

DIVERSIDAD EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS: EN LA BÚSQUEDA DE UN NÚCLEO COMÚN

Pedro Gómez – Universidad de Granada

En este artículo analizo los trabajos presentados en el decimoquinto estudio ICMI sobre formación de profesores de matemáticas. Este análisis da cuenta de la diversidad de contextos en los que tiene lugar dicha formación y la consecuente multiplicidad de modelos con los que los investigadores y formadores de profesores abordan esta cuestión. ¿Es posible identificar, dentro de esta diversidad, un núcleo común que permita conceptualizar el conocimiento del profesor de matemáticas y fundamentar programas de formación inicial? La propuesta “matemáticas para la enseñanza”, de Ball y sus colaboradores, es una opción que surge del análisis de la práctica. Describo y critico esta propuesta, y sugiero una opción complementaria, de carácter analítico. Esta opción se basa en la caracterización de las actividades que idealmente debería realizar un profesor al planificar, llevar a la práctica y evaluar unidades didácticas. Con esta aproximación, es posible determinar sistemáticamente las capacidades que pueden contribuir al desarrollo de las competencias profesionales del profesor de matemáticas y, por lo tanto, fundamentar programas de formación inicial.

FORMACIÓN DE PROFESORES Y CONOCIMIENTO DEL PROFESOR

En la semana del 15 al 21 de mayo de 2005 se celebró en Aguas de Lindóia, Brasil, el decimoquinto estudio ICMI sobre formación de profesores de matemáticas. En este foro de discusión se trataron las principales cuestiones de actualidad sobre este tema. En la primera parte de este artículo presento mis impresiones sobre esta reunión y describo la problemática que se trató allí. La principal característica de esta problemática es la *diversidad*. Hay una diversidad de contextos en los que tiene lugar la formación de profesores de matemáticas en el mundo. Esta práctica tiene lugar en culturas y condiciones que cambian de país a país. Por lo tanto, los

investigadores en educación matemática y los formadores de profesores de matemáticas se enfrentan a problemas diferentes. Esto implica que existe una gran *variedad* de modelos de formación de profesores de matemáticas, como posible solución a estos problemas. Y también implica que, dentro de cada contexto, los investigadores que trabajan en el campo se preocupan por cuestiones y aspectos diferentes de esta actividad. Basándome en los trabajos presentados en el ICMI 15, identifiqué las principales características de esta diversidad. En la segunda parte del artículo, abordé una de las cuestiones de la formación de profesores de matemáticas que se reitera dentro de esta diversidad: el conocimiento del profesor. En particular, presento y critico la noción de “matemáticas para la enseñanza” propuesta por Ball y sus colaboradores (Ball, Bass, Sleep y Thames, 2005b), como una nueva teoría que extiende las ideas de Shulman (1986, 1987) sobre el conocimiento pedagógico de contenido. Abordé la problemática del conocimiento didáctico del profesor de matemáticas desde un punto de vista funcional y con una perspectiva analítica y utilicé el procedimiento de análisis didáctico para presentar una propuesta sobre las competencias y capacidades del profesor de matemáticas.

Formación Inicial y Permanente de Profesores de Matemáticas: Estudio ICMI 15

La Comisión Internacional de la Enseñanza de las Matemáticas (ICMI) apoya y promueve la organización de estudios sobre temas específicos de educación matemática (conocidos como los “Estudios ICMI”). Estos estudios tienen dos elementos centrales: la organización de un seminario internacional y la publicación de un libro sobre el tema en cuestión. Los estudios más recientes han sido sobre aplicaciones y modelización en educación matemática (la publicación aparecerá en el 2006), la educación matemática en diferentes tradiciones culturales (Graf, Leung y López-Real, 2005) y el futuro de la enseñanza y el aprendizaje del álgebra (Stacey, Chick y Kendal, 2004). En esta ocasión, Deborah Ball (Universidad de Michigan, Estados Unidos) y Ruhama Even (Instituto Weizman de Ciencia, Israel) propusieron abordar la problemática de la formación inicial y permanente de profesores de matemáticas.

El estudio se promovió y organizó a partir de un documento de discusión que se distribuyó y publicó en varios lugares (e.g., ICMI 15, 2004). La asistencia a la reunión fue por invitación. Para ser invitado era necesario enviar un trabajo y que este trabajo fuese aceptado. Los trabajos fueron evaluados por tres revisores. Se aceptaron 125 trabajos (15th ICMI Study, 2005). Asistieron 135 investigadores y formadores de profesores de 35 países. Se realizaron cuatro tipos de actividades académicas: conferencias y paneles plenarios, presentaciones, talleres y discusiones en grupos. Ésta última fue la actividad principal de la reunión. Los participantes se organizaron en dos grandes ejes: formación inicial y formación permanente. Dentro de cada uno de estos ejes se tuvo en cuenta el interés por la formación de profesores tanto de primaria como de secundaria.

Es claro que no “estaban todos los que son, ni eran todos los que estaban” en formación de profesores de matemáticas. No obstante, los trabajos y las contribuciones de este grupo de investigadores y formadores de profesores se pueden considerar como representativos del estado actual de la investigación y desarrollo en el campo. A continuación, analizo los trabajos presentados y describo los aspectos que me parecieron más relevantes de las discusiones y presentaciones a las que asistí durante la reunión.

Investigación en Formación de Profesores de Matemáticas

Ha habido recientemente dos trabajos de meta-análisis¹ en el área de formación de profesores de matemáticas. Adler, Ball, Krainer, Lin y Novotna (2005a), con motivo de un grupo de estudio organizado para el ICME-10, revisaron 160 trabajos de investigación en formación de profesores de matemáticas. Estos trabajos fueron publicados en las revistas de investigación más representativas en el campo², en las memorias de algunas de las reuniones (e.g., PME, ICME, CERME) y en el último manual de investigación en educación matemática (Bishop, Clements, Keitel, Kilpatrick y Laborde, 1996). Al abordar las preguntas:

- ◆ ¿qué es lo más significativo de la investigación en formación de profesores de matemáticas durante los últimos cinco años? y
- ◆ ¿qué investigación se está produciendo que pueda contribuir al aprendizaje y desarrollo de los profesores?,

identificaron cuatro cuestiones que caracterizan la mayoría de los trabajos:

- ◆ son de carácter cualitativo y a pequeña escala;
- ◆ el formador es quien investiga sobre su propia práctica;
- ◆ predomina la investigación proveniente de países de habla inglesa; y
- ◆ algunos problemas han sido estudiados de manera extensa (pero no exhaustiva), mientras que hay preguntas importantes que están sin examinar.

Con respecto a la última cuestión mencionan, por ejemplo, áreas de investigación como el aprendizaje de los profesores por fuera de los contextos de reforma, el aprendizaje de los profesores a partir de la experiencia, el aprendizaje de los profesores que aborde directamente la desigualdad y la diversidad en la enseñanza de las matemáticas, la comparación de diferentes oportunidades de aprendizaje y los procesos de “dimensionamiento”³.

En su conferencia plenaria en el ICMI-15, Jill Adler y Barbara Jaworski reiteraron estos puntos y resaltaron la importancia de (Adler y Jaworski, 2005):

- ◆ trabajar en el diseño y desarrollo de programas de gran escala que puedan mantenerse a largo plazo;
- ◆ ayudar a posibles autores a escribir en inglés;
- ◆ estudiar las cuestiones relacionadas con las políticas de formación de profesores de matemáticas; y
- ◆ abordar la problemática de la práctica de los formadores y su relación con el aprendizaje de los profesores y de los estudiantes.

