REVISTA EMA
2004, VOL. 9, Nº 3, 2005, VOL. 10, Nº 1, 181-204

MARCO, REGISTRO Y CONCEPCIÓN[1]

NOTAS SOBRE LAS RELACIONES ENTRE TRES CONCEPTOS CLAVES EN DIDÁCTICA

NICOLAS BALACHEFF [2]

Las palabras «marco», «registro» y «medio» designan conceptos de amplia utilización por los investigadores en didáctica de las matemáticas, con el fin de modelizar situaciones o de analizar las actividades de los alumnos. Sin embargo, y a pesar de una literatura importante, su uso plantea problemas recurrentes para distinguirlas y relacionarlas (o vincularlas). Proponemos una solución a tales problemas, analizando las relaciones que mantienen entre ellos estos tres conceptos clave de la didáctica de las matemáticas. Mostraremos que la distinción entre «marco» (o «encuadre») y «concepción» debe ser buscada en el anclaje problemático de cada uno de estos conceptos; para los «marcos (o «encuadres»), se sitúa en primer plano el análisis matemático, para las «concepciones», tal lugar corresponde al análisis de las situaciones generadoras de obligaciones (o limitaciones) para el sujeto que aprende. En lo que a los «registros» se refiere, mostramos que son una herramienta indispensable para el funcionamiento de los «marcos» (o encuadres), como concepciones, y de sus relaciones; entre dos marcos, o dos concepciones, los registros tienen una función de mediación semiótica.

The words "frame"), "register" and "environment" (or "medium") denote concepts which are commonly used by researchers in the didactics and education of mathematics in order to model situations or analyze the activities which are been done by students. However, despite important literature, its an ongoing issue to try to distinguish and relate the concepts meant by these words. We suggest a solution to such issues, analyzing the relations maintained between these three key concepts in mathematical education.

---

1. Este texto contiene lo principal de mi exposición en el homenaje a Régine Douady en diciembre de 2001. A partir de las preguntas que me hicieron es esa ocasión, así como de las de los participantes al seminario DidaTech de enero 2002, en el que retomé éste, hubo una retroalimentación. Agradezco en particular a Régine Douady, Bettina Pedemonte, Nathalie Gaudin y Sophie Soury-Lavergne por sus intervenciones sobre las primeras versiones de este texto.
2. Laboratorio Leibniz-IMAG, Grenoble.

We will show that the distinction between "frame" and "conception" must be understood from the problematic bindings of each of this concepts; for "frame" we must look in the first level of mathematical analysis, while for "concept" such place corresponds to the analysis of the situations generated from the obligations (or limitations) of the learning subject. Referring to "register", we show that it is essential to have the concept "frame", as well as its relations, be well behaved: between either two frames or two concepts, the registers have a semiotic mediation function.

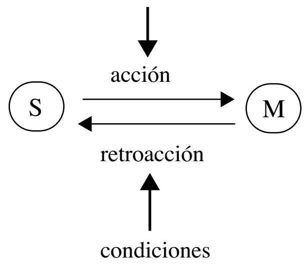
Palabras claves: Didáctica de las matemáticas, marco, registro, concepción.

INTRODUCCIÓN

Las palabras «marco», «registro» y «milieu» (medio) son conceptos utilizados constantemente por los investigadores en didáctica de las matemáticas, con el fin de modelar situaciones o de analizar las actividades de los estudiantes. Las definiciones de estas palabras fueron dadas de manera más o menos formal, en especial por autores que han forjado o que han cuestionado su sentido en los trabajos de investigación que han realizado: Régine Douady (1984), Raymond Duval (1995), Michèle Artigue (1991). Sin embargo, y a pesar de que existe una literatura bastante importante, sus usos se han estabilizado y podríamos subrayar el hecho de que lograr hacer la distinción entre «marco», «registro» y «concepción» es un problema que encuentran los jóvenes investigadores constantemente. Es para ellos, especialmente, que he escrito este texto en el cual propongo un análisis de las relaciones que existen entre estos tres conceptos claves de la didáctica de las matemáticas.

En el centro de la problemática didáctica se encuentra la unión de las relaciones entre un "saber"[3] visto como referencia y un sistema cognitivo complejo [Sujeto<>«Milieu»], constituido por un sujeto humano que inter actúa con un «milieu» en el cual participa a su misma definición (Brousseau, 1986, p. 89).

3. En francés, en la didáctica de las matemáticas se hace la diferencia entre "savoir", saber, y "connaissance", conocimiento. Un saber debe existir en alguna institución (un saber matemático, un saber filosófico, un saber físico…) y por tanto para ser aprendido debe ser enseñado. Un conocimiento es cualquier cosa que hayamos aprendido, sin importar su origen.



Caracterizar el sistema [Sujeto<>«Milieu»] en cuanto a un saber dado o querer precisar las condiciones de su evolución hacia un estado exacto, son las dos grandes categorías de problemas que debemos poder formular, analizar y en la resolución de los cuales trabajamos. En esta problemática, no son el tema en sí (pues estaríamos en un paradigma psicológico de estudio del sujeto que aprende), ni el «milieu» en sí (pues estaríamos en un paradigma de ingeniería de los medios de enseñanza) los objetos de la modelización, sino las interacciones entre estos dos, las cuales pueden verse gracias a las acciones del primero y las retroacciones del segundo. Es por esto que he decidido caracterizar las concepciones (en una época habría dicho conocimientos) como una propiedad que emerge de las interacciones que ocurren dentro del sistema [Sujeto<>«Milieu»] (Balacheff, 1995) y no como una propiedad que se le puede atribuir a un estudiante que aprende. Una situación didáctica es entonces la actualización de un conjunto de condiciones sobre el sistema [Sujeto<>«Milieu»] que provocan la evolución, como la modeló Guy Brousseau.

Evaluaremos el conocimiento en el sistema [Sujeto<>«Milieu»], si este sistema tiene la capacidad de encontrar un estado de equilibrio después de una perturbación. Ciertas perturbaciones necesitan la construcción de un nuevo equilibrio, cualitativamente diferente del equilibrio inicial. Decimos entonces que hay “aprendizaje”. En matemáticas, llamamos “problemas” estas perturbaciones que resultan de una modificación del «milieu», o de un conjunto de condiciones sobre el sistema [Sujeto<>«Milieu»], o —pero de manera mucho menos frecuente en nuestro caso— de una modificación de S (por ejemplo en el caso de ciertas lesiones cerebrales).

