estudiante muestra espontáneamente la concepción C3 por el límite de tangentes. A lo más se acercaría de ella un estudiante que traza una secante con dos puntos próximos (cf. Anexo B-e). Se nota que el uso del término “secante” es muy problemático. Además del problema señalado arriba a propósito de la figura 1, si *M* es un punto de la curva 6 próximo de *K*, ¿se puede decir que *KM* es una secante?

[4]Esta percepción se puede reforzar por la propuesta de unos libros de texto, de determinar las tangentes a las parábolas antes del capítulo sobre la derivación.

Aun cuando el caso de una curva con trozo rectilíneo no se considera en los libros de texto, la aproximación C3 no puede sino reforzar el obstáculo de la tangente a una curva de este tipo. Del punto de vista matemático, como aproximación a la noción de derivada se usa la noción de tangente, pero dado que esta no es definida, se considera el límite en el espacio proyectivo real de dimensión uno. Tal fuga en adelante no es razonable, y debemos de constatar que la aproximación C3 no es pertinente en el problema que nos ocupa.
Así no solamente 4/5 de los estudiantes considerados no tienen concepciones adecuadas para aprovechar la introducción del cálculo propuesta en la enseñanza, pero además se usa una nueva concepción C3 que refuerza los obstáculos.
Hay que resolver problemas importantes, y se tienen que resolver antes de sumergir a los estudiantes en el gran baño del cálculo. Con este objetivo partiremos por lo esencial de la concepción C1 presentada en la secundaria y propondremos un proceso didáctico cuya culminación será C4. En este proceso usaremos una concepción intermedia que permitirá dar una existencia matemática consistente a la noción de tangente, que generaliza C1 y C2. Por las numerosas razones señaladas arriba, dejaremos a un lado la concepción C3.

2. Metas para una enseñanza alternativa de las tangentes

Antes de explicitar nuestra propuesta alternativa para la enseñanza de la tangente y de la derivación, presentamos tres enfoques que nos guiaron.

El proyecto AHA

Para resolver los problemas del aprendizaje del cálculo y del análisis matemático, se propone en el proyecto AHA (Aproximación Heurística del Análisis) repensar la enseñanza del cálculo en su globalidad. Se trata de un ambicioso proyecto propuesto por investigadores en didáctica. Se publicaron en 1999 un libro de texto y una guía metodológica.
Con respecto a la enseñanza de las tangentes y conforme a las investigaciones didácticas señaladas en la sección 1, los autores del proyecto proponen un trabajo sobre esta noción antes de entrar en el cálculo. Se apoyan en la parte de grado 1 (o: parte afín) en 0 de un polinomio: La ecuación de la tangente en $(0, y_0)$ a la gráfica del polinomio $f(x) = y_0 + y_1x + x^2\, g(x)$ es $y = y_0 + y_1x$. Esta técnica de obtención de las tangentes no se generaliza a curvas más generales ni a puntos de abscisa diferente de 0. Se trabaja con la noción de tangente, pero la noción aun no tiene su definición matemática.

La única expresión que se menciona, sin definirla matemáticamente, es “una recta que roza con la curva[5]”. Además la relación con una aproximación afín no es tan evidente. Si no se dan precisiones sobre el significado del símbolo “≈”, muchas aplicaciones afines cumplen con la condición escrita en AHA (1999, página 56): $1 - x \approx 1 - x + x^2 + x^3$ en la vecindad de cero. Otros problemas se encontrarían al usar la “mejor aproximación afín”, cómo lo nota Perrin-Glorian (1999). Excepto este elemento puntual relacionado con la noción de tangente, el proyecto es de gran interés y nuestras inquietudes son muy vecinas de las del proyecto AHA:

- necesidad de la resolución de problemas: Aun cuando no aparece en este artículo, la consideramos como esencial para entrar en un proceso de aprendizaje;
- un trabajo intermedio en el marco algebraico: Eso es el corazón de nuestra propuesta (cf. La sección siguiente);
- necesidad de abandonar la concepción global C1 al considerar un polinomio de grado 3 (Schneider 1991, 2001): Nos inspiraremos de eso;
- apoyo sobre el desarrollo histórico al situar los límites en el centro del proceso (AHA 1999): También nos apoyaremos sobre la historia de las matemáticas, pero tomaremos una referencia no considerada por los autores del proyecto AHA.

Los juegos local/global y cálculo exacto/cálculo aproximado

Maschietto (2002, 2004) ha organizado secuencias de enseñanza en las que se usan zooms sobre una curva. Esto evidencia la importancia del juego inducido entre los puntos de vista local y global.

Presentamos un primer ejemplo de zooms en el que se explotan las potencialidades de software de traza de curvas – aquí se usó *GeoGebra* – para la curva de ecuación $y = 2x^3 - x^2 - x + 1$ en el punto $A(1,1)$.

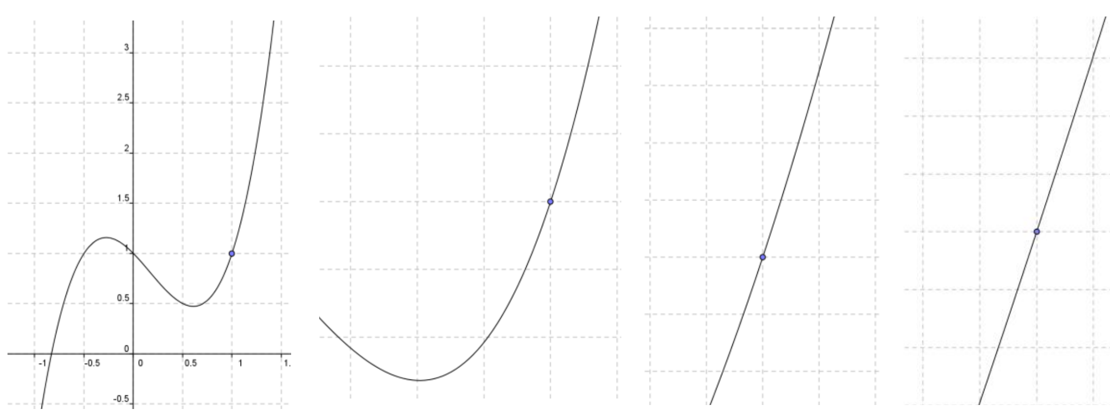


Figura 2-a rejilla .5×.5 *Figura 2-b rejilla .05×.05* *Figura 2-c rejilla .02×.02* *Figura2-d rejilla .01×.01*

[5] En el caso peculiar de una curva con un trozo rectilíneo que ya señalamos, no se usará el verbo “rozar”.

Después de nueve zooms centrados en el punto marcado en la figura 2-*a*, una recta aparece, en la figura 2-*d* – una propiedad de las curvas que Maschietto (2002, 2004) llama *micro-linealidad*.
Así se puede determinar, en el punto señalado, la ecuación de la tangente – una de las tareas dadas a los estudiantes por Maschietto. El software permite también trazar la tangente de forma satisfactoria: se traza la recta punteada entre el punto considerado y otro punto marcado por una cruz (figura 2-*d’*).
Luego por zooms inversos se regresa a la ventana inicial, donde ahora aparecen a la vez la curva y su tangente (véanse las figuras 2-*d’* a 2-*a’*).

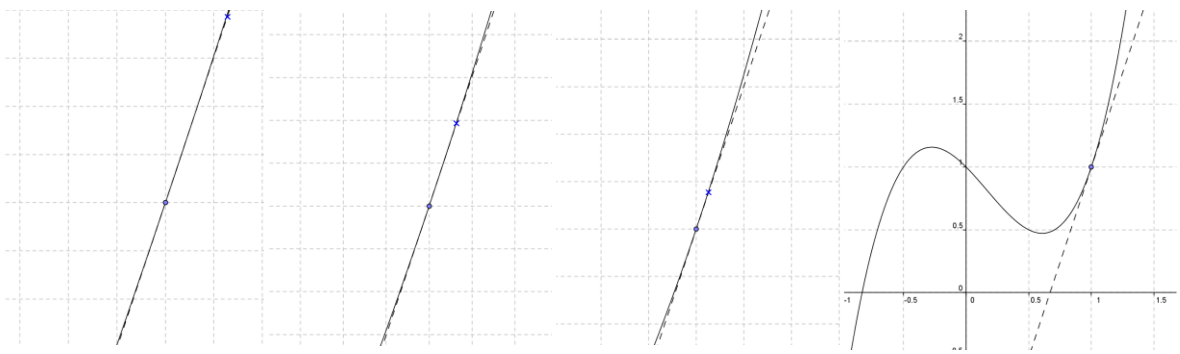


Figura 2-d’	*Figura2-c’*	*Figura2-b’*	*Figura 2-a’*
rejilla .01×.01	*rejilla .02×.02*	*rejilla .05×.05*	*rejilla .5×.5*

Este juego entre lo local y lo global es esencial según Maschietto para entender la noción de tangente. Una tangente es un objeto global (véase la figura 2-*a’*) cuya definición es local (véase la figura 2-*d’*). Con respecto a eso, es imprescindible una cita de Perrin-Glorian (1999) en su conclusión sobre las aproximaciones afines de las curvas: “La tangente ¡verdaderamente es una noción local! […] El único uso verdaderamente adecuado de la computadora para hacer aparecer de forma natural la tangente sería de hacer zooms hasta ver la curva cambiarse en recta[6].”
Este juego entre lo local y lo global es también esencial para entrar en el cálculo como lo recomienda la Comisión de Reflexión sobre la Enseñanza de la Matemática en Francia dirigida por Kahane (2002). Por otro lado se sobraya la importancia de los órdenes de magnitud en el cálculo numérico, mismos que constituyen un nuevo juego, entre cálculo exacto y cálculo aproximado.
Además de los zooms que usaremos plenamente, nos apoyaremos sobre estos dos juegos: global/local y cálculo exacto/cálculo aproximado.