Aunque en la reunión se presentaron algunos resultados de investigación, ésta no fue la característica principal de los trabajos que se discutieron en ella. De hecho, esta reunión brindó la

¹ El meta-análisis es un proceso en virtud del cual se analiza la información contenida en varios estudios sobre un cierto tema y se resumen y organizan sus resultados. Su propósito es basarse en la literatura existente para dar luces sobre el estado del conocimiento acerca de una cuestión concreta. Por ejemplo, en medicina se utiliza frecuentemente el meta-análisis para revisar los estudios sobre los efectos de ciertas terapias y evaluar su eficacia.

² Journal of Mathematics Teacher Education, Educational Studies in Mathematics, Journal of Research in Mathematics Education, Journal of Mathematical Thinking & Learning, Journal of Teacher Education, Mathematics Teacher Education and Development, entre otros.

³ Es decir, pasar de proyectos pequeños y locales a proyectos de mayor escala.

oportunidad de conocer aspectos de la formación de profesores de matemáticas que en general no se publican. En particular, fue posible apreciar la gran variedad de contextos, problemas, modelos y soluciones que existen en el campo de la formación de profesores de matemáticas. A continuación, exploro esta variedad desde dos perspectivas. Primero, presento un análisis de la diversidad de modelos de formación de profesores de matemáticas en algunos países representados en el estudio. Después, presento un análisis de los trabajos que fueron presentados.

Sistemas de Formación de Profesores de Matemáticas en el Mundo

Los organizadores del eje I⁴ del estudio pidieron a los participantes que enviaran una descripción del sistema de formación de profesores de matemáticas en su país. Las preguntas que ellos propusieron para guiar esta descripción fueron las siguientes:

- ◆ ¿Quién forma a los profesores y qué los califica para hacerlo?
- ◆ ¿Cuál es la duración de la formación de profesores y cómo se distribuye entre el estudio formal y la experiencia práctica?
- ◆ ¿Cómo se diferencia la formación de profesores de matemáticas de primaria y secundaria?
- ◆ ¿Cuál es la proporción de tiempo que se dedica a los diferentes temas (e.g., matemáticas, pedagogía general, didáctica de la matemática)?
- ◆ ¿Quién entra a la profesión de profesor y cuáles son los incentivos y obstáculos para hacerlo?
- ◆ ¿Qué proporción de quienes se preparan para enseñar terminan haciéndolo y durante cuánto tiempo?

Se recibieron 27 documentos correspondientes a 18 países (hay por ejemplo, descripciones de los sistemas de formación de seis estados de Estados Unidos y, en algunos casos, se separa el sistema para primaria en un documento diferente del de secundaria). Los documentos tienen diferentes niveles de detalle. No todos los documentos abordan todas las preguntas y algunos de ellos abordan cuestiones que no se incluían en las preguntas. Lo que presento a continuación es un resumen de los aspectos que me parecieron más interesantes en estos documentos. El propósito de este resumen es hacer evidente la *variedad* de contextos, modelos y esquemas para la formación de profesores de matemáticas en el mundo⁵.

El sistema de formación de profesores de matemáticas en un país (sus políticas, instituciones, programas, etc.) es el producto de una tradición y una historia específica a su contexto. Las líneas generales que regulan el sistema están establecidas en unas leyes (que abarcan, en general, todo el sistema educativo) y en los consiguientes decretos que las operacionalizan. Las leyes varían de país a país. En algunos casos, como en el sistema español, las normas determinan con bastante detalle los requisitos que debe satisfacer un individuo para poder ejercer como profesor. En otros casos, las normas definen con menor detalle las condiciones en las que debe tener lugar la formación. En el caso de países federales (como Estados Unidos, Alemania o Australia), las normas dependen de los estados y las regiones, o incluso de las instituciones que ofrecen la formación de los profesores. En todo caso, siempre

⁴ Éste es el eje sobre formación inicial. Más adelante describo la estructura del estudio.

⁵ Estos documentos se distribuyeron por correo electrónico y no se encuentran publicados.

hay un marco legal que determina las condiciones generales de acuerdo con las cuales se organizan los sistemas de formación de profesores de matemáticas.

La formación tiene lugar dentro de unas instituciones. En la mayoría de los casos, estas instituciones son universidades. No obstante, en Bostwana y Uganda existen centros de formación (colleges) que comparten esa responsabilidad. Y en países como Dinamarca, Italia y Portugal (en primaria), los centros de formación de profesores se encargan exclusivamente de este trabajo.

Los esquemas de formación son muy variados. Por ejemplo, en el caso español, la mayoría de quienes optan por llegar a ser profesores de matemáticas de secundaria han obtenido una licenciatura en matemáticas (5 años) y han realizado un curso de cualificación pedagógica (Sierra, 2004, p. 3). No obstante, para obtener una plaza, deben también aprobar las oposiciones (una secuencia de exámenes de clasificación). Las plazas disponibles las ocupan quienes obtienen las mejores notas. En este esquema, se separa claramente la formación matemática del futuro profesor de su formación pedagógica y didáctica, aunque, hasta hace un tiempo, algunas universidades ofrecían asignaturas de último año en estas áreas. En Francia y Portugal, la formación matemática del futuro profesor de matemáticas es también el resultado de haber cursado una licenciatura de matemáticas que lo prepara como investigador en matemáticas. Éste no es necesariamente el caso en otros países donde la formación matemática del futuro profesor de matemáticas es producto de un currículo diferente del que sigue quien piensa dedicarse a la investigación en matemáticas. En aquellos casos en los que el futuro profesor sigue una formación específicamente diseñada para su profesión, existen diferencias en la integración de la formación matemática y la formación pedagógica y didáctica. Por ejemplo, en algunos estados de Estados Unidos, estas dos formaciones son independientes y sólo se integran al final de la licenciatura. Por otro lado, en países como Sudáfrica y Dinamarca, se busca integrar estos aspectos a lo largo de toda la carrera. En el caso de Dinamarca, la formación matemática se refiere exclusivamente a las matemáticas escolares que los futuros profesores han de enseñar. Éste no es el caso en muchos otros países en los que los futuros profesores estudian principalmente las matemáticas académicas⁶. Finalmente, existen también grandes diferencias en la aproximación a la práctica. En algunos casos, los futuros profesores tienen un contacto reducido con la práctica (unos pocos meses o unas cuantas semanas, como en España, República Checa y Suecia). En el otro extremo, el período de prácticas se puede extender durante dos años (e.g., Francia, Portugal y Uganda).

En los países en los que hay más candidatos que plazas disponibles el acceso al trabajo se obtiene en general a través de un examen de clasificación. Es el caso de Australia, Dinamarca, Alemania y España. Por otro lado, y como es natural, en países donde la demanda supera la oferta, como Bostwana, Inglaterra, Sudáfrica, Suecia y algunos estados de Estados Unidos, los requisitos son mucho menos restrictivos. En Inglaterra y Bostwana los futuros profesores reciben becas para realizar su formación. En Brasil y Bostwana muchos de los profesores que han tenido éxito en su formación dejan la profesión a los pocos años de haber entrado en ella para dedicarse

⁶ Con “matemáticas académicas”, me refiero a las matemáticas que se enseñan y aprenden en las licenciaturas de matemáticas. Por su lado, las “matemáticas disciplinares” aluden al contenido de la actividad de los matemáticos profesionales y las “matemáticas aplicadas” al uso de las matemáticas en actividades profesionales o disciplinas científicas. Finalmente, las “matemáticas escolares” se refieren a las matemáticas que se enseñan y aprenden en la escuela.

a otras actividades. En las descripciones de los sistemas de los diferentes países resulta evidente que la demanda por plazas de profesor de matemáticas y la retención de esos profesores en esas plazas están relacionadas directamente con los salarios y los beneficios que ellos obtienen. En los países con alta demanda de plazas (como España, Australia, Dinamarca y Alemania), los salarios son altos (comparativamente a nivel internacional) y los profesores disfrutan de los beneficios de ser funcionarios públicos. Mientras que los países que ofrecen salarios relativamente bajos (e.g., Bostwana, Inglaterra, Sudáfrica, Estados Unidos) son aquellos en los que hay dificultad para incorporar profesores a la actividad docente.