Michèle Artigue (1991) puso en evidencia la importancia del concepto de «concepción» en la didáctica de las matemáticas al mismo tiempo que nos mostraba la falta de formalismo de este concepto en nuestro trabajo teórico. Una formalización así sería por lo tanto muy útil puesto que las concepciones de los estudiantes, las de los profesores y las de los investigadores, están presentes por todas partes en el trabajo del didacta. Con el fin de avanzar en este tema, rápidamente me di cuenta que cuatro componentes, indisociables, se imponen cuando se quiere evidenciar una concepción: una esfera de práctica, conjunto P de problemas (del cual Gérard Vergnaud nos recuerda que en matemáticas, son fuente y criterio de conocimiento), un conjunto R de operadores que permiten el tratamiento de los problemas, un sistema de representación L que permite la representación de los problemas y de los operadores, y, en fin, una estructura de control $\sum$ que da y organiza las funciones para decidir, escoger y juzgar la validez y la adecuación de la acción. Finalmente postulé, retomando y extendiendo el modelo original de Gérard Vergnaud (1990), que este cuarteto (P, R, L, $\sum$) es suficiente para caracterizar una concepción en matemáticas.

Voy a tomar un ejemplo rápidamente para ilustrar esta formalización:

> La concepción "número entero con una coma", la cual se presenta de manera clásica entre las concepciones de los números decimales, puede caracterizarse por una esfera de práctica constituida por la extensión a un nuevo dominio numérico de problemas aditivos y multiplicativos de los enteros naturales, por un conjunto de operadores del cálculo numérico sobre los enteros naturales dotado de los operadores específicos al trato de la coma, por un sistema de escritura decimal incluyendo el trato de la coma, y en fin por una estructura de control retomando los operadores de control de cálculo numérico dotado de los controles específicos del trato de la coma. Una concepción así tendrá entre otros, los controles que constituyen las proposiciones: "no existe ningún número entre dos números consecutivos" o "el resultado de una multiplicación es superior a cada uno de sus factores".

Régine Douady propone el *juego de los marcos* como medio para hacer evolucionar las concepciones de los estudiantes en matemáticas. Así es como presenta este objetivo en las primeras páginas de su tesis de doctorado:

> Escogemos para introducir y suscitar el funcionamiento de los conocimientos, unos problemas en los cuales estos conocimientos intervienen en al menos dos marcos. Privilegiamos los marcos (en realidad los problemas) en los cuales el error en la correspondencia es creador de desequilibrios que deben ser compensados. (Douady, 1984, p.18)

Raymond Duval subraya la originalidad de la escogencia hecha (Duval, 1995, p. 18), pero rápidamente se detiene solamente en el juego sobre las representaciones al cual da un lugar fundamental en el aprendizaje. En efecto, según Raymond Duval, "la actividad conceptual necesita la coordinación de los registros de representación" (ibid. p.61), y mas aún: "es necesario que el sujeto haya llegado al estado de la coordinación de las representaciones semióticamente heterogéneas, para que sea capaz de discriminar el representante del representado, o la representación y el contenido conceptual que esta representación expresa, instancia o ilustra" (ibid.). La importancia dada por Raymond Duval a las representaciones la justifica Régine Douady, ella misma, quien mezcla los diferentes conceptos, en sus primeras presentaciones de «marco», de forma no trivial:

> la mayoría de los conceptos puede intervenir en varios dominios, varios marcos físicos, geométricos, gráficos y otros. Un concepto se traduce en cada uno de ellos en términos de objetos y relaciones que podríamos llamar los significados del concepto en este marco. Los significantes asociados pueden eventualmente simbolizar otros conceptos en el marco de los significados. [...] Por un lado, resultan correspondencias entre significados de un mismo concepto en marcos diferentes y por otro, entre significados de conceptos diferentes representados en un mismo marco por los mismos significantes. (1984, pp.17-18).

El rol predominante de las representaciones en matemáticas es probablemente el origen de la dificultad que tienen los estudiantes para distinguir claramente la problemática del juego de marcos de la del juego sobre los registros semióticos, que evoca Duval. Este rol, ya sea del aprendizaje o de la práctica de las matemáticas, es la fuente de antiguas y complicadas interrogaciones que no retomaré en este texto. Me contentaré entonces con destacar una presencia recurrente e insistente de las representaciones, y sugerir la función que podemos darle en los modelos que construimos.

LOS MARCOS: UNA HERRAMIENTA PARA REFLEXIONAR SOBRE EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

La primera preocupación de Régine Douady, al forjar la noción de marco, fue la de precisar los criterios que se deben tener en cuenta en la construcción de los problemas que ayuden a suscitar un aprendizaje en matemáticas. La idea de «marco», que propone, es la de un dominio de las matemáticas que esté suficientemente bien identificado por sus objetos, por las relaciones que sostienen y por los tipos de representaciones y de tratamientos que movilizan. De cierta forma, Régine Douady parte de los dos siguientes postulados:

- Por un lado, todo concepto matemático está asociado a varios marcos que pueden ser relacionados por medio de sistemas de representación;

- Por otro lado, los diferentes marcos no coinciden, primero porque no movilizan las mismas propiedades y teoremas, y segundo debido a las diferencias de valor ostensivo de los sistemas de representación que producen - esta última particularidad hace del juego de marcos un método efectivo de construcción de situaciones pertinentes que favorezcan un aprendizaje.

Régine Douady formula entonces así su proyecto:

> Para asegurar las relaciones entre el estudiante y el problema es necesario expresar las condiciones sobre los problemas, que hacen que la dialéctica herramienta-objeto y el juego de marcos sean posibles. (1984, p.19)

Los marcos no son entonces interesantes en sí mismos, sino gracias a sus relaciones que pueden realzar propiedades de un mismo concepto por el juego de las diferencias entre las propiedades referenciales de los sistemas de representación que movilizan. La noción de marco se ve opacada para dibujar los contornos de un dominio de las matemáticas en términos que serán pertinentes para analizar la actividad del estudiante y sus conocimientos (o más bien sus concepciones), y para concebir una situación que favorezca un aprendizaje.

La pregunta que se impone entonces es la de saber cómo el «marco» se distingue del «milieu» quien, dentro de la teoría de las situaciones didácticas, ocupa el lugar que Régine Douady atribuye a los marcos desde su punto de vista. Esta pregunta es mucho más compleja si uno lee detalladamente su tesis:

> Situaciones de comunicación van a provocar el que sea explícita la correlación que existe entre el marco simbólico y el marco material. (1984, p. 42)

> ... la situación provoca un juego entre marcos de lo concreto entre la realidad del niño, el numérico, la representación algebraica y gráfica.(1984, p. 57)

"Realidad del niño", "representaciones" y "marco simbólico", "marco material" aparecen como posibles instancias de un marco; algunos pensarán incluso en "contexto", "ambiente", o en "conocimiento situado". La situación es compleja.