[6] Nota del traductor (F. Pluvinage): Perrin-Glorian usa el condicional, pero este zoom ya había sido publicado en libros de texto, como el de segundo año de preparatoria del IREM de Strasbourg (1982, *Mathématiques : Analyse et Statistiques*, *1*^{res} *S et E*, Istra, Paris, p. 128).

Una perspectiva histórica

Una perspectiva histórica permite delimitar mejor lo que puede ser una propuesta alternativa para la enseñanza de las tangentes y de la derivación. Cuando se ponen uno frente al otro el encadenamiento de las nociones enseñadas y de las nociones según su aparición en la historia, aparece que falta una etapa del desarrollo histórico: los trabajos de Descartes. Descartes (1673) define una clase de curvas, para las que está a disposición un método de determinación de las tangentes. Eso es un avance decisivo, que va mucho más allá de la pequeña clase de las cónicas.

También permite el método de Fermat encontrar fácilmente las tangentes a las curvas algebraicas. Pero este método es difícil de explicar, puesto que ya se encuentra en gran parte en el análisis. En efecto, la *"adigualación"* consiste en hacer como si la curva y su tangente estuvieran confundidas, y no es mera casualidad si el método se adapta a ciertas curvas trascendentes como es la cicloide al contrario del método de Descartes (Cercle d'Histoire des Sciences, 1999). Usando los términos de Chevallard (1999) podemos decir que el método de Fermat es una *técnica* algebraica cuya *tecnología* es analítica. Entonces es un método que da los resultados esperados, pero que no permite entender porque funciona y tampoco permite dar una definición conveniente de la tangente a una curva. Y Fermat, al contrario de lo que hace Descartes, no da una clase de curvas a la que su método permite dar tangentes.

Por el contrario, el método de Descartes es completamente algebraico y fácil de entender. Por lo esencial, el método se apoya en la concepción antigua C1, pero desde el punto de vista local. Lo encontraremos en la sección siguiente. No desarrollaremos los enfoques de Newton y Leibniz, que permitieron el surgimiento del cálculo (véase por ejemplo Barbin, 2006). Sólo especificamos algunos puntos sobre los que nos apoyaremos.

Leibniz se sitúa en oposición a Descartes, al criticar el rango débil de las meras curvas *geométricas*. Sin embargo se inscribe Leibniz en la lógica cartesiana, al querer definir las tangentes para una amplia clase de curvas.

Más específicamente, la determinación de las tangentes muestra también similitudes entre los trabajos de Descartes y de Leibniz. Ambos se fundamentan sobre el mismo principio: Por un punto de una curva dada pasan rectas que constituyen un haz de rectas concurrentes, la tangente es una de ellas que tiene una propiedad particular. Esta propiedad es el corazón de los trabajos de Leibniz como de Descartes sobre las tangentes. Todo el problema es un problema de caracterización y de selección de una recta dentro de las secantes, donde por supuesto la naturaleza de la curva juega un rol central.

Aquí vale la pena destacar que se trata de una verdadera secante, es decir una recta que pasa por el punto en el que se quiere determinar la tangente. En particular, la aproximación por *el límite de secantes*, presente en todos los libros de texto actuales, parece completamente ausente de los trabajos del siglo XVII – aun cuando algunas concepciones de Newton (1740) se acercan de ella. Además, la caracterización de una recta dentro de las secantes permite evitar uno de los problemas que resultan de la concepción C3, problema mencionado por Sierpinska (1985) citando a estudiantes: "Cuando se llegará al punto *A*, sólo se tendrá un punto, y por un punto podemos trazar muchas rectas."

En el apartado que sigue, proponemos la consideración del problema desde la perspectiva siguiente: Sólo hay un punto en el caso de la tangente, lo que induce la caracterización de la tangente en el haz de rectas concurrentes.

3. Las tangentes a las curvas algebraicas

Antes de entrar en el cálculo, vamos a construir en este apartado una noción de tangente que va mucho más allá de los meros círculos, sin restringirse a las cónicas como se hizo por ejemplo en Italia y Grecia. Se explota la idea expresada por Ibarra y Velásquez (2007): primero hacer emerger los conceptos en el marco algebraico, antes de entrar en el marco analítico.
La elección de las curvas algebraicas no le debe al azar, porque tenemos métodos simples de obtención de las tangentes, como el método de Descartes. Al inicio, el método consiste en buscar un círculo tangente a una curva. Pero es más sencillo buscar directamente una recta, así como ya en 1849 lo propuso Florimond de Beaune (Barbin, 2006, p. 216). Es sencillo a la vez de entender la técnica y de usarla. En particular, no hay ninguna noción nueva que incluir en el currículo. Se usa plenamente el álgebra enseñada[7] hasta el grado 11: ecuaciones de curvas, cálculo algebraico, ecuaciones y sistemas de dos ecuaciones.

Damos sobre ejemplos detalles de tres aspectos principales de nuestra propuesta. En Anexo C aparecen otros ejemplos que ilustran el alcance del método de Descartes.

El método: El ejemplo de la función cuadrado

[7] Sin embargo sería preciso insistir sobre ciertas nociones, como las ecuaciones de curvas – sin limitarse en los círculos – y la factorización por (x – *a*) de un polinomio que tiene *a* como raíz.

Consideremos una parábola, la curva algebraica más sencilla después de la recta. Para determinar la tangente a $y = x^2$ en un punto $A(a,a^2)$, caracterizamos la tangente dentro de las rectas que pasan por A. Entonces consideramos las secantes en A que tienen una ecuación de la forma $y = k(x–a)+a^2$.

1. Se escribe el sistema de las dos ecuaciones para identificar los puntos de intersección:

$$y = x^2 \qquad y = k(x–a)+a^2$$

2. Se escribe la ecuación que da las abscisas de los puntos de intersección:

$$x^2 = k(x–a)+a^2$$

Puesto que $x=a$ es una solución, se factoriza $(x–a)$:

$$(x–a)\cdot(x+a–k) = 0$$

3. Se obtienen las soluciones $x = a$ y $x = k–a$, que corresponden a dos puntos de intersección entre la curva y una recta pasando por A (cf. figura 3). Dado que se quiere la tangente, hace falta que sólo se tenga un punto de intersección. Por identificación de los puntos obtenidos, resulta que $a = k–a$, sea $k = 2a$.

Entonces la ecuación de la tangente es: $y = 2a(x-a)+a^2$.