Comparación de dos Sistemas de Formación Francia y Dinamarca

La mayoría de los documentos a los que he hecho referencia en el apartado anterior presentan descripciones *generales* de los sistemas de formación de profesores de matemáticas en diversos países. Pero, ¿cuál es el detalle de estos sistemas? Viviane Durand-Guerrier y Carl Winsløw presentaron en el grupo de trabajo 3 un documento que aborda esta cuestión (Durand-Guerrier y Winsløw, 2005). Se trata de un estudio comparativo de las características y productos de los sistemas de formación de profesores de matemáticas de secundaria de Francia y Dinamarca.

Ellos centran su esquema de comparación en la noción de conocimiento del profesor de matemáticas. Citando a Bromme (1994), identifican tres componentes del conocimiento del profesor: conocimiento del contenido temático a enseñar, conocimiento pedagógico y conocimiento didáctico. En este trabajo, los autores muestran cómo los sistemas de formación en los dos países organizan el desarrollo de las tres componentes y cómo estas componentes aparecen en la actuación de los futuros profesores cuando abordan tareas hipotéticas de enseñanza. Ellos organizan la comparación de los dos sistemas de acuerdo con seis dimensiones: aspectos generales de los programas, organización (cómo aparecen las tres componentes), cantidad de trabajo en las tres componentes, forma de trabajo en las tres componentes, e historia, ideología y tradiciones que fundamentan los sistemas. A continuación, presento un resumen de los principales resultados de la comparación de los dos sistemas de acuerdo con estas dimensiones.

Los futuros profesores franceses realizan una licenciatura en matemáticas de tres años para después entrar a estudiar en un instituto de formación de profesores (IUFM) en el que, durante el primer año, se preparan para unos exámenes. Una vez aprobados los exámenes, los futuros profesores son asignados a una escuela en la que son responsables de una clase y continúan recibiendo formación. Al final de este proceso los futuros profesores tienen garantizada una plaza como profesores. Los futuros profesores daneses se forman, durante cuatro años, en un centro de formación de profesores (CVU). Durante cada año los futuros profesores tienen períodos de varias semanas de práctica en las escuelas. Deben aprobar exámenes anualmente. Los contenidos matemáticos de la formación se refieren exclusivamente a las matemáticas escolares. Una vez finalizada su formación, su acceso a una plaza de trabajo se regula de acuerdo con el mercado laboral.

La organización de los programas de formación con respecto a las tres componentes del conocimiento del profesor es diferente. En Francia, los futuros profesores estudian matemáticas académicas durante tres años. En los dos años siguientes, durante su formación en el IUFM, ellos relacionan e integran este conocimiento con las matemáticas escolares y estudian elementos de pedagogía general y de didáctica de la matemática. Los futuros profesores daneses siguen un

programa en el que se integra continuamente la práctica en la escuela, el estudio de las matemáticas escolares y las asignaturas sobre pedagogía y didáctica de la matemática. Mientras que en Francia una proporción importante de los formadores son doctores y hacen investigación en didáctica de la matemática, en Dinamarca los formadores no son doctores y no hacen investigación.

Los contenidos de las asignaturas relacionadas con las matemáticas, la pedagogía y la didáctica de la matemática varían de acuerdo con las instituciones en las que tiene lugar la instrucción. Ya he mencionado que los futuros profesores franceses realizan una licenciatura de tres años en matemáticas académicas, mientras que el centro de atención de la formación matemática de los futuros profesores daneses son las matemáticas de secundaria. Este vínculo con las matemáticas escolares también se expresa en la formación didáctica, que se refiere principalmente a principios e ideas relacionados con los propósitos y la práctica de la enseñanza de las matemáticas en la escuela (e.g., elementos de teorías cognitivas). En Francia, la formación en didáctica de la matemática incluye elementos del análisis epistemológico de conceptos (Artigue, 1990), de la teoría de situaciones (Brousseau, 1997) y de la teoría antropológica de la didáctica (Chevallard, 1999). En general, el programa danés está principalmente centrado en la práctica. El programa francés es más académico (con excepción del último año).

El trabajo de los futuros profesores franceses se realiza, en su gran mayoría, de manera individual y dentro del marco tradicional del contexto universitario. Solamente en el último año se promueve el trabajo colaborativo. Los exámenes son individuales e incluyen una prueba de clasificación (el “concours”). En el programa danés, se utiliza una gran variedad de esquemas de trabajo que incluyen un alto grado de interacción entre los formadores y los futuros profesores. Estos esquemas incluyen trabajo en grupo y proyectos. En Dinamarca no hay una prueba de clasificación y una parte de los exámenes se realizan en grupo.

La principal diferencia ideológica con respecto a la enseñanza de las matemáticas en los dos países tiene que ver con la concepción de las funciones y finalidades de la disciplina en la sociedad: “En Francia, al menos tradicionalmente, se considera que las matemáticas son la pieza central de la cultura científica que los estudiantes deben adquirir. En Dinamarca, se enfatizan los usos de las matemáticas en la sociedad” (Durand-Guerrier y Winsløw, 2005, p. 7).

Preguntas sobre la Diversidad

Al analizar los trabajos y recordar las discusiones en mi grupo de trabajo llego a varias conclusiones. Hay una gran variedad de contextos en los que tienen lugar la formación de profesores de matemáticas. Esta variedad de contextos implica que no hay *un* problema de formación de profesores de matemáticas, sino tantos como contextos diferentes. Por lo tanto, tampoco puede haber un “modelo” o una solución universal al problema curricular de diseñar, implantar y evaluar programas o modelos de formación de profesores. Esta situación me induce a formular una serie de preguntas:

- ◆ ¿Cuáles son las variables o dimensiones que caracterizan los contextos y los problemas que se abordan en la formación de profesores de matemáticas?
- ◆ ¿Sobre cuáles de esas variables nosotros, como formadores de profesores o como investigadores, tenemos algún control?
- ◆ ¿Quiénes controlan las otras variables?

- ◆ ¿Cómo formadores e investigadores cómo podemos influir en aquellos que controlan las otras variables?
- ◆ ¿Es posible imaginar criterios comunes que nos permitan aproximarnos al problema, dada la variedad de contextos?
- ◆ ¿Estamos realmente abordando los problemas de los profesores (o futuros profesores) de matemáticas? O, más bien, ¿estamos abordando ciertos problemas para los que conocemos la solución?
- ◆ ¿Qué especificidad tienen estos problemas con respecto a las matemáticas?
- ◆ ¿Qué tan preparados estamos para abordar estos problemas?
- ◆ ¿Podemos imaginar un núcleo conceptual con el que sea posible abordar analíticamente los problemas y proponer soluciones? O, ¿debemos utilizar un esquema de prueba y error en el que la evaluación de los programas se convierte en la cuestión crucial?

Éstas son tan sólo algunas de las preguntas que me surgieron con motivo de la revisión de los documentos sobre modelos de formación de profesores de matemáticas y de mi participación en uno de los grupos de discusión en la reunión del ICMI 15. Sin duda, éstas no son todas las preguntas relevantes y no todas las preguntas que propongo son igualmente relevantes. ¿Son éstas las preguntas que preocupan a la comunidad de investigadores en educación matemática que trabajan en formación de profesores? Mi respuesta es no: los investigadores en educación matemática y los formadores de profesores de matemáticas trabajan dentro de sus propios contextos y abordan sus propios problemas y, por lo tanto, no profundizan necesariamente en la problemática de la diversidad que he expuesto hasta ahora. ¿Cuáles son las cuestiones más relevantes en la actualidad en este campo? El análisis de los trabajos presentados para el estudio puede dar una idea al respecto.