MARCO VERSUS CONCEPCIÓN, LA LLAVE DE LAS REPRESENTACIONES

En el primer artículo en el que presentaba su trabajo de tesis en *Recherches en didactique des mathématiques*, Régine Douady utiliza una definición de los marcos en la que incluye una fuerte dimensión cognitiva:

> Un marco se constituye de objetos de una rama de las matemáticas, de las relaciones entre esos objetos, de las formulaciones eventualmente diferentes y de las imágenes mentales asociadas a esos objetos y a esas relaciones. Esas imágenes juegan un rol esencial en el funcionamiento como herramientas de los objetos del marco. Dos marcos pueden contener los mismos objetos y diferir por las imágenes mentales y la problemática desarrollada. (Douady, 1986, p. 11)

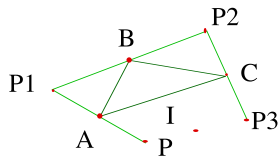
Este significado de "marcos" justificaría el considerarlos como una posibilidad de modelización de los conocimientos de los estudiantes y entonces se presentaría como una alternativa posible a la utilización de "concepciones" en ese mismo sentido. Es sobre esto que voy a hablar en la sección que sigue. El texto a continuación, extraído del trabajo de Sophie Soury-Lavergne (1998) para su tesis de doctorado, nos permitirá comprender la diferencia que debe mantenerse entre esas dos nociones. Pero, sobre todo, ilustrará la relación que propongo considerar entre marco y concepción en la modelización del sistema [Sujeto<>«Milieu»].

Una pequeña historia de paralelogramo y de invariante

Un profesor de matemáticas, Isabel, y un estudiante, Fabien, se encuentran en una situación de comunicación a distancia en la cual pueden compartir el mismo espacio de trabajo (el micromundo de geometría Cabri-géomètre), y comunicarse viéndose— algunos dirán con un sentimiento de tele presencia.

Fabien contacta a Isabel después de haber comenzado la resolución del problema siguiente:

> *Construya un triángulo ABC cualquiera. Construya un punto P cualquiera y su simétrico P1 con respecto a A, después el simétrico P2 de P1 con respecto a B, el simétrico P3 de P2 con respecto a C. Construya I el punto medio de [PP3]*



¿Qué se puede decir del punto I al desplazar P? Explique.

Fabien se interesa en el paralelogramo ABCI, pero este interés no esta ligado a la prueba de su conjetura inicial (I no se mueve), sino al carácter predominante de este cuadrilátero en el dibujo. Isabel estimula a Fabien para que continúe en esta vía, pero probablemente sin imaginarse que el lazo no está hecho con la conjetura de la no variación de I.

83	"… entonces para mostrar que tienes un paralelogramo, ¿que idea tendrías?"

Después de que Fabien efectivamente (y correctamente) muestre que el cuadrilátero ABCI es un paralelogramo, Isabel vuelve a la conjetura sobre la cual interactúan y sugiere el hecho crucial que tiene por consecuencia la inmovilidad de I:

117	"… utilizaste una gran cantidad de puntos intermedios pero cuando llegas al nivel de la conclusión no intervienen, los puntos P, P1, P2, P3."

Una vez establecido el que el cuadrilátero ABCI sea un paralelogramo, y con él —desde el punto de vista de la geometría— la razón por la cual I no se puede mover al manipular P en Cabri-géomètre, para el preceptor no queda más que lograr obtener de Fabien la formulación de que I es independiente de P (o mejor aún de P y de los otros tres puntos intermediarios P1, P2, P3).

133	"¿Qué quiere decir que cuando uno mueve P, I no se mueve? ¿Eso quiere decir que I es cómo? ¿Qué I es qué?"
[…] 139	[…] "Pero si no se mueve cuando mueves P y P3 […] ¿Eso qué quiere decir I, el punto I me dijiste que se mueve en función de que puntos?"
[…] 143	[…] "Los otros, no se mueven. ¿Ves lo que quiero decir? Entonces ¿cómo podrías definir el punto I, finalmente, sin utilizar los puntos P, P1, P2, P3?"

A pesar de todos los esfuerzos de Isabel, los cuales Sophie Soury-Lavergne analiza en términos de "contrato didáctico" y de "étayage[4]" en el sentido de Bruner (ibid. capítulo 1), Fabien no logra establecer la relación que le es sugerida tan fuertemente:

150	"No veo de donde puedo partir"

El software utilizado permite la constitución no solamente de un «milieu» común al preceptor y al estudiante, sino de dos "milieux" distintos en los cuales el sistema de representación de los objetos geométricos en la interfase permite relacionarlos, incluso la ilusión de superponerlos. La modelización de las concepciones permite precisar la diferencia que hay que hacer entre esos dos "milieux"; en efecto, las concepciones se constituyen acá en síntomas de desdoblamiento del software.

La concepción de Isabel puede describirse rápidamente como "geométrica": los operadores y los controles son los que suministran las matemáticas (definiciones, teoremas, demostraciones), el sistema de representación es el de la geometría como teoría asociada al registro semiótico dinámico que ofrece la interfase de Cabri-géomètre (en el sentido de Duval). Isabel lee las propiedades geométricas en la interfase gráfica del programa.

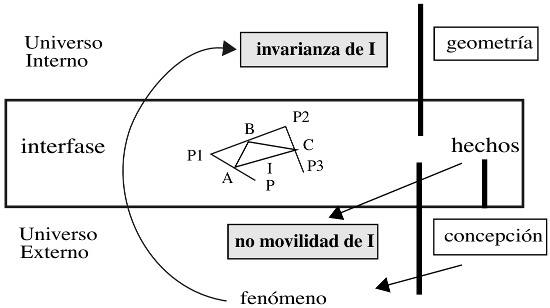
La concepción de Fabien puede describirse rápidamente como "mecánica": los operadores son las primitivas de la interfase del programa, el sistema de representación está dado por la interfase gráfica, los controles son perceptivos. Fabien no lo revela a lo largo de la observación, pero otro estudiante en las mismas circunstancias, hará explícita esta concepción de manera bastante clara:

> Sebastián: Bueno… yo dije… pero no es muy claro… que cuando, por ejemplo, uno mueve P hacia la izquierda, entonces P3 compensa hacia la derecha. Si sube entonces el otro baja…

Si Isabel y Fabien constatan juntos un *hecho* - I esta inmóvil - por el contrario no se dan cuenta del mismo fenómeno. Para uno, I es un invariante en una transformación, para el otro, I es un punto que no se mueve al manipular directamente la interfase del programa. Las concepciones de las cuales acabo esbozar los bordes no se entienden si sólo se tienen en cuenta los "sujetos" en juego en la situación, es necesario tener en cuenta el sistema [Sujeto<>«Milieu»] en esta misma situación (en la cual también habría que

4. Por "étayage" entendemos una serie de modificaciones hechas a un trabajo, reduciendo así la incertidumbre del estudiante, lo cual puede llegar a convertirse, pero no necesariamente, en un efecto "Topaze".

analizar las características didácticas) en la que cada concepción propuesta es finalmente una modelización posible. El juego de las concepciones es lo que constituye el problema didáctico al cual la profesora, Isabel, se ve expuesta.