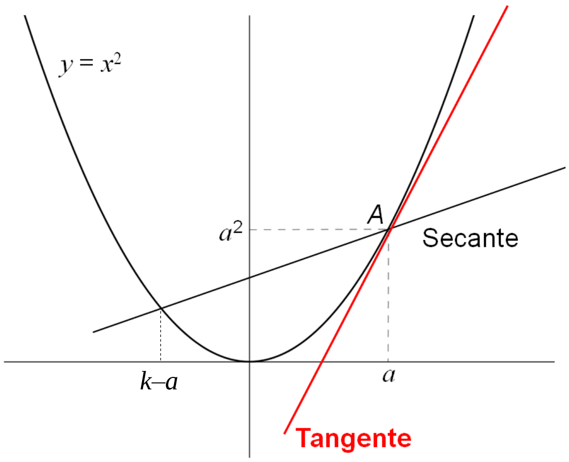


Figura 3

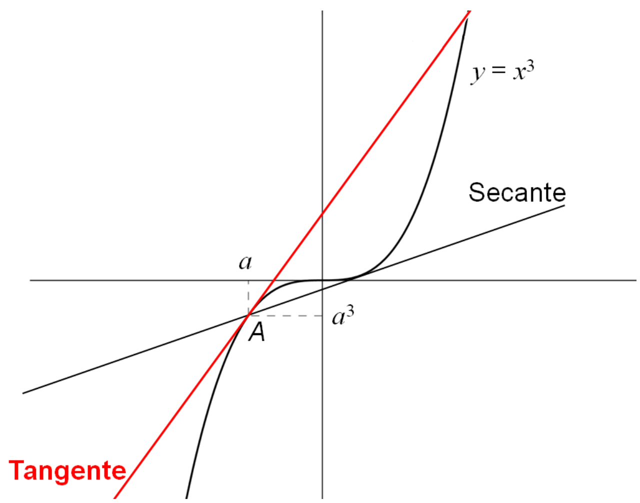


Figura 4

Antes de ir más adelante, hacemos algunas observaciones:

- El ejemplo de la parábola se apoya en la noción C1 de a secundaria, entonces no requiere de parte de los estudiantes ninguna nueva concepción de las tangentes. No hay nada nuevo, todas nociones necesarias se enseñan en el grado 10.
- Se obtiene la tangente al buscar una solución doble.

- La escritura como funciones de las rectas que pasan por *A* tiene el interés de evidenciar que sólo hace falta determinar el parámetro *k* para encontrar la tangente dentro de las rectas del haz.
- La forma funcional presenta la desventaja de no incluir las rectas *verticales*. Pero se puede observar que el punto de intersección de la parábola con la recta de ecuación $x = a$ no es doble, lo que justifica *a posteriori* la forma funcional. Para facilitar la comprensión, será preferible reconsiderar este hecho en el momento de determinar las tangentes a los círculos.
- Se puede reducir el tratamiento del 3, porque corresponde a anular el secundo factor cuando $x = a$. Con esta observación, el método sigue eficaz para curvas de grado 3 o superior, que no dan certeza de obtener todas las soluciones.

Localización de la mirada: el ejemplo de la función cubo

Más generalmente, las curvas de la forma $y=f(x)$, donde f es un polinomio, conducen siempre a la búsqueda de una solución a lo menos doble[8]. Por otro lado, se obtiene la formula de la derivada de un polinomio (véase el Anexo C-*a*) En particular, para una ecuación como $y = x^3$, la técnica algebraica es idéntica:

1. Sistema: $y = x^3$; $y = k(x–a)+a^3$,
2. Ecuación y factorización: $(x-a) \,.\, [x^2+ax+a^2–k] = 0$,
3. Anulación en $x = a$ del segundo factor: $a^2+a.a+a^2–k = 0$, y obtención del coeficiente director de la tangente: $k = 3a^2$.

Aun cuando se podría determinar en este caso todas las soluciones de la ecuación, se entiende el interés en reducir el 3 como lo proponemos, al anular el segundo factor sin buscar todos los puntos de intersección. Además eso evita la consideración de soluciones imaginarias. En el marco del aula, se tendría que guiar a los estudiantes para la factorización, y el parámetro *a* debería tener un valor numérico.

Según que lo ha señalado el grupo AHA, el ejemplo estudiado es importante: se muestra que la tangente puede recortar la curva en otro punto. El tercero punto de intersección se obtiene al prolongar el trazo de la tangente sobre la figura 4 (véase también el Anexo B-*b*). Entonces la propiedad que permite definir y obtener las tangentes es local, lo que autoriza al estudiante desprenderse de la concepción rudimentaria C1.

[8] Por ejemplo en el caso considerado de la función cubo, cuando $a=0$, el punto de intersección corresponde a una solución triple.

En algunos países, como Italia o Grecia, este tipo de procedimiento se enseña a veces para las cónicas. Como consecuencia, los estudiantes tienen una conducta automatizada: Escribir el sistema y anular el discriminante Δ de la ecuación que resulta del sistema, sin factorización (Maschietto, 2004). Pero esta técnica tiene un campo de aplicación muy limitado, dado que sólo se aplica a las curvas algebraicas de grado no mayor que 2. Y es sumamente importante no limitarse a las cónicas, puesto que, con estas curvas, la concepción global C1 es válida. Hace falta considerar casos diferentes para, entre otro, localizar la mirada.

El caso del círculo o el problema de la generalización

Presentamos aquí en el caso del círculo una técnica importante para la enseñanza. La complejidad del caso genérico viene de la necesaria distinción de los casos particulares de los puntos en los que las tangentes son *verticales*. Por eso estudiamos en dos etapas el caso de un círculo centrado en el origen de los ejes del plano cartesiano. Se trata de determinar la tangente al círculo de centro O y de radio r en el punto $A(a,b)$ (cf. figura 5). A continuación se usa plenamente la identidad $a^2+b^2 = r^2$.

1. Sistema: $x^2+y^2 = a^2+b^2$; $y = k(x–a)+b$
2. Ecuación y factorización:
$x^2+[k(x–a)+b]^2 = a^2+b^2 \Rightarrow (x–a)\cdot[x+a+k^2 (x–a)+2kb] = 0$
3. Anulación del segundo factor: $a+a+k^2(a–a)+2kb = 0 \Rightarrow k = – a/b$.

Excepto el inicio con la substitución de la expresión de y en la ecuación del círculo, todo es lo mismo de los casos precedentes. Una vez encontrado el valor de k, es decir la tangente, se puede probar el teorema visto en la secundaria. Con el producto escalar $\overrightarrow{OA}.\vec{u}$, donde $\vec{u} = (1, k)$ es un vector director de la tangente en A, se demuestra fácilmente que el radio y la tangente son ortogonales. Entonces se presenta una perspectiva de generalización.

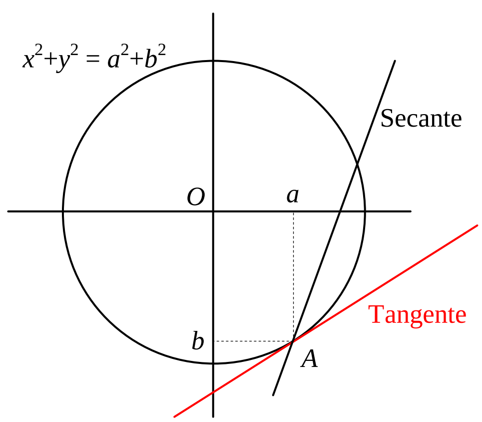


Figura 5

Sin embargo el método parece defectuoso cuando $b = 0$. Pero acabamos de probar que ninguna recta no paralela al eje de las ordenadas es tangente al círculo en el punto B. Por eso, si existe una tangente, sólo puede ser la recta de ecuación $x = a$. Aplicamos otra vez el método:

1. Sistema: $x^2+y^2 = a^2$; $x = a$ 2. Ecuación y factorización: $a^2+y^2 = a^2 \Rightarrow y^2 = 0$

El 3 es inútil aquí, se obtiene un único punto doble de intersección entre la recta considerada, de ecuación $x =$, y el círculo: Entonces es la tangente.

Definición de una tangente – el caso particular de las tangentes a las rectas

El caso particular precedente – las tangentes *verticales* a los círculos – puede parecer abstracto[9], pero es importante por dos razones. La primera es que justifica el método de búsqueda de las tangentes que se apoya sobre las ecuaciones funcionales de las secantes – dejando voluntariamente a un lado las rectas *verticales*. La segunda es que pone énfasis sobre la importancia de la obtención de un punto de intersección de orden al menos 2. Es posible luego un retorno al caso de la parábola, cuya intersección con una recta paralela a su eje de simetría sólo da lugar a un punto simple.

Ahora se puede dar la definición de la tangente que emerge de este primer trabajo algebraico: *Una tangente en un punto de una curva es una secante que tiene con la curva en este punto una intersección de orden de multiplicidad al menos 2.*

El método presentado se puede aplicar a todas las curvas algebraicas. Sin embargo, la solución no necesariamente es doble, y se pueden obtener varias soluciones para el parámetro k, lo que es el caso en puntos múltiples o con semitangentes. El Anexo C da algunos ejemplos. A pesar del amplio alcance del método[10], estudiar curvas más complejas de esta manera algebraica no nos parece útil. Es cierto que el estudio puede ser interesante y rico, pero hace falta tener en cuenta el objetivo: Queremos preparar el terreno para una introducción del cálculo y no desarrollar una enseñanza paralela. En particular, si la definición de la tangente que acabamos de dar es ampliamente suficiente para el trabajo proyectado, seguir estudiando las curvas en el marco algebraico necesitaría esta adaptación: *Las secantes en un punto A de una curva algebraica tienen en A con la curva una intersección del mismo orden de multiplicidad v, excepto a lo más v de ellas, que tienen en A con la curva una intersección de orden de multiplicidad estrictamente superior a v. Son estas últimas las que nombramos tangentes a la curva en A.* En Anexo D se encuentra una justificación de este resultado.