Análisis de los Trabajos Presentados

Los 125 trabajos que se aceptaron para el estudio no son representativos del estado actual de la investigación en formación de profesores de matemáticas. El análisis del estado de la cuestión, desde la perspectiva de la investigación, debe hacerse a partir de las publicaciones en las revistas correspondientes (e.g., Adler et al., 2005a). Sin embargo, estos 125 trabajos sí son representativos de la respuesta de la comunidad de educadores matemáticos a las cuestiones específicas sobre formación de profesores que se formularon en el *Documento de Discusión* con el que se promocionó el estudio (ICMI 15, 2004).

Este documento centró el foco de atención en la formación (inicial y permanente) de profesores de matemáticas alrededor del mundo. Partía del supuesto de que el currículo de formación de profesores de matemáticas varía en los diferentes países y sugería que el estudio de esta variedad de sistemas (desde la perspectiva de la práctica y las políticas) podría contribuir a su fortalecimiento. El estudio reconocía, por lo tanto, el carácter situado del aprendizaje en la formación de profesores y se interesaba principalmente por el estudio de la variedad en el aprendizaje y las prácticas en los diferentes contextos. Se invitaba no solamente a los investigadores en educación matemática, sino que también se motivaba a los matemáticos y a los profesores y formadores para que presentaran propuestas.

El estudio se organizó en dos “ejes”. En el *Eje I*, denominado “Formación inicial de profesores y los primeros años de trabajo”, se buscaba explorar cómo, en cada país, se prepara y

contrata a los profesores de matemáticas. Para ello, el documento de discusión organizó un conjunto de cuestiones relacionadas con⁷: (a) la estructura de la preparación de profesores (e.g., ¿en qué instituciones se forman?, ¿quién los forma?); (b) contratación y retención (e.g., ¿cuáles son los incentivos para convertirse en profesor de matemáticas?, ¿cómo se compara el salario de un profesor con el de otras ocupaciones o profesiones?); (c) currículo de la formación inicial de profesores (e.g., ¿cómo se preparan los profesores para abordar la diversidad en sus clases?, ¿cómo interactúan las facultades de educación y matemáticas con respecto a la formación de profesores?); (d) los primeros años de enseñanza (e.g., ¿en qué condiciones comienzan a trabajar los profesores de matemáticas? ¿de qué manera se evalúa a los profesores que comienzan a trabajar?); (e) los problemas más urgentes del inicio de la práctica (¿cuáles son los problemas más importantes que afrontan los profesores al inicio de su práctica?); (f) historia y cambios en la formación inicial de profesores (e.g., ¿cómo ha evolucionado la formación inicial de profesores en los diferentes países?, ¿cómo la historia le ha dado forma al contexto y a la estructura actuales de esta formación?).

Las cuestiones para el estudio del *Eje I* se centran en la práctica de la formación inicial de profesores de matemáticas y buscan estudiar y analizar la variedad de contextos, problemas y soluciones de esta práctica en diferentes países. El foco del *Eje II* es el aprendizaje del profesor a lo largo de su vida profesional. La pregunta central de este segundo eje es: “¿Cómo pueden los profesores aprender de la práctica, en la práctica y para la práctica?” (ICMI 15, 2004, p. 364). Las cuestiones que se proponía abordar en este eje eran las siguientes: (a) ¿qué tipo de aprendizaje parece emerger del estudio de la práctica?; (b) ¿de qué manera se hacen disponibles ejemplos de la práctica de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas?; (c) ¿qué tipo de colaboración se practica en diferentes países?; (d) ¿qué tipo de liderazgo apoya el aprendizaje de los profesores basado en la práctica de la enseñanza de las matemáticas?; (e) ¿cuáles son las prácticas cruciales en el proceso de aprender desde la práctica?; (f) ¿qué papel juega el lenguaje en el aprendizaje desde la práctica?

El análisis de los 125 trabajos que fueron aceptados para el estudio y que fueron publicados en Internet (15th ICMI Study, 2005) no es una tarea sencilla. El documento de discusión planteó unos focos de atención y unas cuestiones que constituían el principal interés para el estudio. Como era de esperarse, cada uno de los trabajos aborda al menos una de estas cuestiones desde la perspectiva del contexto particular de su autor o del programa de formación al que hace referencia. Pero, además, cada trabajo aborda otras cuestiones relacionadas con el campo. El documento de discusión organiza y estructura la problemática de la formación de profesores de matemáticas desde una perspectiva particular. Los trabajos aceptados son una respuesta de la comunidad de formadores de profesores y de investigadores en formación de profesores de matemáticas a las cuestiones planteadas en el documento de discusión. No abordaré en este artículo cada una de las preguntas incluidas en el documento de discusión. Éste es el trabajo que realizará el comité internacional del programa a partir de los documentos y de las discusiones que tuvieron lugar durante los cinco días que duró la reunión. De este trabajo surgirá una publicación. Como era de esperarse, y dada la organización del estudio (en pequeños grupos en los que no se presentaron los trabajos, sino que se discutieron algunas de cuestiones a partir de

⁷ Para cada cuestión, y a manera de ejemplo, incluyo únicamente dos de las varias preguntas que se formulaban para ella.

esos trabajos), las discusiones sacaron a la luz gran cantidad de ideas y cuestiones. Por lo tanto, en lo que sigue, pretendo centrarme en una breve caracterización de los trabajos presentados. Ésta será, por consiguiente, una revisión superficial de la totalidad de los trabajos. En general, sólo menciono el tema o el problema tratado, pero no entro en detalles acerca de la conceptualización, la metodología y los resultados. Hacerlo implicaría producir un documento demasiado extenso. Mi propósito es, más bien, presentar el “mapa general” de los trabajos, como una guía de lectura, dado que dichos trabajos se encuentran disponibles en Internet.

Si estos documentos son representativos de lo que una proporción importante del trabajo que se realiza actualmente en la comunidad de formación de profesores de matemáticas, ¿cuáles son las cuestiones, problemas y soluciones que los caracterizan? He clasificado los trabajos sin partir de una estructura conceptual predeterminada. He utilizado principalmente palabras claves con las que tradicionalmente se clasifican las publicaciones, buscando identificar los principales problemas que estos trabajos abordan. Y he escogido de esta clasificación aquellas cuestiones que son más frecuentes en los trabajos. Por lo tanto, ésta nos es una clasificación sistemática de los trabajos, tarea que sería muy compleja. Tampoco pretende caracterizarlos completamente. Su propósito es describir, desde un cierta perspectiva, lo que la comunidad de formadores e investigadores presentaron al estudio ICMI, motivados por el documento de discusión. He identificado los siguientes temas:

- ◆ modelos de formación de profesores de matemáticas,
- ◆ aprendizaje del profesor,
- ◆ formación de formadores,
- ◆ práctica y
- ◆ conocimiento del profesor.

Modelos de Formación de Profesores de Matemáticas

Presenté un análisis de los sistemas de formación de profesores de matemáticas en el mundo en el apartado anterior. Allí hice patente la gran variedad de contextos, problemas y soluciones que existen en el campo. No obstante, mientras que en los reportes sobre estos sistemas se presentaban los aspectos más generales de los mismos, en algunos de los trabajos se encuentran más detalles sobre el currículo de estos programas. Con respecto a los contenidos, se aprecia una preocupación permanente por la relación y la integración entre el conocimiento matemático, el conocimiento pedagógico y el conocimiento didáctico. Trataré este aspecto en el apartado sobre el conocimiento del profesor. Aquí centraré mi atención en algunos aspectos metodológicos que me parecieron interesantes. En particular, mencionaré aquellos trabajos que utilizan registros de la práctica como medio para reflexionar sobre y aprender de ella.