El dispositivo informático corta en dos universos, un universo interno (al interior de la caja gris) y un universo externo (en el cual se encuentra el utilizador). Esos dos universos se comunican por una interfase - la cual hay que recordar que no es una capa fina sino que tiene anclajes profundos en cada uno de los dos universos. En el universo interno se encuentra en forma física y simbólica un modelo, en este caso un modelo de la geometría. Los cálculos en este modelo determinan el comportamiento de los objetos en la interfase la propiedad de la no variación del punto I en el modelo determina entonces la inmovilidad de su representación en la interfase. Esta inmovilidad la puede observar todo utilizador, y en particular Isabel y Fabien, ese hecho no se volverá un fenómeno, o una propiedad geométrica, si es tratada sólo como una concepción.

La noción de marco permite comprender las dos instancias del sistema [Sujeto<>«Milieu»] que se actualiza constantemente gracias a las interacciones entre Isabel y Fabien, en cuanto a matemáticas se refiere y en el caso de una problemática adidáctica (dejo de lado en este caso las componentes que aportarían por la puesta en situación realizada por Sophie Soury-Lavergne para su estudio).

Una manera simple de describir el hiato observado en la comunicación entre Isabel y Fabien, es decir que *Isabel lee las propiedades geométricas* visibles en la interfase de Cabri-géomètre por medio de representaciones gráficas, mientras que Fabien *observa los objetos* articulados, los mecanismos. El paso de mecanismos a la geometría no depende de sí mismo, es un proceso de modelización que sugiere y resume la ilustración que encontramos arriba.

En la situación que acabo de describir, los protagonistas actúan dentro de un marco que podría llamarse "marco geométrico". Pero para ser preciso, debería más bien hablar de "marco geométrico dinámico" ya que el sistema de representación gráfico posee además propiedades dinámicas (propiedades que se revelan gracias a la manipulación directa). Este aumento de propiedades es esencial puesto que lo que está disponible no es un simple sistema de representación gráfica, sino un verdadero registro semiótico en el cual la robustez de las condiciones geométricas en la manipulación directa constituye una regla de conformidad en el sentido de Duval (1995, pp, 37-38 y arriba, en la sección 5). Las propiedades ostensivas del sistema de representación movilizado en este marco geométrico juegan evidentemente un rol crucial, rol que no se puede comprender sino teniendo en cuenta los usos matemáticos potenciales de los individuos.

El "marco geométrico" da al investigador una herramienta para situar la modelización matemática del sistema [Sujeto<>«Milieu»]. Debemos resaltar el hecho de que en la situación descrita anteriormente, todo sucede como si una parte del marco fuera compartido por el preceptor y el estudiante[5]. Juntos, identifican el cuadrilátero ABCI, y desarrollan una prueba de que este cuadrilátero es un paralelogramo. Sin embargo, no logran identificar la relación del punto I a los puntos P, A, B, C en los mismos términos. Régine Douady muestra esta situación introduciendo la noción de ventana conceptual complementaria a aquella de marco:

> Así, en matemáticas, una ventana conceptual es un fragmento de las matemáticas sujeto a un problema y a alguien que lo investiga, o sujeto a una estrategia de resolución escogida y eventualmente producida por el investigador; indexada por el tiempo. Un marco es una parte de una rama de las matemáticas, indexada por el tiempo. (Douady,1992)

La parte de las matemáticas en cuestión es aquella que evidencia el sistema [Sujeto<>«Milieu»] en la situación que observamos o, mejor aún, aquella que la modeliza.

Volvamos a Isabel y Fabien. Cuando retomen el contacto e intercambien ideas, Isabel va a concluir el encuentro con una "explicación" haciendo explícita la relación entre las dos concepciones, geométrica y mecánica:

202 & 204	"Una vez que has demostrado que [I] es el cuarto punto, puesto que el punto P no depende de [...] de los puntos A, B, C [...] Es por eso que si mueves el punto P, el punto I no tiene porque moverse."

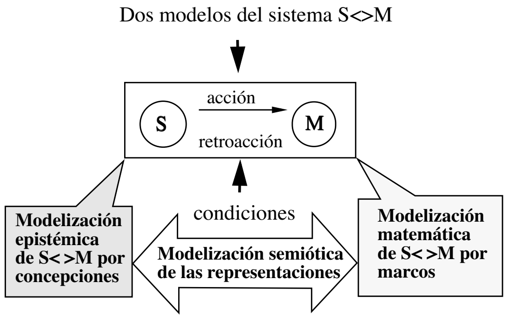
5. En realidad, una manera frecuente de hacer este análisis es identificar el marco con la concepción del profesor o con la concepción del lector. En cuanto a este tema ver la conclusión de este texto.

Fabien finalizará esta explicación y, con ella, el fin del encuentro, con un «Ah entiendo!»

Las representaciones, pivotes entre marco y concepción

Las representaciones, lingüísticas o no lingüísticas, juegan un rol determinante en la caracterización de un marco. En efecto, la caracterización de un marco pasa necesariamente por la de un sistema de representación, o hasta por un registro semiótico. En realidad, como es el caso de las concepciones, un sistema de representación es lo que permite formular los problemas asequibles en el marco considerado, los medios para encontrar las soluciones así como los de la validación de aquellas soluciones. Este sistema de representación puede tener una fuerza particular, marcando, de cierta forma, el marco en el cual se moviliza. Retomemos, por ejemplo, el caso de la geometría: el dibujo geométrico (dibujos dentro de las reglas del arte), las representaciones manipulables en la interfase de un paquete de geometría dinámica, o las representaciones algebraicas de la geometría analítica permiten ver lo específico de cada uno de los marcos correspondientes. El valor ostensivo de estos sistemas de representación es determinante en la puesta en escena de los controles, y por tanto de las formas de validación, en cada uno de los casos evocados - es gracias a la representación que podemos diferenciar, en este ejemplo, tres marcos distintos. Finalmente, resaltemos que, en el caso de la geometría analítica, la representación algebraica permitirá el paso al marco algebraico - a veces a cambio de una pérdida de sentido geométrico en los cálculos (en realidad, es necesario saber que un cambio de marcos va a estar acompañado de una modificación de los problemas que pueden presentarse y tratarse).

El rol que le damos a las representaciones acá en la caracterización de los marcos es análoga a la que le he dado en la constitución del cuarteto que caracteriza las concepciones - en efecto es retomado del rol que le da Gérard Vergnaud a los significantes en la caracterización de los conceptos matemáticos. Así está aún más presente el paralelogramo en los marcos y en las concepciones: los primeros nos dan acceso a una modelización matemática del sistema [Sujeto<>«Milieu»], los segundos nos dan acceso a una caracterización epistémica. El gráfico a continuación ilustra esta dualidad que, de otra parte, subraya el rol pivote de las representaciones.