Al contrario, como lo hemos observado en el apartado 1, es preciso un trabajo específico sobre la tangente a una *curva rectilínea*. Usamos el método para

[9] Al usar la caracterización geométrica de las tangentes independiente del sistema de ejes, no sería preciso de considerar este caso.

[10] Determinar k es obtener las raíces de un polinomio en k. En los casos sencillos considerados, esta determinación siempre es posible.

encontrar la tangente a la *curva* de ecuación $ax+by+c = 0$ en el punto $A(x_A,y_A)$. Para evitar de considerar dos casos, suponemos aquí que $b \neq 0$.

1. Sistema: $ax+by+c = 0$; $y = k(x–x_A)+y_A$
2. Ecuación (obtenida por substitución como en los casos de círculos):

$$ax+bk(x–x_A)+by_A+c = 0$$

Dado que $by_A+c = – ax_A$, se obtiene:

$$ax+bk(x–x_A)–ax_A = 0 \Rightarrow (x–x_A)\cdot(a+bk) = 0$$

3. Anulación del segundo término: $a+bk = 0 \Rightarrow k = – a/b$.

La anulación del segundo factor para $x=x_A$ es algo rara, puesto que x no aparece en este factor y que la ecuación desparece por este valor de k. Pero al aplicar el método, supimos determinar una tangente a una recta. Notemos que no se encuentra aquí ninguna adaptación del método. Sin embargo, la aclaración es muy diferente de los demás casos considerados: se pasa de un punto de intersección simple en el caso de las secantes a una infinitud de puntos de intersección en el caso de la tangente, cuya multiplicidad queda misteriosa, porque el grado $– \infty$ del polinomio nulo no aclara nada. Se trata de un caso muy particular.
Por supuesto el caso de las tangentes a las rectas se debe de considerar después de un primer trabajo sobre las funciones sencillas, como son polinomios, funciones racionales, etcétera.

4. Una introducción al cálculo

Después del trabajo algebraico sobre la noción de tangente, el contexto se presenta como sigue:

- La tangente es matemáticamente consistente.
- La visión se ha convertido en mirada local.
- Sólo se tiene que determinar un parámetro para caracterizar la ecuación de una tangente dentro de las secantes.

Podemos apoyarnos sobre estos tres elementos para llegar al límite de la tasa de crecimiento. En este apartado exponemos los grandes rasgos de una posible progresión que conduce al número derivado y a los nexos entre derivada y tangente.
Retomando la idea de la Comisión Kahane (2002) proponemos un cambio de marco al considerar el enfoque del cálculo aproximado. Se puede por ejemplo presentar a los estudiantes una curva trazada en el plano cartesiano y pedirles la

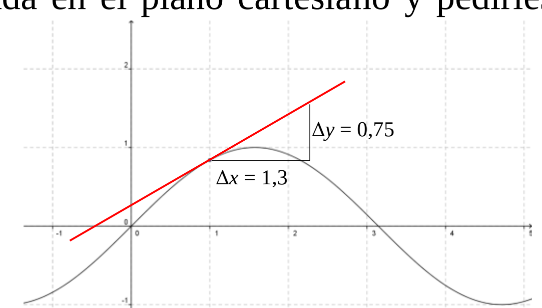


Figura 6

ecuación de la tangente en un punto dado[11]. Para la apropiación de la tarea por los estudiantes, el primer trabajo se puede hacer con papel y lápiz.
Por ejemplo, para la curva de la función seno en $x = 1$, se traza la tangente de la manera más precisa que se puede. Luego se halla su ecuación funcional ayudándose de las coordenadas (véase la figura 6, con ejes graduados en cm para simplificar la tarea). Se obtiene $k \approx 0{,}75/1{,}3 \approx 0{,}58$.
Lo importante aquí es el procedimiento de determinación de k, y en particular el uso del triángulo rectángulo. La técnica es muy aproximativa, porque se trata de trazar una tangente "a la vista" y luego de medir los catetos de un triángulo rectángulo, para finalmente calcular la pendiente de la tangente.
Una vez planteado el problema del carácter aproximado de la técnica, es posible usar la computación para mejorar la precisión de los resultados. Los zooms nos permiten trazar rectángulos cada vez más pequeños, entonces alcanzar una precisión cada vez mayor para k, puesto que la precisión el trazo de la tangente aumenta (la computación se encarga de completo de la gestión del cálculo de $\Delta y/\Delta x$).
La adaptación de los triángulos rectángulos sucesivos a los zooms constituye una fuerte diferencia con el problema de la desaparición de estos triángulos evidenciada por Schneider (1991) en una concepción de tipo C3.
La estimación por el cociente $\Delta y/\Delta x$ viene más precisa a lo largo de los zooms, hasta que la curva coincide con su tangente (Figura 7-c, semejante a los figuras 2-*d* y 2-*d'*). En los tres casos de las figuras 7, uno se acerca del valor exacto de la pendiente de la tangente ($\cos(1) \approx 0{,}540302$) al jugar también con la precisión de los valores proporcionados por el software.
Sin embargo, observamos que este método tiene sus limitaciones, porque, una vez obtenida en la pantalla la representación de la curva por una recta (Figuras 2-*d*, 2-*d'* y 7-*c*), zooms suplementarios no mejoran la precisión. Pero el principio de hacer zooms para tener un valor más preciso de la pendiente k permite vincular el problema de la precisión en la obtención del parámetro k con el juego local/global.

[11] Hace falta señalar que los libros de texto presentan de manera muy puntual este tipo de tarea, para el cálculo aproximado del número derivado.

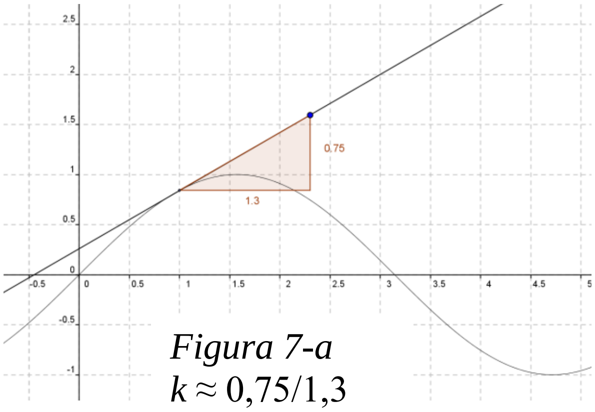


Figura 7-a
$k \approx 0{,}75/1{,}3$
$\approx 0{,}58$

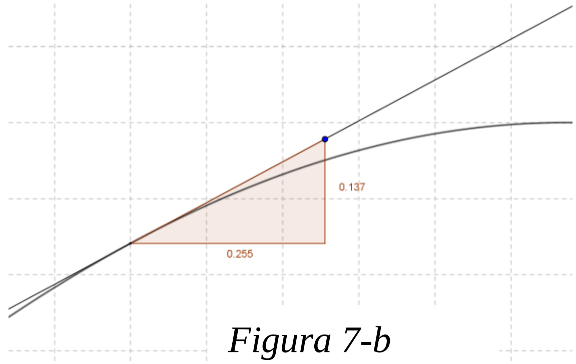


Figura 7-b
$k \approx 0{,}137/0{,}256$
$\approx 0{,}537$

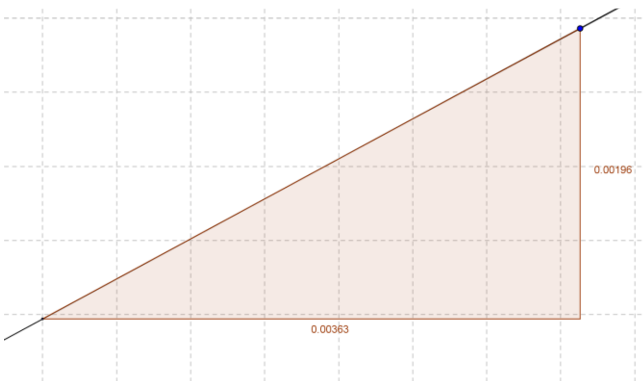


Figura 7-c
$k \approx 0{,}00196/0{,}00363$
$\approx 0{,}54046$

Sobresalen los dos principios analíticos siguientes:

- El triángulo característico de Leibniz aparece y muestra que se puede considerar localmente que curva y tangente se confunden.
- Afinar valores aproximados para determinar un valor exacto es en su esencia el principio del límite.