Se encuentran diversos esquemas para referirse a la práctica. Por ejemplo, en varios trabajos se menciona el análisis de videos. Es el caso del trabajo de Gellert y Krummheuer (2005) que utiliza el análisis de videos para motivar la colaboración entre formadores y profesores. Hospesova, Ticha y Hospesova (2005) también muestran la bondad del análisis de los videos en la colaboración, en este caso, entre los profesores. Este tipo de colaboración da lugar a la reflexión como elemento para el aprendizaje a partir de la práctica (Boerst, 2005). El trabajo de Mumme y Carroll (2005) utiliza este esquema para desarrollar oportunidades de aprendizaje y el desarrollo del liderazgo entre profesores que puedan convertirse en formadores y Visnovska (2005) presenta una reflexión sobre el uso de videos en la formación de profesores. Finalmente,

Seago y Mumme (2005) estudian los retos y posibilidades del uso de videos en el diseño de programas de formación de profesores.

Otro esquema con el que los programas de formación se refieren a la práctica es el uso de relatos⁸. Chapman (2005) sugiere que la escritura de relatos sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y las reflexiones que los futuros profesores hacen sobre estos relatos pueden contribuir a la formación de esos futuros profesores, mientras que Chiocca (2005) utiliza los relatos en un aspecto específico: la reflexión del profesor sobre la brecha entre lo que el profesor esperaba que sus estudiantes lograran y lo que realmente lograron. Una buena parte de las referencias a la práctica en la formación se refiere a la actuación de los estudiantes, cuestión que analizo a continuación.

Palis (2005) presenta un esquema de formación basado en el análisis de trabajos escritos por escolares con el propósito desarrollar los conocimientos de contenido y pedagógico de contenido del profesor. Francisco, Maher, Powell, Weber y Davis (2005) utilizan el análisis de las actuaciones de los escolares como base de un trabajo colaborativo entre profesores, formadores e investigadores para la formación de profesores. Finalmente, Wood (2005) muestra cómo el análisis de las actuaciones de los escolares influyó en los esquemas de enseñanza utilizados por los profesores, generando una visión más compleja de la práctica.

El uso de Internet en la formación de profesores se está haciendo cada vez más común. Se presentaron varios trabajos relacionados con este medio y con la conformación de lo que se ha venido a llamar “comunidades virtuales”. Por ejemplo, Bairral (2005) y Bairral y Zanette (2005) abordan la pregunta: “¿cómo interactúan y aprenden los profesores en una comunidad de práctica virtual?” (p. 1). Borba (2005) estudia el papel de Internet en los cursos a distancia. Godino, Roa, Ruiz y Pareja (2005) presentan un programa de formación de maestros utilizando ordenadores e Internet y Skott (2005) explora el papel de Internet en el mantenimiento de comunidades de práctica que se conformaron inicialmente en un programa de formación presencial.

Finalmente, hay que mencionar el “Lesson Study”⁹. Cinco trabajos mencionan este esquema. En particular, Robinson (2005) presenta una adaptación de este esquema dentro del contexto israelí. Por otro lado, Silver, Castro, Ghousseini y Stylianides (2005) muestran que este esquema puede ser complementario a otras aproximaciones, como el análisis de casos.

Aprendizaje del Profesor

El aprendizaje del profesor fue, como era de esperarse, una de las cuestiones más tratadas en los trabajos. En particular, en el apartado anterior, al identificar algunos esquemas metodológicos de los programas de formación, he mencionado varios trabajos que se preocupan por el aprendizaje “desde la práctica”. Estos trabajos tienen que ver con la colaboración entre profesores, entre profesores, formadores e investigadores, y con el papel de la reflexión en el aprendizaje de los profesores (e.g., Askew, Latham y Burns, 2005; Boerst, 2005; Siemon, 2005). En otros trabajos, la atención se centra en el papel para la investigación y el diseño curricular de visiones socio-culturales del aprendizaje, en particular las nociones de comunidades de práctica, comunidades de indagación y comunidades virtuales. Por ejemplo, la noción de comunidad de práctica forma parte de la aproximación conceptual de las investigaciones presentadas en los trabajos de

⁸ He traducido de esta manera la idea que inglés se denomina “story-telling”.

⁹ Este esquema de desarrollo profesoral se viene utilizando desde hace tiempo en el Japón. Grupos de profesores colaboran sistemáticamente en el diseño, puesta en práctica, evaluación y revisión de diseños de unidades didácticas.

Georget (2005), Gómez y Rico (2005), y Shamatha (2005). Con el mismo sentido que comunidades de práctica, pero como base para el diseño de programas de formación, varios trabajos utilizan el término “comunidades de aprendizaje” (Francisco et al., 2005; García y Sánchez, 2005; Gellert y Krummheuer, 2005; Grevholm y Bergsten, 2005; Sztajn, 2005). Otros utilizan un término más específico, “comunidades de indagación”, para enfatizar una cierta actividad de exploración por parte del profesor durante su formación (Graves, Suurtamm y Benton, 2005; Suurtamm, Graves y Koch, 2005). Finalmente, cuando la formación se hace a distancia o cuando se utiliza Internet como medio de interacción, algunos autores utilizan la expresión “comunidades virtuales” (Bairral y Giménez, 2005; Bairral y Zanette, 2005; Borba, 2005; Godino et al., 2005; Skott, 2005).

Relacionado con el aprendizaje, pero con menos importancia en cuanto al número de trabajos que lo mencionan, aparece la problemática de las creencias del profesor de matemáticas. Es el caso de los trabajos de Arvold (2005) y Morselli (2005) que exploran la brecha entre el diseño de los programas de formación y las expectativas y creencias de los futuros profesores. Por su parte, los trabajos de Liljedahl (2005) y Gadanidis (2005) presentan programas de formación que pretenden influir en las creencias de los futuros profesores.

Formadores

La reflexión sobre las prácticas de los formadores de profesores ha venido tomando importancia dentro de la comunidad. Hay varios trabajos que centran el foco de atención en los procesos de colaboración entre profesores y formadores (Askew et al., 2005; da Ponte y Serrazina, 2005; Francisco et al., 2005; Gellert y Krummheuer, 2005; Silver et al., 2005). Adicionalmente, la reflexión y la investigación sobre la formación y la práctica de los formadores aparece en varios de los trabajos presentados (Dawson, 2005; Firer, 2005; Mumme y Carroll, 2005; Pope y Jones, 2005; Sztajn, 2005). Finalmente, Millman (2005) y Firer (2005) exploran la problemática de la colaboración entre matemáticos y educadores como formadores de profesores de matemáticas.

Teoría y Práctica

El *Eje II* centró su atención en el análisis de la práctica de los profesores y, en particular, en el papel de la práctica en el aprendizaje del profesor. Ya he mencionado varios trabajos que abordan esta problemática. Aquí quiero resaltar aquellos trabajos que exploran específicamente algunos aspectos particulares de la práctica del profesor o que abordan explícitamente la relación entre la teoría y la práctica. Jaworski (2005) muestra cómo el estudio de la práctica (desde la perspectiva de la investigación) puede y debe contribuir a la mejora y el desarrollo de esa práctica. Por su parte, Siemon (2005) analiza la práctica para caracterizar a los profesores efectivos. El análisis de la relación entre la teoría y la práctica se encuentra explícito en varios trabajos. Tatto, Paine y Schwille (2005), basándose en la comparación de programas de formación en varios países, buscan explorar la teoría y la práctica, en su relación con el carácter situado del conocimiento del profesor de matemáticas. La relación entre la teoría y la práctica también se explora en los trabajos de Rosu y Arvold (2005), que estudian una técnica que denominan “questioning” y en el trabajo de Even (2005) que explora la integración del conocimiento dentro de la práctica.

Conocimiento del profesor

Como el aprendizaje, el conocimiento del profesor se menciona en varios trabajos y fue una de las cuestiones que se discutió sistemáticamente durante la reunión. La mayoría de estos trabajos

abordan la problemática de la integración del conocimiento matemático y el conocimiento didáctico. La noción de conocimiento pedagógico de contenido es utilizada como centro de la discusión en los trabajos de Batanero (2005), Godino (2005) y Rowland (2005). Por otro lado, Bergsten, Grevholm y Agder (2005) y Tirosh y Tsamir (2005) estudian la brecha entre el conocimiento matemático y el conocimiento didáctico en los programas de formación suecos e israelíes, respectivamente.