Las representaciones permiten entonces relacionar marco y concepción, y propiamente hablando una "mediación semiótica" análoga a la que permite relacionar "sentido" y "significado" de un concepto dado, y hasta relacionar significados entre sí. Nótese que la fuerza de las representaciones es a veces tal que, si se constituyen en registros semióticos (es decir integrando unas reglas propias de conformidad), puede parecer que sustituyen el marco o que se confunden con él. Es acá donde reside el origen del hiato entre Isabel y Fabien… Es tal vez esto mismo lo que permite explicar el intento de Régine Douady de introducir una dimensión cognitiva en la definición de marcos en sus publicaciones de mediados de los años 80. La definición que ella propone a principios de los 90, al contrario, vuelve a una posición en la que los marcos están enfocados hacia la modelización matemática: "Un marco es una parte de una rama de las matemáticas, indexada por el tiempo." (ibid. 1991), la noción de "ventana conceptual" propuesta como complemento para tomar en cuenta de forma más precisa el sujeto - en el fondo, la noción de ventana conceptual debería tal vez ser sustituida por la de marco en la ilustración anterior para mostrar de forma precisa una instancia dada del sistema [Sujeto<>«Milieu»]. Nótese que si tuviéramos que caracterizar una ventana conceptual, necesitaríamos las definiciones y los teoremas de un sistema de representación y un modo de prueba o de cálculo. La proximidad entre marco y concepción, en la vertiente matemática y epistémica respectivamente, podría ser investigada hasta el nivel estructural; ¿no sería la intuición sobre esto lo que guió a Gérard Vergnaud al proponer el concepto de "teorema en acto"?

JUEGO DE MARCOS Y JUEGO DE CONCEPCIONES

La distancia que observamos entre Isabel y Fabien, distancia entre las concepciones de un profesor y de un estudiante, puede ser estudiada entre las concepciones de estudiantes. Los estudios que se apoyan sobre la interacción social proponen explotar e investigar este juego de concepciones así como los conflictos socio-cognitivos para suscitar un aprendizaje. Régine Douady, para su trabajo de investigación, concibió unas situaciones experimentales que permiten ver de manera importante ese tipo de interacciones que poseen como virtud, para el investigador, la de dejar ver mejor los procesos que ocurren durante el aprendizaje y la evolución de los estudiantes gracias a las muestras explícitas que aparecen en el diálogo. Los análisis de las situaciones, concebidas en términos de juego de marcos y de dialéctica herramienta-objeto, se llevan a cabo en términos de concepciones de los estudiantes.

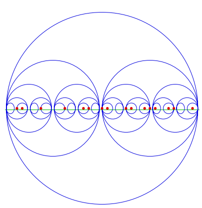
Voy a examinar este aspecto en lo que sigue, apoyándome en un extracto de los estudios hechos por Bettina Pedemonte para la realización de su tesis de doctorado sobre la argumentación y la prueba en matemáticas (Pedemonte, 2002). Veremos como las nociones de «marco» y «concepción» se mezclan de nuevo para permitir comprender las actividades de los estudiantes y sus interacciones.

Una pequeña historia de círculo y de límite

Dos estudiantes de 9° grado, Vincent y Ludovic, se encuentran en una situación de experimentación clásica de resolución de problemas: deben dar una solución común al problema propuesto a continuación, disponen de Cabri-géomètre. Los diálogos fueron grabados para ser, después, analizados desde el punto de vista de la argumentación y la prueba. Me intereso en este caso a un extracto del protocolo situándome desde la perspectiva de un análisis en términos de marcos, de concepción y de representación.

El problema es el siguiente:

> *A partir de un segmento AB, construir un círculo de diámetro AB. Dividir AB en dos partes iguales, AC y CB. Construir dos círculos que tengan por diámetros respectivos AC y CB. Continuar dividiendo los segmentos resultantes en dos mitades iguales, y construir sobre esas partes los círculos que tengan por diámetro esos segmentos.*
> *¿Cómo varía la longitud total de los perímetros?*
> *¿Cómo varía el área total de los círculos?*



Trazar la figura a mano alzada —contrariamente a lo que se puede ver en la figura anterior— da a los estudiantes una idea gráfica de la situación en la cual el estatus matemático no se impone inmediatamente. La resolución del problema se desarrolla en el marco de una *aritmética simbólica* (Balacheff 2001) que es en la cual se inscriben los cálculos del perímetro y del área de un círculo.

En el intercambio de ideas que sigue a continuación, los estudiantes hacen una conjetura sobre el perímetro de la figura. A primera vista uno puede dudar sobre el hecho de que hayan utilizado concepciones que provienen de la aritmética simbólica, lo que sugiere la relación que existe con la figura, o con el álgebra, lo que sugiere la manipulación de expresiones.

9. Vincent:	el perímetro es 2πr y el área es πr^2
10. Ludovic:	si
11. Vincent:	¿pero cómo cambia el radio? ¿r se divide por 2?
12. Ludovic:	si, el primer perímetro es 2πr y el segundo es 2πr sobre 2 mas 2πr sobre 2 y entonces… va a ser lo mismo
13. Vincent:	si…
14. Ludovic:	y va a ser siempre el mismo porque… Mira! Vamos a llamar r el primero, r es el radio del primero, el primer círculo tiene perímetro…
15. Vincent:	2πr
16. Ludovic:	2πr, la suma de los segundos es 2πr sobre 2
17. Vincent:	más 2πr sobre 2 entonces 2πr… Etc… el otro es 2πr sobre 4 pero 4 veces
18. Ludovic:	entonces la suma es siempre 2πr
19. Vincent:	es siempre el mismo perímetro…

Vincent y Ludovic parecen estar en perfecto acuerdo al considerar la suma de los perímetros de los círculos como constante, para cualquier número de iteraciones de la construcción. Los estudiantes luego abordan la pregunta del área de la figura:

20. Ludovic:	si, en cambio, el área… el área es πr^2 al cuadrado
21. Vincent:	Vincent: entonces acá vamos a tener…
22. Ludovic:	hum… Se va a dividir por 2 cada vez
23. Vincent:	Si, $\pi(r/2)^2$ más $\pi(r/2)^2$ es igual a
24. Ludovic:	es igual a … $\pi r^2/2$
25. Vincent:	si es así dividiendo por dos

26. Ludovic:	si, y entonces va a ser siempre la mitad de la anterior
	el área se divide cada vez por dos…. ¿Y el límite?
31. Vincent:	En el límite es una recta, que se confunde con el segmento inicial…
32. Ludovic:	pero el área se divide por dos cada vez
33. Vincent:	si, pero el límite llega a cero
34. Ludovic:	si es verdad que si uno continua…
35. Vincent:	tiende a cero
36. Ludovic:	si tiende a cero el área

De nuevo, el acuerdo parece ganar: el área de la figura en el paso n de la construcción va a ser de la forma $\pi r^2/2^n$ y entonces va a tender a cero. En realidad, no es así:

37. Vincent:	si pero y ¿entonces el perímetro?
38. Ludovic:	no, el perímetro es siempre el mismo
39. Vincent:	a lo mejor el perímetro llega a ser dos veces el segmento
40. Ludovic:	¿Cómo?
41. Vincent:	llega sobre el segmento… si los círculos son sumamente chiquitos
42. Ludovic:	hum… pero siempre va a ser $2\pi r$
43. Vincent:	si pero cuando el área tiende a cero será casi igual…
44. Ludovic:	no, yo no creo
45. Vincent:	si uno hace tender el área a cero también hace tender el perímetro a cero… no sé…
46. Ludovic:	voy a terminar la primera demostración
47. Vincent:	pero, si uno hace tender el área a cero, uno podría hacer tender el perímetro a dos veces el… Al diámetro del primero

Ludovic termina de escribir la demostración. Los estudiantes ya no se hablan. A continuación reproduzco la demostración que muestra el buen dominio del marco algebraico de Ludovic, para Vincent es diferente como lo veremos en el análisis que sigue.

Sea R el primer radio (R=AB)

1) Sean P_1, P_2, P_4,… los perímetros respectivos del primer círculo, de los dos segundos, de los cuatro terceros, …

$P_1=2\pi R$

$P_2=2\pi R/2 +2\pi R/2 = 2\pi R$

$P_4=2\pi R/4+2\pi R/4+2\pi R/4+2\pi R/4=2\pi R$

…

$P_n=2\pi R/n+2\pi R/n +2\pi R/n +\ldots.+2\pi R/n =2\pi R$

< ------------- n veces ------------ >

entonces el perímetro es constante

2) Sean A_1, A_2, A_4,… las áreas respectivas del primer círculo, de los dos segundos, de los cuatro terceros, …

$A_1=\pi R2$

$A_2\ \pi R^2/4+\pi R^2/4=\pi R^2/2=A1/2$

$A^4=\pi R^2/16+\pi R^2/16+\pi R^2/16+\pi R^2/16=\pi R^2/4=A1/4$

…

$A_n=\pi R^2/n2+\pi R^2/n^2+\ldots+ \pi R^2/n^2=\pi R^2/n^2 * n= \ =\pi R^2/n = A_1/n$

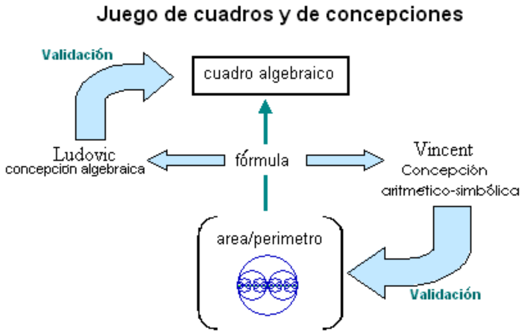
Entonces el área tiende a cero cuando n aumenta

Las representaciones, pivotes entre marco y concepción

Si Ludovic se encuentra en el marco algebraico, como lo muestran el diálogo con Vincent y la demostración, y moviliza una concepción que podríamos calificar de algebraica, no podemos decir lo mismo de Vincent. Este último domina las escrituras literales, que evocan el álgebra, pero bajo el control de la evidencia perceptiva: la figura se "aplasta" sobre el segmento, su área tiende a cero y su perímetro a la longitud del segmento. La concepción de Vincent es de tipo "aritmético simbólica", concepción en la que el sistema de representación y los operadores vienen del álgebra pero cuya estructura de control está marcada por el regreso a la situación modelizada.

El «milieu» para Vincent es el de los objetos de la geometría, representados y manipulados en el registro gráfico y en los cuales lleva a cabo experiencias mentales. Dos marcos interactúan entonces: geométrico y algebraico, pero el geométrico acá es, en realidad, el mundo material de la interfase. En cambio, el «milieu» para Ludovic es el de las escrituras algebraicas en el que sigue la sintaxis; trabaja en el marco algebraico.

El sistema de representación del álgebra asegura el lazo entre la concepción de Vincent y la de Ludovic, en cambio el sistema de representación gráfico no tiene el mismo estatus en los dos casos. Para Ludovic, esta representación permite pasar de un marco algebraico que guía las primeras escrituras para no volver al dibujo. Para Vincent, la representación constituye el dominio fenomenal que permite el control de lo que está representado por las expresiones literales —a primera vista o a partir de una experiencia mental.



La representación, la fórmula algebraica en este caso, juega el papel de pivote al mismo tiempo entre las concepciones de los estudiantes y entre los marcos en los cuales cada uno se apoya. La concepción algebraica de Ludovic le permite explotar la propiedad de ser un registro semiótico de la escritura algebraica, en particular apoyándose en las reglas de conformidad a este registro. En cuanto a Vincent, se queda en la fuerza ostensiva del sistema de representación de la situación, es decir su capacidad de mostrar las propiedades que deben poderse leer directamente sobre la figura que los estudiantes construyeron.

Entre los marcos ese mismo pivote tiene la fuerza de una mediación semiótica, permite pasar del marco en el cual se propone el problema (el de los objetos de la geometría y de sus propiedades métricas expresadas por fórmulas) al marco algebraico. Entre las concepciones permite las interacciones y el diálogo entre los estudiantes, e incluso su cooperación (ver los dos primeros extractos) hasta el momento en el que se encuentran frente a la representación común de significados y de modos de funcionamiento diferentes, en especial en el área de la validación.

El lector puede resolver el problema propuesto en cada uno de los marcos, algebraico y aritmético simbólico, para constatar que es posible; tanto es así que, en el segundo caso, se puede sobrepasar la paradoja que suscita el acercamiento de lo que “dice” el cálculo y de lo que “muestra” el dibujo

—lo que Vincent no logra hacer. También se puede constatar que la resolución correcta de este problema exige el dominio de un razonamiento por recurrencia— el cual no posee Ludovic y que sobrepasa por una representación —y del tratamiento de las series numéricas.

¿LA INFORMÁTICA PROPORCIONA UN MARCO?

En las últimas líneas de la tesis de doctorado, Régine Douady constata algo sobre lo que me gustaría detenerme un momento. Ella escribe: “Señalemos que la informática está ofreciendo a los profesores un marco susceptible de entrar en el juego de marcos el cual puede mostrarse muy eficaz desde el punto de vista del aprendizaje. Este marco puede, sin embargo, resultar estéril, si solamente se yuxtapone, y extranjero a los otros.” (ibid., p. 319)

En casi veinte años, la informática ha progresado enormemente y se ha propagado en la enseñanza de formas diferentes, en las cuales incluyo las calculadoras que ofrecen nuevas funcionalidades de cálculo simbólico y de tratamiento gráfico. Las aplicaciones desarrolladas son muy variadas, entre ellas podemos contar notablemente los recursos multimedia, los medios para el aprendizaje y para la representación y el tratamiento de objetos matemáticos. Es de estos últimos que voy a tener en cuenta la pregunta que hace Régine Douady; los medios informáticos para el aprendizaje deben provenir de una problemática más general que la de los marcos a causa de las interacciones de origen didáctico que ponen en obra.