Del segundo, resulta que el valor exacto del parámetro *k* es el *límite* del cociente $\Delta y/\Delta x$, que aparece por el primero como límite de la tasa de crecimiento en el punto considerado.

Entonces se llega al número derivado, lo que era el objetivo. Pero se tiene mucho más:

- El vínculo entre tangente y derivada es una consecuencia de la construcción, cuanto menos en el caso de las curvas algebraicas, y no una afirmación cuyo rigor matemático sea dudoso.
- Las derivadas de los polinomios y otras funciones sencillas están a disposición antes de la enseñanza de la noción de límite (véase Anexo C-*a*, C-*b* et C-*c*).

Finalmente notamos que a las curvas no algebraicas las corresponde una verdadera generalización. En particular en el caso de nuestro ejemplo, el sistema $y = \text{sen}\, x$; $y = k(x–1)+\text{sen}(1)$ produce una ecuación que no se puede explotar por el álgebra.

Conclusión

La consideración de las curvas algebraicas antes de empezar el cálculo es esencial, porque permite tener a disposición desde el inicio una verdadera noción de tangente. La progresión propuesta hace una clara distinción entre dos etapas: 1- las tangentes, 2- las derivadas, mientras la enseñanza tradicional introduce ambas nociones a la vez. Además, aunque no es un argumento didáctico, la progresión respeta el desarrollo histórico, así que no vamos en terreno desconocido. Un estudio ecológico (Chevallard, 2001) de la noción de tangente en Francia permitiría afinar el estado del arte del apartado 1. Esto nos parece importante antes de experimentar nuestra propuesta. Pero también tenemos que tomar en consideración el problema de la epistemología de los profesores: conocen poco de esta concepción alternativa de la noción de tangente y la consideran frecuentemente de manera sospechosa, así que lo constatamos al impartir conferencias en “lycée” (equivalente en Francia del CCH en México). La enseñanza propuesta se puede impartir desde el primer año de preparatoria, pero quizás sería preferible reservarla para el segundo año, antes de verdaderamente estudiar el cálculo durante el último año.

Podríamos desarrollar la aproximación algebraica de las curvas al indagar el radio de curvatura. Se puede trabajar la potencia de un punto de la curva respecto a un círculo tangente, cuyo centro, pues, se sitúa sobre la normal. El círculo osculador se obtiene de manera semejante a la tangente, al factorizar y anular un segundo factor. El orden 2 y el estudio de la convexidad están al alcance. Desafortunadamente, el tratamiento algebraico viene más largo, aun en el caso sencillo de una parábola.

No desarrollamos en este texto las aplicaciones de la noción de tangente, debido a nuestro enfoque sobre los nexos fuertes entre tangente y derivada. Estos nexos quedan ocultos en la enseñanza, mientras que pueden proporcionar una base firme. Pero todo eso sólo tiene sentido si la noción de tangente es motivada, si permite realmente la resolución de problemas. Es importante para la entrada en el proceso que proponemos, aun cuando, ulteriormente, la derivación constituirá una herramienta más potente. En cuanto a eso, el lector se podrá referir al proyecto AHA y a Vivier (2006).

Finalmente no se puede callar la cuestión subyacente en muchos estudios y que a penas rozamos en este texto: ¿*Que es una curva*? Esta cuestión ocasiona muchas dificultades a los estudiantes de todos niveles. Es difícil porque exige no una respuesta, sino varias.

Bibliografía

Groupe AHA, (1999). *Vers l'infini pas à pas, Approche Heuristique de l'Analyse – Guide méthodologique,* De Boeck Wesmael.

ANDREU IBARRA, M., & RIESTRA VELAZQUEZ, J. A., (2007). Et si nous en restions à Euler et Lagrange ? Mise à l'essai d'un enseignement d'analyse à des étudiants non mathématiciens en début d'études supérieures, *Annales de didactique et de sciences cognitives,* Vol. 12, IREM de Strasbourg, France.

BARBIN, E., (2006). *La révolution mathématique du XVIIe siècle,* Ellipses.

BARBÉ, Q. BOSCH, M., ESPINOZA, L., & GASCÓN, J. (2005). Didactic restrictions on the teacher's practice, The case of limits of functions in Spanish high school, *Educational Studies in Mathematics, 59.*

CASTELA, C., (1995). Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 15(1).

CERCLE D'HISTOIRE DES SCIENCES – IREM DE BASSE-NORMANDIE (1999). *Aux origines du calcul infinitésimal*, Ellipses.

CHEVALLARD, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2).

CHEVALLARD, Y. (2001). Organiser l'étude – Ecologie et régulation, *Actes de la 11e école d'été de didactique des mathématiques, 21-30 août 2001, Corps.*

DESCARTES, R., (1637). *La géométrie*, Editions Jacques Gabay, réédition de 1991. Téléchargeable à http://gallica.bnf.fr.

GARCIA, F. J., GASCON, J., RUIZ HIGUERAS, L. & BOSCH, M. (2006). Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics, *ZDM, 38*(3).

HOUDEMENT, C., KUZNIAK, A., (2000). Formation des maîtres et paradigmes géométriques, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 20(1).

HOUDEMENT, C., KUZNIAK, A., (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie, *Annales de didactique et de sciences cognitives,* 11.

KAHANE, J.-P., (2002). *Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques*, Odile Jacob.

KUZNIAK, A. (2009). *Un essai sur la nature du travail géométrique en fin de la scolarité obligatoire en France*, in Chypre et France, Recherche en didactique des mathématiques, GAGATSIS, A., KUZNIAK, A. DELIYIANNI, E. & VIVIER, L. éditeurs. Lefkosia, Chypre 2009.

MASCHIETTO, M., (2002). Quelques éléments de l'étude de la transition algèbre.analyse au lycée, *Actes de la 11e école d'été de didactique des mathématiques 21-30 août 2001*, la Pensée Sauvage éditions.

MASCHIETTO, M., (2004). Le jeu entre point de vue local et point de vue global en analyse : une ingénierie didactique à visée diagnostique au niveau première, *Actes du colloques de Mulhouse 8-9 mars 2002*, IREM de Strasbourg.

NEWTON, I. (1740). La méthode des fluxions, et les suites infinies, par M. le chevalier Newton, traduction de Buffon. Téléchargeable à http://gallica.bnf.fr.

PERRIN-GLORIAN, M.-J., (1999). La tangente est-elle vraiment la droite qui approche le mieux la courbe au voisinage d'un point ?, *Repères IREM 34*.

SCHNEIDER, M., (1991). Quelques difficultés d'apprentissage du concept de tangente, *Repères IREM 5*.

SCHNEIDER, M., (2001). Praxéologies didactiques et praxéologies mathématiques – à propos d'un enseignement des limites au secondaire, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 21(1.2).

SIERPINSKA, A. (1985). Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 6(1).

VIVIER, L. (2006). *La Géométrie analytique*, Le Pommier, collection *Quatre à Quatre*.

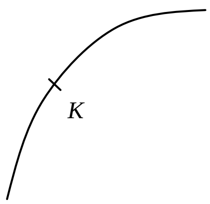
Anexo A - El test aplicado

Para cada una de las curvas, ¿es posible trazar una tangente en el punto K?

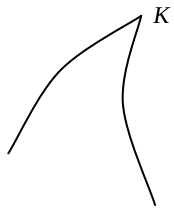
- si se puede, trace esta tangente ;

- si no, aclare brevemente porque (escriba al lado de la curva).