La influencia de las ideas de Shulman y su noción de conocimiento pedagógico de contenido (Shulman, 1986, 1987) es patente. Este autor es citado en 18 de los trabajos. Sin embargo, en contraposición con el *leitmotif* del conocimiento pedagógico de contenido, otra expresión hizo su aparición de manera reiterada durante la reunión. Se trata de la idea de “matemáticas para la enseñanza” propuesta por Deborah Ball y el grupo de investigación que ella lidera en la Universidad de Michigan. El trabajo de Ball (2005b) aborda directamente esta cuestión, mientras que Davis, Simmt y Sumara (2005) presentan un trabajo en el que utilizan las ideas de Ball y sus colaboradores para explorar el tipo de conocimiento matemático que se pone en juego en la enseñanza. Estos grupos están desarrollando proyectos de investigación de gran escala en los que buscan caracterizar el conocimiento del profesor de matemáticas eficiente y su relación con el aprendizaje de los estudiantes (Hill, Rowan y Ball, 2005). Ellos buscan extender estas ideas por fuera del contexto estadounidense (ver, por ejemplo, Adler, Davis, Kazima, Parker y Webb, 2005b). Considero que ésta fue una de las ideas “fuertes” en la reunión y, dada la productividad del grupo que la lidera, será una de las ideas importantes en el campo de la formación de profesores de matemáticas en el futuro próximo.

Aspectos Comunes dentro de la Diversidad

Los análisis que he presentado hasta ahora muestran que cada programa de formación de profesores de matemáticas tiene lugar en unos contextos concretos que condicionan buena parte de sus características. Por lo tanto, nos encontramos con una gran diversidad de modelos y aproximaciones a este problema. ¿Es posible identificar cuestiones comunes dentro de esta diversidad? Si asumimos un punto de vista funcional, y suponemos que el profesor, teniendo en cuenta las condiciones que imponen los contextos en los que tiene lugar la instrucción, debe realizar unas actividades para planificar, llevar a la práctica y evaluar esa instrucción, entonces cabe preguntarnos qué conocimientos son necesarios para realizar eficaz y eficientemente esas actividades. Por lo tanto, podemos considerar la reflexión sobre el conocimiento del profesor¹⁰ como el núcleo común de, y la base para, fundamentar los programas de formación. Ésta parece ser la aproximación que Ball y sus colaboradores han asumido con su propuesta sobre las “matemáticas para la enseñanza”. Pero, ¿de qué se trata esta idea de matemáticas para la enseñanza y cómo se relaciona con nociones como el conocimiento pedagógico de contenido y el conocimiento didáctico del profesor de matemáticas? En lo que resta de este artículo, describo y critico la propuesta de Ball y sus colaboradores y sugiero que es posible abordar la problemática del conocimiento didáctico del profesor de matemáticas desde una perspectiva analítica, que da luces para la fundamentación de los programas de formación inicial de profesores de matemáticas.

¹⁰ Entendido en el sentido amplio de conocimientos, habilidades y actitudes necesarios para realizar la actividad docente.

MATEMÁTICAS PARA LA ENSEÑANZA

Deborah Ball y sus colaboradores se han preocupado por el conocimiento matemático del profesor de matemáticas desde hace quince años. Durante mucho tiempo, esta preocupación se centró en el papel, para la enseñanza de las matemáticas, de la comprensión de los profesores del contenido temático (Ball, 1991). Su tesis afirmaba que la enseñanza era el resultado de la combinación de este conocimiento de las matemáticas con las visiones del profesor sobre la enseñanza, el aprendizaje y el contexto (p. 1) y que la formación matemática de la mayoría de los profesores de matemáticas era deficiente (Ball, 1988, p. 1; Ball, 1990, p. 450). Más tarde, estos investigadores reconocieron la importancia de conjugar el conocimiento matemático y el conocimiento pedagógico del profesor. Se basaron en los trabajos de Shulman (1986, 1987) para introducir la idea de una comprensión matemática pedagógicamente útil para el profesor (Ball y Bass, 2000, p. 88). La pregunta, en todo caso, seguía siendo: “¿Cuál es el conocimiento matemático que se necesita para enseñar?” (p. 89). La idea de las *matemáticas para la enseñanza* aparece recientemente (Ball, Lubienski y Mewborn, 2001). Las principales características de esta idea son las siguientes:

- ♦ fundamenta una nueva teoría sobre el conocimiento del profesor de matemáticas (Ball, Bass, Delaney, Hill, Lewis, Phelps *et al.*, 2005a);
- ♦ surge de la exploración sistemática, en la práctica, de las actividades que los profesores realizan y las responsabilidades que asumen al enseñar matemáticas dentro y fuera del aula (Ball y Bass, 2003, pp. 5-6); y
- ♦ ha permitido desarrollar, probar y refinar medidas del conocimiento matemático para la enseñanza con el propósito de mejorar la teoría (Hill y Ball, 2004).

A partir de estos fundamentos, Ball y sus colaboradores estructuran el conocimiento del profesor y comparan su propuesta con la noción de conocimiento pedagógico de contenido de Shulman. Sugieren cuatro categorías para el conocimiento del profesor (Ball *et al.*, 2005a, pp. 13-19):

Conocimiento común del contenido, como el conocimiento y la habilidad matemática que se espera que tenga cualquier adulto educado. Esta categoría involucra las siguientes capacidades del profesor de matemáticas: reconocer respuestas erradas, identificar definiciones inexactas en los libros de texto, utilizar correctamente la notación y realizar las tareas que le asignan a sus alumnos.

Conocimiento especializado del contenido, como el conocimiento y la habilidad matemática que el profesor requiere en su trabajo y qué va más allá de aquel de un adulto educado. Esta categoría involucra las siguientes capacidades del profesor de matemáticas: analizar los errores de los estudiantes y evaluar ideas alternativas, presentar explicaciones matemáticas y usar representaciones matemáticas, actuar explícitamente con respecto al lenguaje y las prácticas matemáticas.

Conocimiento del contenido y de los estudiantes, como el conocimiento con el que se espera que el profesor sea capaz de anticipar los errores y las concepciones erradas más comunes, interpretar el pensamiento incompleto de los estudiantes y predecir las actuaciones de los estudiantes a tareas matemáticas específicas.

Conocimiento del contenido y de la enseñanza, como el conocimiento con el que se espera que el profesor sea capaz de diseñar secuencias de instrucción, reconocer las ventajas y desventajas de diferentes representaciones y enfatizar cuestiones matemáticas relevantes al responder a los estudiantes.

Un ejemplo de conocimiento especializado de contenido tiene que ver con la capacidad del profesor para responder a la siguiente pregunta (p. 15):

¿Cuál de estos estudiantes está utilizando un método que se puede usar para multiplicar cualquier par de números enteros?

Estudiante A	Estudiante B	Estudiante C
$\begin{array}{r} 35 \\ \times 25 \\ \hline 175 \\ + 700 \\ \hline 875 \end{array}$	$\begin{array}{r} 35 \\ \times 25 \\ \hline 175 \\ + 700 \\ \hline 875 \end{array}$	$\begin{array}{r} 35 \\ \times 25 \\ \hline 25 \\ 150 \\ \hline 100 \\ + 600 \\ \hline 875 \end{array}$

Tabla 1. Ejemplo de conocimiento especializado de contenido (Ball et al., 2005a, p. 15)

Un ejemplo del conocimiento del contenido y de los estudiantes se refiere a la capacidad de reconocer los errores y abordar los problemas que éstos generan en los dos casos siguientes (p. 7):

$$\begin{array}{r} (a) \\ 3.5 \\ \times 2.5 \\ \hline 255 \\ 80 \\ \hline 10.55 \end{array} \quad \begin{array}{r} (b) \\ 3.5 \\ \times 2.5 \\ \hline 62.5 \end{array}$$

Tabla 2. Ejemplos de conocimiento del contenido y de los estudiantes (Ball et al., 2005a, p. 7)

Ball y sus colaboradores no se refieren con frecuencia las ideas de Shulman en sus trabajos anteriores (con excepción de algunos trabajos de comienzos de la década de los noventa). No obstante, en sus trabajos recientes hacen una referencia explícita a la noción de conocimiento pedagógico de contenido y ubican su teoría en el contexto de la teoría de Shulman (ver Figura 1).