Para ir más lejos, es necesario recordar lo que Raymond Duval llama precisamente registro semiótico. Un registro semiótico en el sentido de Duval (1995, pp. 37-38) debe satisfacer las cuatro condiciones siguientes:

a. Esta constituido por *trazas identificables* como una representación de algo.

b. Disponer de *reglas de transformación* para producir otras representaciones que puedan aportar conocimientos.

c. Disponer de *reglas de conversión* hacia otro sistema de representación para hacer explícitos otros significados.

d. Disponer de *reglas de conformidad* para la constitución de unidades de nivel superior.

Si la pregunta fuera la se saber si un medio informático de representación y de tratamiento de objetos matemáticos constituye un registro semiótico, entonces la respuesta que se impone es claramente positiva. Estos programas, que constituyen la clase de los micromundos, satisfacen inmediatamente los criterios (a), (b) y (d). El criterio (c), en cuanto a él, al menos se satisface por el hecho de que un software ha sido concebido como un objeto intermediario entre varios sistemas de representación, como por ejemplo el de un modelo de referencia del cual él es la expresión y el de un lenguaje en el cual ese modelo es asequible al cálculo. El criterio (iv) debe poderse distinguir: en efecto la existencia de reglas de conformidad específicas a la construcción de entidades de orden superior a partir de entidades elementales (que se trate de criterios sintácticos como es el caso de los programas algebraicos o de criterios perceptivos como es el caso de programas de geometría dinámica) va a dar a los micromundos un poder que no poseen los registros semióticos estáticos. En especial, la validez en el sentido matemático parecerá acercarse a la validez en el sentido del registro, o hasta se confundirá con ella.

Las matemáticas tienen la particularidad de utilizar varias representaciones a la vez como parte del «milieu» (el objeto triángulo) y como sistemas de significantes (la representación del triángulo). Es en estos términos, al oponer «registro»[6] y «milieu», que podría haber analizado el hiato entre la comprensión que tienen Isabel y Fabien de la situación: Isabel lee la geometría en el registro que ofrece la interfase de un micromundo en geometría dinámica, Fabien manipula los objetos del programa Cabri-géomètre. Esta dualidad toma una dimensión mucho más significativa en el marco de los micromundos matemáticos debido al puesto que ocupan las retroacciones del programa, las cuales pueden ser vistas como retroacciones de objetos a partir de las acciones del utilizador, o como una indicación de la violación de una regla de conformidad en la construcción de los significantes elementales para la constitución de un significante de nivel superior.

Herramientas poderosas de representación y de tratamiento de objetos matemáticos y de sus relaciones, los micromundos pueden modelizarse ya sea como registros semióticos al servicio del matemático, ya sea como «milieux» particularmente pertinentes para suscitar ciertos aprendizajes. El juego de la doble dimensión de registro y de «milieu» de estos programas informáticos le dan un valor hasta el momento sin comparación para resolver problemas el cual podrían aprovechar los matemáticos, pasando por una actividad de escritura y de expresión de ideas en el primer caso, y como una actividad de exploración y de experimentación en el segundo caso.

Así, la informática ofrece nuevos registros semióticos y nuevos “milieux” para las matemáticas. Sin embargo, constatar esto no nos ayuda a avanzar en la pregunta inicial de Régine Douady: ¿la informática proporciona un marco? Para responder a esta pregunta, es necesario precisar la rama de las matemáticas a la cual permite acceder tal o tal software. Decir que es

6. Es decir “registro semiótico”.

la geometría en el caso de Cabri-géomètre, o del álgebra para Edix o el análisis para Mapple no es suficiente. Es importante intentar no ir muy rápido, puede resultar engañoso.

En geometría, varios ejemplos muestran comportamientos sorprendentes de construcciones elementales que podría uno suponer sin historia. El buscar las intersecciones de círculos y de rectas, es la fuente de comportamientos inesperados, sobre los cuales Ulrich Kortenkamp, autor de un trabajo pionero sobre los fundamentos de la geometría dinámica, analiza en su tesis los orígenes y las implicaciones (Kortenkamp 1999). El modelo matemático —es decir el marco en el sentido de Douady— que justifica los micromundos de geometría dinámica no puede ser simplemente el de la geometría, puesto que la geometría no es suficiente en sí misma para determinar el comportamiento de los objetos de estos micromundos en la manipulación directa. La informática proporciona a la geometría un registro semiótico en el que una regla de conformidad es la robusteza en la manipulación directa de propiedades visibles en la configuración dada, faltaría comprender qué noción de validez en el sentido matemático sobreentiende esta regla. Para eso, Kortenkamp propone redefinir la noción de teorema: un teorema en geometría dinámica es un enunciado de geometría dinámica [digamos, un programa] que es verdadero y en el cual todas las instancias a las cuales se puede acceder gracias a un desplazamiento continuo son también verdaderas (ibid., p.111). Por tanto, la cuestión de saber qué marco debemos tratar queda abierta.

Podríamos hacer observaciones de este tipo para cualquier otro micromundo matemático (en álgebra, en análisis, en estadística y probabilidad, etc.). Con el mismo tipo de cuestionamiento sobre el origen del marco que necesitaría el dominio matemático al cual el micromundo permite acceder, o sobre el cual se podría abrir una ventana conceptual. Algunas de estas ventanas se abrirán sobre las matemáticas que había previsto el que lo concibió, otras sorprenderán y será necesario realizar un trabajo importante para hacerlas explícitas y precisas.

Finalmente, la pregunta de Régine Douady queda sin respuesta. O más bien, la respuesta sería que no sabemos suficiente todavía. Si podemos reconocer en la interfase de los medios informáticos la constitución de nuevos registros semióticos, de nuevas herramientas de expresión en matemáticas, la pregunta sobre la relación de los registros con los modelos de cálculo utilizados y los modelos (marcos) de referencia queda abierta. Podemos entonces arriesgarnos a responder: SI, la informática si brinda nuevos marcos, pero no conocemos de ellos sino la apariencia, la *representación*. Su objeto, la *referencia*, está por descubrir: no es simplemente lo que se pensó para concebirlo.