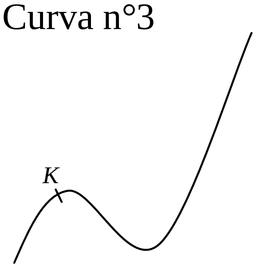
Curva n°1



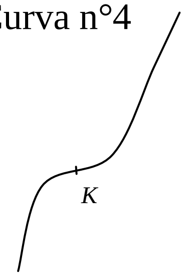
Curva n°2



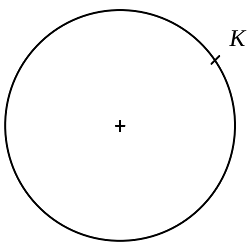
Curva n°3



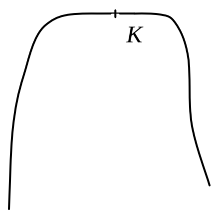
Curva n°4



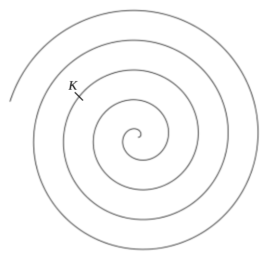
Curva n°5



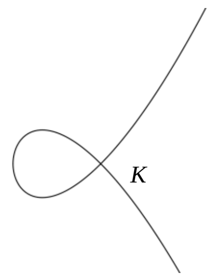
Curva n°6



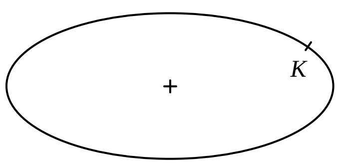
Curva n°7



Curva n°8



Curva n°9

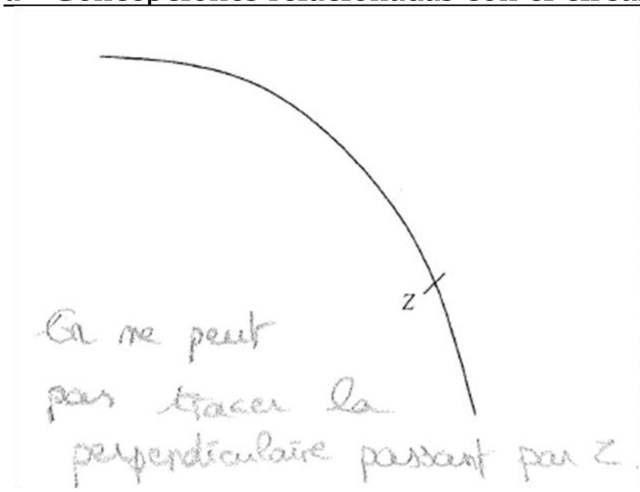


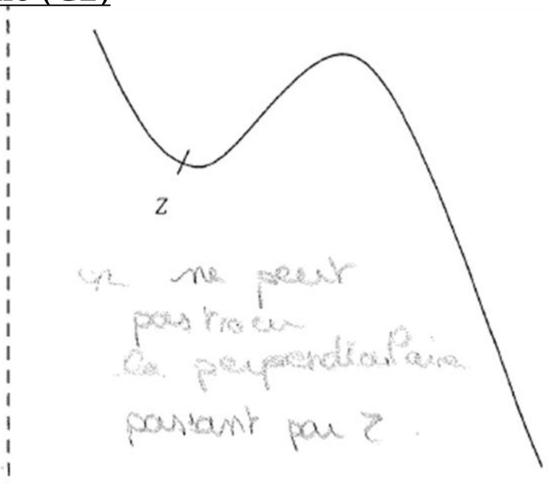
En el cuestionario, las curvas estaban distribuidas sobre dos páginas (curvas 1 a 4 y curvas 5 a 9). Arriba aparecen reproducidas en reducción al 50%. Para evitar influencias entre estudiantes vecinos, el mismo cuestionario se había diseñado con un punto *Z* sobre curvas ordenadas de manera diferente (1-3-5-6-8 en la primera página y 7-2-4-9 en la segunda). Estas “curvas *Z*” difieren poco de las “curvas *K*” (por simetrías o rotaciones), excepto la homologa de la curva 8, que es una curva en forma de ocho (la del Anexo C-*d*).

Las curvas n°2 y n°8 no se toman en cuenta en los porcentajes dados en el apartado 1.

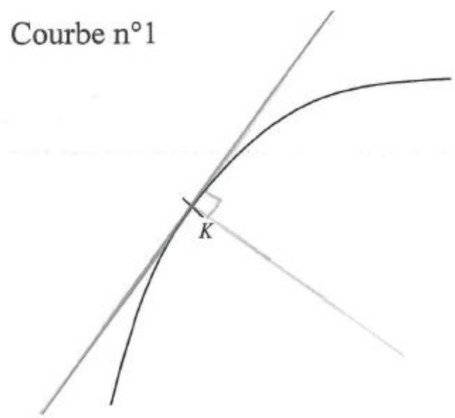
Anexo B – Algunos ejemplos de concepciones *intuitivas* de los estudiantes

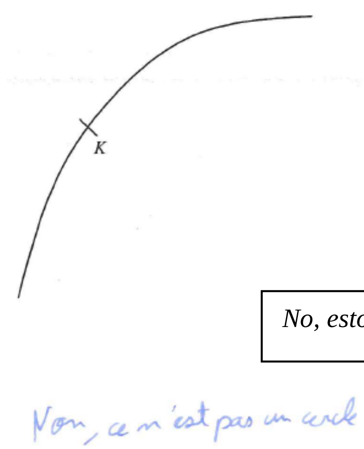
a– Concepciones relacionadas con el círculo (C2)





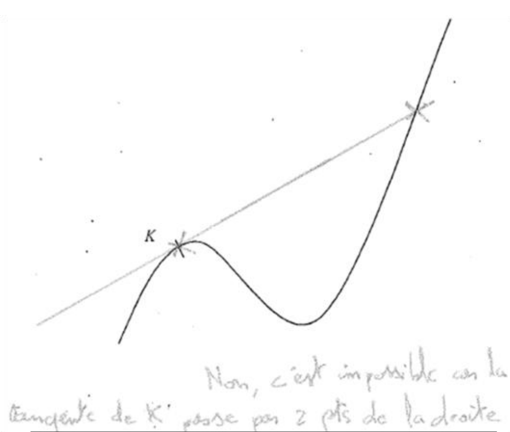
No se puede trazar la perpendicular que pasa por Z.



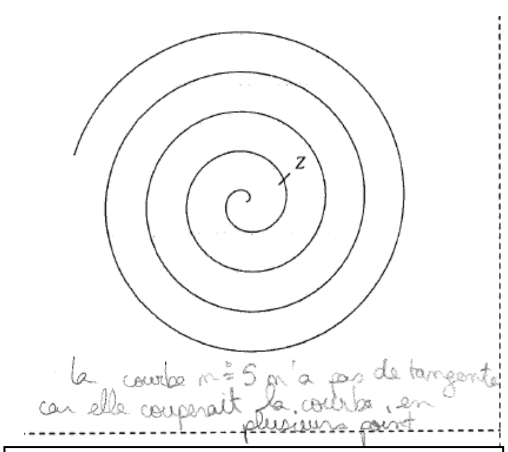


No, esto no es un círculo

b– Concepción global (C1)

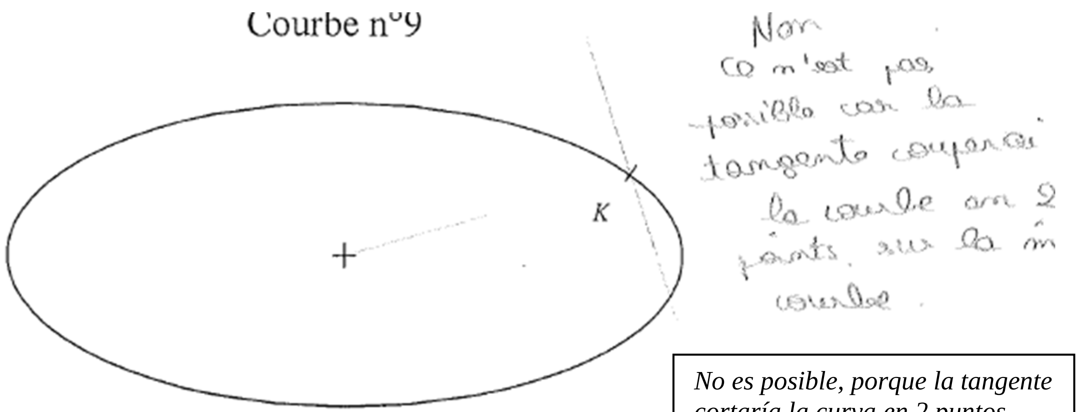


No, es imposible porque la tangente de K pasa por 2 puntos de la recta (sic).



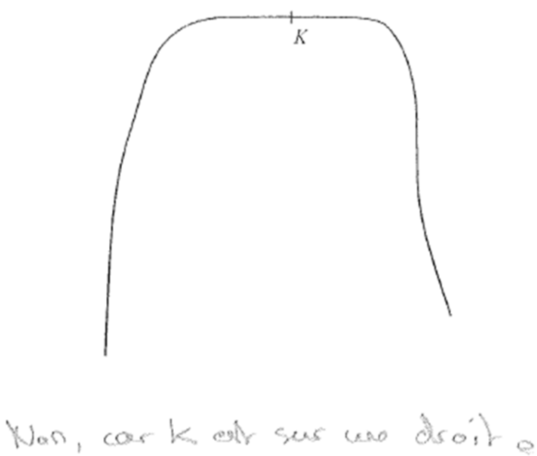
La curva n°5 no tiene tangente porque cortaría la curvas en varios puntos.