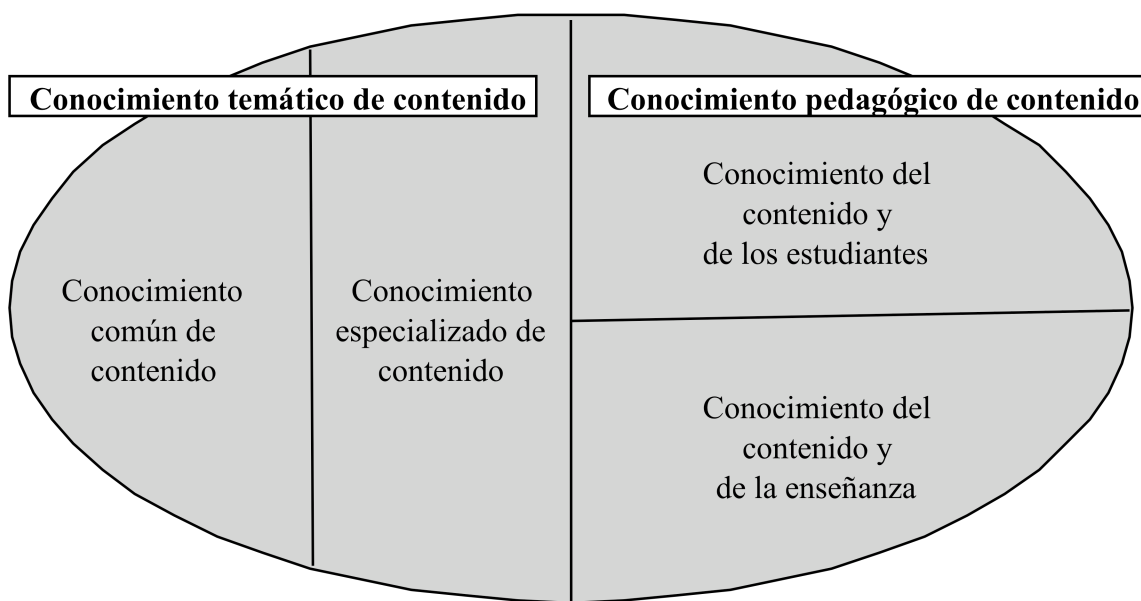


Figura 1. Matemáticas para la enseñanza y propuestas de Shulman (Ball et al., 2005a, p. 20)

La relación con las propuestas de Shulman se establece incluyendo los dos primeros tipos de conocimiento en el conocimiento del contenido temático y los dos últimos en el conocimiento pedagógico de contenido (ver Figura 1). Ellos consideran que estas nuevas categorías son necesarias si, a partir de la investigación, queremos (p. 21):

- ♦ explorar si hay algunos aspectos del conocimiento matemático de los profesores que pueden predecir mejor el rendimiento de los estudiantes;
- ♦ diseñar con mayor precisión los programas de formación de profesores; y
- ♦ explorar cómo diferentes aproximaciones a esta formación configuran aspectos particulares del conocimiento matemático del profesor.

Crítica a la Teoría de Matemáticas para la Enseñanza

Al revisar las publicaciones y los documentos de este grupo de investigación, no se encuentran descripciones suficientemente detalladas de las categorías que conforman la teoría de las matemáticas para la enseñanza. Encontramos algunos ejemplos de las preguntas con las que ellos han diseñado pruebas para medir el conocimiento del profesor (LMT, 2005). No obstante, el grupo no ha publicado hasta ahora una descripción más detallada de los aspectos conceptuales que fundamentan las categorías y los procedimientos para formular las preguntas. Es posible que esto se deba a que, como ellos mismos arguyen, su teoría surge del análisis de la práctica. Pero, como Ball y sus colaboradores parecen sugerir, ¿podemos construir una teoría suficientemente integral sobre el conocimiento necesario para la enseñanza analizando la actuación de profesores que consideramos eficientes? O, más bien, ¿debemos también explorar y organizar las actividades que debería *idealmente* desarrollar un profesor de matemáticas para lograr los objetivos de aprendizaje que se ha impuesto? ¿Es posible, a partir de este tipo de aproximación estructurar conceptualmente los conocimientos y habilidades necesarios para realizar esas actividades?

En lo que sigue, presento, como opción complementaria a la propuesta de matemáticas para la enseñanza, la aproximación que hemos venido desarrollando en la Universidad de Granada en este campo¹¹. Para ello, y teniendo en cuenta que la propuesta de Ball y sus colaboradores no hace justicia a la influencia de las ideas de Shulman en el campo, comienzo por presentar algunas reflexiones sobre la noción de conocimiento pedagógico de contenido. Estas reflexiones dan lugar a la necesidad de analizar la noción de significado de un concepto matemático en el contexto de su enseñanza y aprendizaje. A partir de esta noción, propongo el análisis didáctico como el procedimiento ideal para la planificación, puesta en práctica y evaluación de unidades didácticas. Finalmente, basándome en el análisis didáctico, introduzco las nociones de competencias y capacidades del profesor de matemáticas y las relaciono con las propuestas de Ball y sus colaboradores.

COMPETENCIAS, CAPACIDADES Y CONOCIMIENTO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

Conocimiento Pedagógico de Contenido

Con la noción de conocimiento pedagógico de contenido, Shulman buscó refutar la visión tradicional, según la cual, por ejemplo, para ser buen profesor de matemáticas bastaba con tener suficiente conocimiento de las matemáticas, y complementarlo con algunos conocimientos pedagógicos. No obstante, la noción, tal y como Shulman la presentó y ha sido puesta en juego en múltiples investigaciones, es muy general y no permite determinar qué tipos de conocimientos específicos se encuentran involucrados, ni la manera como se supone que estos conocimientos se deberían implantar en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (Bullough, 2001 p.657). La mayoría de los trabajos que mencionan la noción la siguen utilizando con el significado general propuesto por Shulman, como el conocimiento necesario para transformar un contenido para la enseñanza (Kinach, 2002, p. 53). La idea de que el conocimiento pedagógico de contenido es precisamente aquel conocimiento del profesor que le permite actuar eficientemente en el aula es evidentemente muy atractiva y, por esa razón, “mientras que ha sido citado muy frecuentemente, e igualmente usado, han sido muy contadas las ocasiones en las que el término, o el lente que proporciona para la empresa educativa, ha sido cuestionado desde una perspectiva crítica” (Segall, 2004, p. 499). Algunas de estas posiciones críticas afirman que esta noción

- ◆ representa una visión de un conocimiento fijo y externo que ignora los contextos en los que se pone en juego (Carlsen, 2001);
- ◆ sugiere una separación inexistente entre contenido y pedagogía (Segall, 2004);
- ◆ adolece de un grado reducido de precisión y poder heurísticos (Gess-Newsome, 2001); y
- ◆ se fundamenta en una visión restringida del aprendizaje de los escolares.