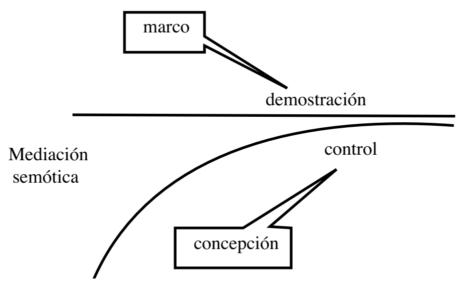
CONCLUSIÓN

La diferencia entre «marco» y «concepción» se debe buscar en el anclaje problemático de cada uno de estos conceptos. Cada uno de ellos tiene como objetivo el evidenciar de un sistema cognitivo que está constituido por dos subsistemas, un sujeto y un «milieu», en el cual las interacciones y la dinámica son especificas a un estado del conocimiento. Cada uno de ellos fue forjado para poder abordar el estudio de las circunstancias que permiten la evolución de este estado. En la problemática de los "marcos" es a partir del análisis matemático que podemos inferir esas circunstancias, en la de las "concepciones" es del análisis de las situaciones como productoras de condiciones que harán necesaria la evolución que se busca. Los fundamentos de la teoría de las situaciones didácticas se construyen a la vez a partir de especificidades de las matemáticas, así como de la comprensión del sistema [Sujeto<>«Milieu»]. Entonces es necesario poder considerar este sistema con respecto a las matemáticas —y es de lo que se encarga el concepto de «marco»— y con respecto al sujeto que aprende —y es de lo que se encarga el concepto de «concepción».

Los registros son un punto focal de los marcos, así como de las concepciones. Pero no son más que eso. Las reglas de conformidad que Raymond Duval describió como componentes definitivas de un registro pueden parecer justificar a veces la identificación de un marco a un registro, e incluso reducir las concepciones a un juego de lenguaje. Es por ejemplo el caso de la demostración o hasta del cálculo algebraico. Pero una posición así consistiría, de hecho, en identificar la representación y el representado. Raymond Duval nos previene él mismo de esta posible confusión y lo resalta con el fin de que al menos consideremos dos registros que nos permitan ser concientes de la existencia del objeto matemático en referencia. Es necesario entender que las estructuras de control propias a un marco, o a una concepción, no se confunden con las reglas de conformidad al registro asociado a este marco que no tienen, ellas, sino un valor sintáctico o estructural. Así, en álgebra el paso de $[x + a = 0]$ a $[x = -a]$ es posible por la utilización de una regla de conformidad al registro algebraico real (regla de reescritura que se puede expresar como: "a pasa del otro lado del igual y cambia de signo" que no se puede confundir con su referencia en el álgebra real que es el teorema. $\forall a \forall b \forall c,\ a = b$ implica $a + c = b + c$ En efecto, contrariamente a la regla que de cierta manera es autónoma, el teorema no tiene sentido como tal, como nos lo recuerda precisamente Alessandra Mariotti, si no está explícitamente ligado a una teoría y a una demostración dentro de una cierta teoría. Sin embargo, existe una estrecha relación entre teorema y regla: el teorema da un sentido a la regla, o más aún, la regla muestra una instancia operacional del teorema.

Las formas de especificar y caracterizar «marco», «registro» y «concepción», teoremas y demostración, reglas de control y argumentación, reglas de conformidad y género semiótico, son estructuralmente análogas. Finalmente, solas, las separan claramente sus problemáticas, respectivamente matemática, semiótica y cognitiva. Es necesario estar preparado para que la línea que las separa sea a veces difícil de trazar, especialmente cuando nos interesaremos en las matemáticas relativamente avanzadas. Un ejemplo significativo se encuentra en los escritos de Adrien Douady (1994), "Cambio de marcos a partir de superficies mínimas", en el cual hacer la diferencia entre las concepciones del investigador de marcos o los marcos de los registros semióticos no es tan fácil. Los comentarios del investigador, que tienen como fin el mostrar al lector lo que puede ser el proceso de investigación en matemáticas, no deben hacer ilusiones. Podrían no ser tanto como un develamiento de la concepción del investigador sino más bien la compañía metamatemática de los marcos que permite relacionarlos dentro de las matemáticas mismas y el que sean operacionales. La expresión de un marco no puede ser transmitida por un locutor, las matemáticas están hechas de manera que sea necesario esperar a que las concepciones evolucionen hacia una conformidad más grande al saber de referencia. En el fondo, la representación y el funcionamiento de un marco se pueden adoptar de manera pragmática a lo que el matemático profesional dice. La ilustración siguiente caricaturiza la complejidad del trabajo. Concluiré sobre esta mirada rápida.

$$\lim_{x \text{ aprende } \mu} (\text{concepción de x sobre } \mu) = \text{marco } (\mu)$$



REFERENCIAS

Artigue, M. (1991). Épistémologie et didactique. *Recherches en didactique des mathématiques, 10* (2/3), 241-285.

Balacheff, N. (1995). Conception, propriété du système sujet/milieu. Publié dans: Noirfalise R., Perrin-Glorian M.-J. (Eds.), *Actes de la VII° Ecole d'été de didactique des mathématiques* (pp. 215-229). Clermont-Ferrand: IREM de Clermont-Ferrand.

Balacheff, N. (1995b). Conception, connaissance et concept. En D. Grenier (Ed.), *Séminaire Didactique et Technologies cognitives en mathématiques* (pp. 219-244). Grenoble: IMAG.

Balacheff N. (2001). Symbolic arithmetic versus Algebra, the core of a didactical dilemma. En R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell y R. Lins (Eds.), *Perspective on School Algebra* (pp. 249-260). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques, 7* (2), 33-115. (aussi dans Brousseau 1998 pp. 47-112).

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Douady, R. (1984). *Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement mathématique. Une réalisation dans tout le cursus primaire*. (tesis doctoral). Paris: Université de Paris VII.

Douady, R. (1985). The interplay between different settings. Tool-object dialectic in the extension of mathematical ability. En L. Streefland (Ed.), *Proceedings of the ninth international conference for the psychology of mathematics education* (Vol. 2, pp. 33-52). Utrecht: State University of Utrecht.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques, 7* (2).

Douady, R. (1992). Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. *Repères-Irem, 6,* 132-158.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*. Bernes: Peter Lang.

Kortenkamp, U. (1999). *Foundations of Dynamic Geometry.* (tesis doctora). Zurich: Swiss Federal Insitute of Technology.

Laborde, J.-M. (1997). Exploring non-euclidean geometry in a dynamic geometry environment like Cabri-géomètre. En J. King y D. Schattschneider (Eds.), *Geometry Turned On* (pp. 185-192). MAA Notes, vol. 41.

Soury-Lavergne S. (1998). Etayage et explication dans le préceptorat distant, le cas de TéléCabri. (tesis doctoral) Grenoble: Université Joseph Fourier.

Pedemonte, B. (2002). Étude didactique et cognitive des rapports de l'argumentation et de la démonstration dans l'apprentissage des mathématiques. (tesis doctoral). Grenoble: Université de Gène et Université Joseph Fourier.

Nicolas Balacheff
Laboratorio Leibniz-IMAG
Grenoble, Francia