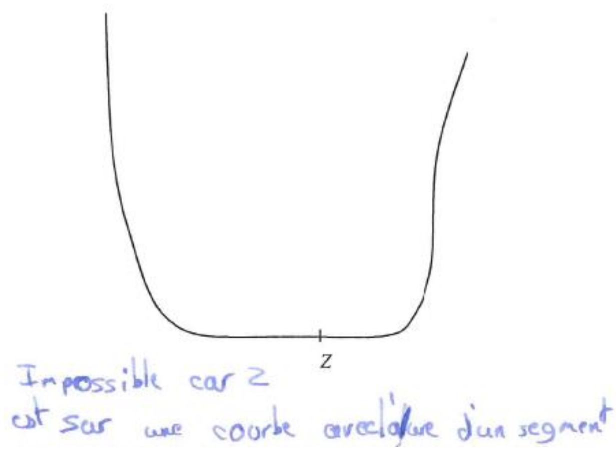
c– Concepciones C1 y C2 simultaneas



No es posible, porque la tangente cortaría la curva en 2 puntos sobre la misma curva

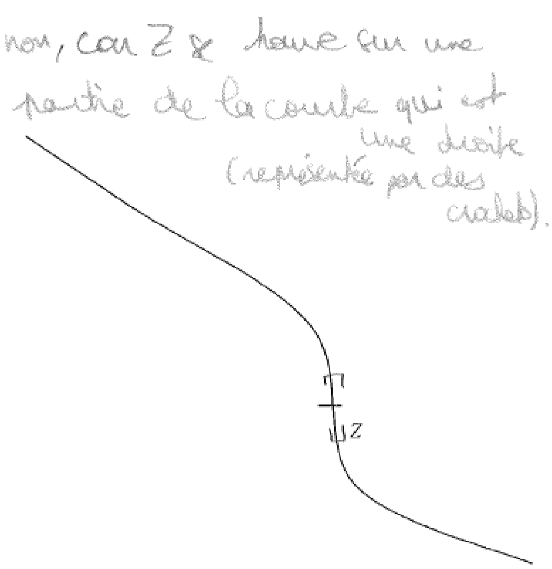
d– Imposibilidad de trazar una tangente a un trozo rectilíneo





No, puesto que K está sobre una recta

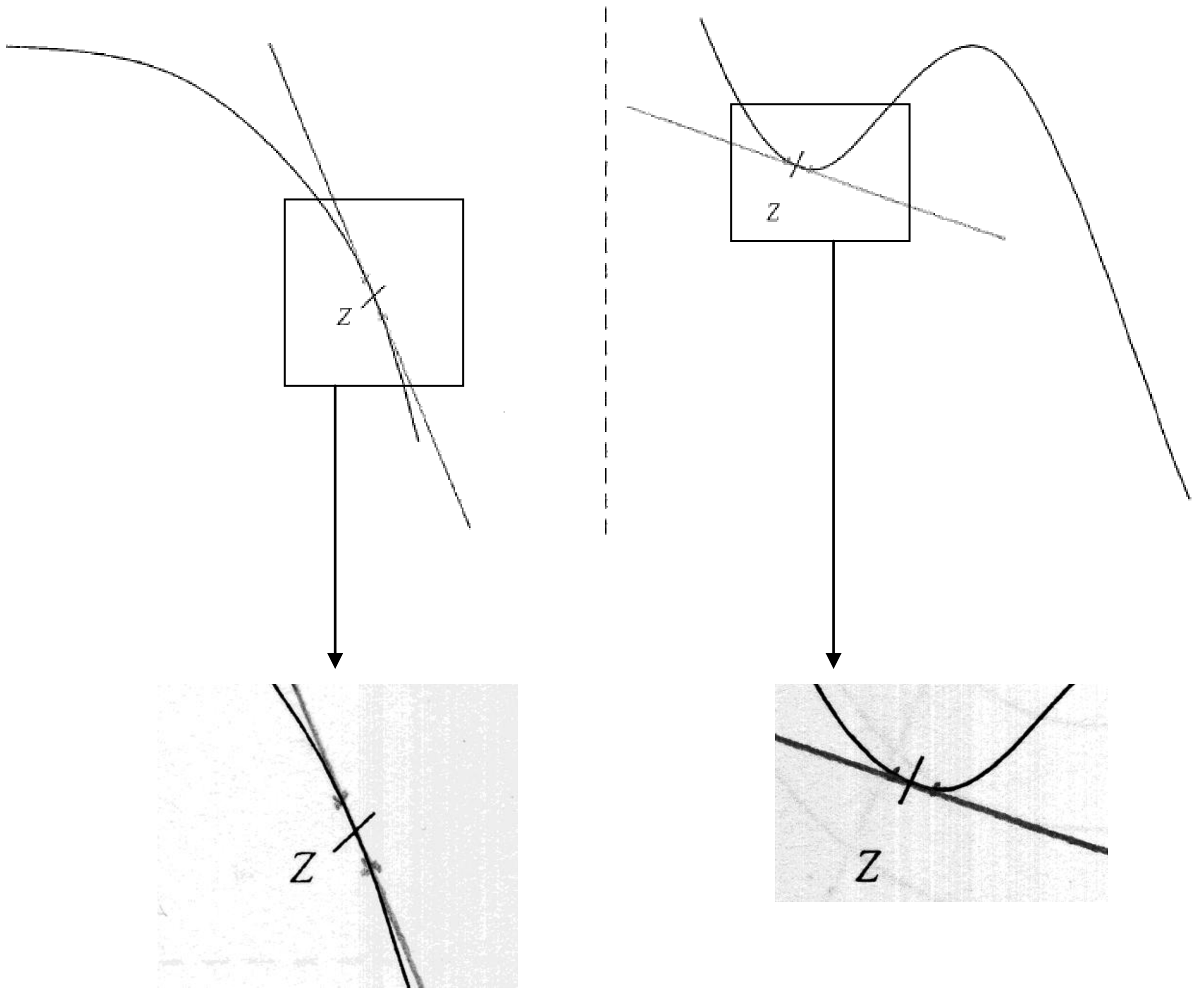
Imposible porque Z está sobre una curva que se parece a un segmento



No, porque Z se sitúa sobre una parte de la curva que es una recta (representada por corchetes)

<u>*e*– La concepción cercana de C3</u>

La tangente se traza a partir de dos puntos cercanos de *Z* y situados de cada lado del punto *Z* (cf. Sierpinska, 1985).



Anexo C – Algunos casos de obtención de tangentes

a– Fórmula de derivación de los polinomios

Determinemos las tangentes a la curva representativa de un polinomio *f*:

1. Sistema: $y = f(x) = \alpha_n x^n + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$; $y = k(x-a)+f(a)$
2. Ecuación y factorización: $\alpha_n x^n + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0 = k(x-a)+f(a)$

$$\Rightarrow (x-a)\cdot[\ \alpha_n(x^{n-1}+x^{n-2}a+\ldots+xa^{n-2}+a^{n-1})+\ldots+\ \alpha_2(x+a)+\ \alpha_1-k] = 0$$

La anulación del segundo factor para obtener un punto de intersección de orden al menos 2 produce la expresión esperada:

$$k = \alpha_n(na^{n-1})+\ldots+\ \alpha_2(2a)+\ \alpha_1 = n\ \alpha_n\, a^{n-1} + \ldots + 2\alpha_2\, a + \alpha_1$$

Así se obtiene la fórmula de derivación de los polinomios.

b– Hipérbolas y función inversa

Determinemos las tangentes en el caso sencillo de la gráfica de la función de referencia $f(x) = 1/x$ en un punto de abscisa $a \neq 0$.

1. Sistema: $y = \frac{1}{x}$; $y = k(x-a)+\frac{1}{a}$
2. Ecuación y factorización: $\frac{1}{x} = k(x-a)+\frac{1}{a} \Rightarrow (x-a)\cdot[k+\frac{1}{ax}] = 0$
3. Anulación en $x=a$ del segundo factor: $k = -\frac{1}{a^2}$.

Así se obtiene la fórmula de derivación de la función inversa.

c– Raiz cuadrada

Se estudia aquí un caso sencillo: la gráfica de la función de referencia $f(x) = \sqrt{x}$ en un punto de abscisa $a>0$.

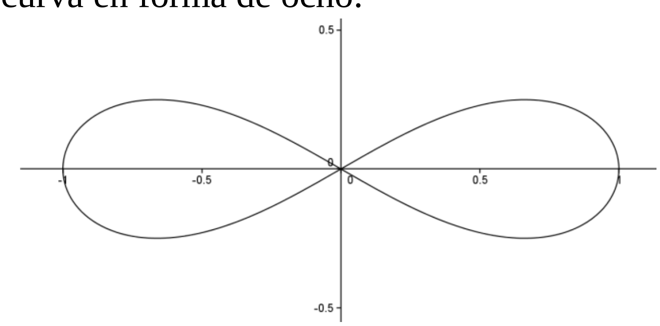
1. Sistema: $y = \sqrt{x}$; $y = k(x-a)+\sqrt{a}$
2. Ecuación y factorización: $\sqrt{x} = k(x-a)+\sqrt{a} \Rightarrow (x-a)\cdot\left[k-\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{x}}\right] = 0$
3. Anulación en $x=a$ del segundo factor: $k = \frac{1}{2\sqrt{a}}$.

Así se obtiene la fórmula de derivación de la raíz cuadrada.

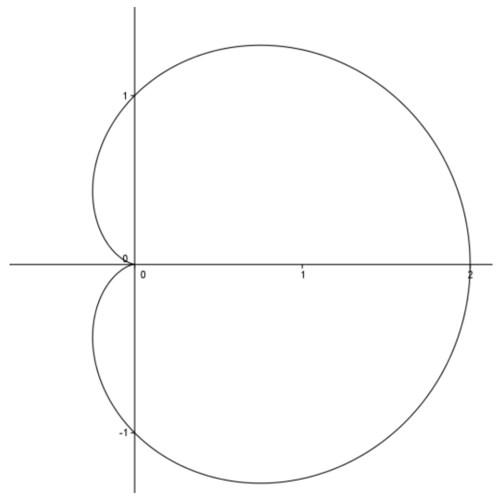
d– Lemniscata

Buscamos *la* tangente en $O(0,0)$ a la curva en forma de ocho:

1. Sistema:
   $(x^2+y^2)^2-x^2+3y^2 = 0$; $y = k(x\text{-}0)+0$
2. Ecuación y factorización: $(x^2+k^2x^2)^2-x^2+3k^2x^2 = 0$
   $\Rightarrow x^2\cdot[x^2(1+k^2)^2-1+3k^2] = 0$
3. Anulación en $x=0$ del segundo factor: $k = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.



El hecho de que O es un punto múltiple a penas modifica el método: la substitución de $y = kx$ en la ecuación de la curva ya se ha visto en el caso de los círculos, y lo único nuevo es la adaptación que consiste en factorizar por $(x–0)^2$, y no simplemente por $(x–0)$. El método requiere la factorización por la potencia máxima de $(x–a)$. Podemos observar que las secantes en O forman una intersección de orden 2, excepto dos de ellas, las tangentes, que forman una intersección de orden 4. Al usar los medios actuales de la enseñanza, tendríamos que descomponer las dos ramas en O. El estudio resultante es mucho más compleja que la que presentamos.

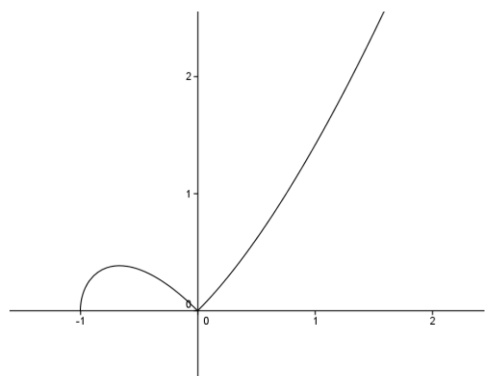


e– Curva con cúspide,

Determinamos la tangente a la cardioide en su cúspide O:

1. Sistema: $(x^2+y^2–x)^2–(x^2+y^2) = 0$; $y = k(x–0)+0$
2. Ecuación y factorización:
   $(x^2+k^2x^2–x)^2–(x^2+k^2x^2) = 0$
   $\Rightarrow x^2\cdot[(x+k^2x–1)^2–(1+k^2)] = 0$
3. Anulación en x=0 del segundo factor: $k = 0$.

Podemos observar que las secantes en O forman una intersección de orden 2, excepto una de ellas, la tangente, que forma una intersección de orden 3. Las tangentes en cúspides constituyen un caso un poco delicado en cálculo, aquí lo único particular es que las secantes son de orden 2 en vez de 1.



f– Curva con dos semi-tangentes

Determinamos *la* tangente en $O(0,0)$ a la curva representada:

1. Sistema: $y = \sqrt{x^3+x^2}$; $y = k(x–0)+0$
2. Ecuación y factorización:
   $kx = \sqrt{x^3+x^2} \Rightarrow x^2\cdot[x+1–k^2] = 0$
3. Anulación en x=0 del segundo factor: $k = \pm 1$.

Las dos semi-tangentes se obtuvieron como resultado de un único cálculo, sin necesidad de dos estudios separados. Además podemos observar que las secantes en O forman una intersección de orden 2, excepto dos de ellas, las tangentes, que forman una intersección de orden 3.

g– Cuando el método no produce ningún resultado…

Determinamos *la* tangente en $O(0,0)$ a la curva de ecuación: $x^3–x^2–y^2 = 0$.

1. Sistema: $x^3–x^2–y^2 = 0$; $y = k(x–0)+0$
2. Ecuación y factorización: $x^3–x^2–k^2x^2 = 0 \quad \Rightarrow x^2\cdot[x–1–k^2] = 0$

3. Anulación en x=0 del segundo factor: k^2+1 = 0.
Las rectas de la forma $y = kx$ forman en O una intersección de orden 2. Pues sólo queda la recta de ecuación x=0 como posible tangente. Con ella se obtiene la ecuación: $-y^2 = 0$. Entonces ella forma una intersección doble, del mismo orden de las secantes. Debemos concluir que no hay tangente en O. Pero eso no nos debe sorprender, puesto que el punto O es un punto aislado de la curva.

Anexo D - Justificación del método

El teorema que sigue muestra que el método funciona en todos los casos (no demostraremos que la noción de tangente en análisis generaliza la noción presentada aquí):

> *Las secantes en un punto A no aislado de una curva algebraica forman una intersección del mismo orden de multiplicidad v, excepto a lo más v de ellas que forman una intersección de orden de multiplicidad estrictamente superior à v.*

Vamos a probar este resultado en el punto $O(0,0)$ de una curva algebraica, dado que es siempre posible hacer un cambio de sistema de ejes que produce esta situación, excepto en el caso evidente de ecuaciones de la forma $C^{te} = 0$. Denotamos por n el grado de la ecuación y v su valuación (la potencia mínima en x y y que aparece en la ecuación); entonces $n \geq v > 0$.

1. Sistema: $\sum_{i+j=v}^{n} a_{i,j} x^i y^j = 0$; $y=kx$

2. Ecuación y factorización:

$$\sum_{i+j=v}^{n} a_{i,j} k^j x^{i+j} = 0 \Rightarrow x^v\,[P_v(k)+P_{v+1}(k)x+\ldots+P_n(k)x^{n-v}] = 0,$$

donde $P_l(k) = a_{l,0}+a_{l-1,1}\cdot k+\ldots+a_{0,l}\cdot k^l$, $v \leq l \leq n$, es un polinomio cuyo grado es l o menos. Dado que v es la valuación de la ecuación, el polinomio P_v no puede ser nulo. Entonces las secantes forman intersecciones de orden de multiplicidad v, excepto en los casos particulares de orden superior considerados a continuación.

3. Anulación en $x=0$ del segundo factor: $P_v(k)=0$.

Tenemos que determinar las raíces de un polinomio no nulo de grado a lo más v. Son estas raíces que definen las tangentes.

La recta de ecuación $x=0$ es una tangente bajo la condición de que la raíz 0 de $\sum_{j=v}^{n} a_{0,j} y^j = 0$ tenga un orden de multiplicidad estrictamente superior a v, lo que significa que $a_{0,v}=0$. Esto implica que el grado de P_v es a lo más $v-1$. En todos casos, tenemos a lo más v tangentes en O que forman intersecciones de orden de multiplicidad estrictamente superior a v.

Queda por estudiar el caso en el que el método no da ninguna tangente: P_v es de grado $v>0$ ($a_{0,v}\neq 0$) sin raíz real. La ecuación de a curva se puede escribir bajo la forma $B(x,y) + A(x,y) = 0$ donde B es la suma de los monomios de grado estrictamente superior a v, y A es la suma de los monomios de grado v. Los coeficientes de A son los de P_v, entonces hay una constante $K>0$ tal que: $\forall(x,y)$, $|A(x,y)| \geq K\|(x,y)\|^v$. Por razones de continuidad,

$$\exists\ \varepsilon>0,\ \forall (x,y) \text{ tal que } \|(x,y)\|<\varepsilon,\ |B(x,y)| \leq \frac{K}{2}\cdot\|(x,y)\|^{\nu}.$$

Entonces O es el único punto de la curva en la bola de centro O y de radio ε. Esto significa que el punto O es aislado (como en el ejemplo del Anexo C-*g*).