La preocupación de Shulman se centraba en la brecha entre el conocimiento académico y disciplinar que puede tener el profesor sobre un tema específico y la forma que debe asumir ese conocimiento para ser transmitido en el aula. Se refería, por lo tanto, al juego entre los diferentes

¹¹ Me refiero al área de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria del Grupo *Pensamiento Numérico y Algebraico*, los dos coordinados por Luis Rico.

significados de un concepto para efectos de su enseñanza. Abordaré esta cuestión en el siguiente apartado. Por otro lado, Geddis y Wood (1997) abordan con detalle la problemática de la transformación del conocimiento y se preguntan sobre los resultados de este proceso: “los productos finales de las transformaciones pedagógicas son las *representaciones* del contenido y las *estrategias* de instrucción que se ponen en juego en los encuentros de instrucción específicos” (p. 612, en cursiva en el original). Estos autores asumen una posición funcional, similar a la de Simon (1997), e identifican una serie de conocimientos que se ponen en juego en las deliberaciones del profesor de las cuales surge la transformación del contenido. Estos conocimientos incluyen representaciones del contenido, preconcepciones del aprendiz, estrategias de instrucción y materiales curriculares.

Por lo tanto, si asumimos una posición constructivista del aprendizaje, entonces el propósito no puede ser el de analizar los significados de los conceptos matemáticos para producir un discurso que permita transmitir un conocimiento, sino diseñar y gestionar unas actividades con las que los escolares puedan negociar y construir esos significados y el profesor pueda lograr sus objetivos de aprendizaje. Entonces es necesario extender la idea de una transformación del conocimiento disciplinar y académico del profesor. Como ya lo sugirieron Geddis y Wood (1997), *el producto de la transformación no es, en sí mismo, un conocimiento, sino unas actividades*. En otras palabras, cuando queremos hablar de un “profesor eficiente” (como lo hacen Cooney, 1994 y otros) o de “formas pedagógicamente potentes” (como lo hace Shulman, 1987), no podemos pensar, como lo sugiere Carlsen (2001), en un conocimiento preestablecido, estático y neutro. Estamos más bien hablando de una integración de conocimientos, habilidades y actitudes para la *acción*. Por lo tanto, una extensión natural de la noción de conocimiento pedagógico de contenido consiste en aproximarse a la problemática del conocimiento del profesor de matemáticas por dos caminos:

- ◆ el análisis del sistema de significados de los conceptos en las matemáticas escolares y
- ◆ la estructuración conceptual de las actividades que un profesor debe realizar para lograr los objetivos de aprendizaje que se ha propuesto.

Abordo estas cuestiones a continuación.

Significado en la Educación Matemática

La extensión y profundidad de los significados que construyen los escolares en el aula (y, por consiguiente, la calidad de su aprendizaje) se realiza atendiendo los distintos modos de expresión y de uso con que se manejen los conceptos, a la capacidad para conectar diversas estructuras y utilizar diferentes procedimientos, a la diversidad de los problemas que pueden interpretarse, abordarse y resolverse, en definitiva, considerando la riqueza de conexiones —de significados— que se establecen para una determinada noción o conjunto de nociones matemáticas. En otras palabras, parte relevante del aprendizaje matemático de los escolares se lleva a cabo en el aula, cuando ellos negocian y construyen significados con motivo de las actividades propuestas por el profesor (Biehler, 2004, pp. 61-62; Bromme y Steinbring, 1994, p. 218). ¿Cuáles son los significados de un concepto matemático que pueden ser objeto de la interacción en el aula? ¿Cuáles son los significados que se considera relevante desarrollar? En este apartado, abordo estas preguntas y asumo una posición con respecto a ellas. Mi propósito es mostrar la utilidad de abordar la noción de significado en las matemáticas escolares desde una perspectiva amplia que

vaya más allá del significado simbólico con el que tradicionalmente se identifican las matemáticas académicas o disciplinares. Desde esta perspectiva, postulo que, en el ámbito escolar, un concepto matemático puede ser estudiado desde una variedad de significados.

Baso mi aproximación a la noción de significado de un concepto matemático en las ideas de Frege (Frege, 1998a)¹². Frege establece un primer triángulo semántico *Signo—Sentido—Referencia*, según el cual un signo expresa un sentido y designa una referencia (Ver Figura 2).

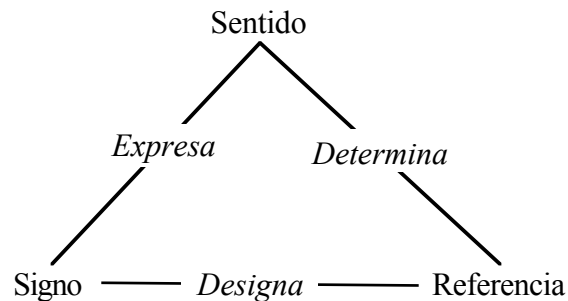


Figura 2. Triángulo semántico (término)¹³

Habiendo extendido la distinción semántica entre sentido y referencia a los enunciados o proposiciones, Frege aborda el significado de los términos conceptuales estableciendo un nuevo triángulo semántico en el que el signo (término conceptual) designa al concepto como su referencia y expresa su sentido, como modo en que vienen dados los objetos que caen bajo el concepto (ver Figura 3).

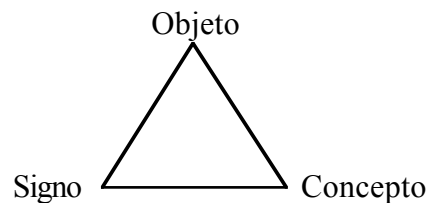


Figura 3. Triángulo semántico (concepto)

Al considerar los conceptos matemáticos, Frege distingue el signo “7”, los sentidos “2 + 5” y “3 + 4” y la referencia o “concepto de número siete” (Frege, 1998b, § 3). Para entender la idea de concepto de un número adopta la visión: “Uno es cardinal $\{\emptyset\}$ ”, “Uno” es el término; su referencia es el *concepto de uno*. Pero hay distintos sentidos para este término:

- ◆ S1: menor número natural
- ◆ S2: divisor de cualquier número
- ◆ S3: mitad de dos, etc.

¹² Debo a Luis Rico la aclaración de que, para efectos del análisis de contenido que presento más adelante, no es necesaria una aproximación social a la noción de significado. Basta con una extensión de las ideas originales de Frege. Las ideas, y una parte de la redacción, que presento en este apartado son, de hecho, producto de sus comentarios a una primera aproximación que hice a esta problemática.

¹³ Frege no dio ningún nombre para la relación entre sentido y referencia. La denomino “determina” siguiendo a Oldager (2004, p. 21).

Estos distintos sentidos son modos de referirse al “concepto de uno”. Frege establece que el significado de un término conceptual, para una proposición y un uso determinados, viene dado por la conexión entre el término, su referencia o concepto y el sentido en que se usa.

El triángulo semántico propuesto por Frege identifica los elementos constitutivos del significado de un término conceptual desde una perspectiva estrictamente lógica y formal. La aproximación al significado de un concepto dentro de las matemáticas escolares que presento aquí interpreta las ideas de Frege al enfatizar el hecho de que los sentidos en los que se usa un término conceptual matemático implican, por un lado, los modos en los que se establecen relaciones con otros términos conceptuales matemáticos, y, por el otro, las diferentes formas en las que el término conceptual y estas relaciones se pueden representar. Adicionalmente, asumiendo un punto de vista funcional, postulo que el sentido en el que se usa un término conceptual matemático también incluye los fenómenos que sustentan el concepto. En la matemática escolar, los fenómenos se presentan mediante un contexto o situación en que el concepto toma sentido, o también mediante un problema que se aborda y da sentido al concepto¹⁴. En otras palabras, esta posición aborda el significado de un concepto matemático atendiendo a tres dimensiones que denomino sistemas de representación, estructura conceptual y fenomenología (Ver Figura 4):

- ♦ En los *sistemas de representación* incluyo las diferentes maneras en las que se puede representar el concepto y sus relaciones con otros conceptos.
- ♦ En la *estructura conceptual* incluyo las relaciones del concepto con otros conceptos, atendiendo tanto a la estructura matemática de la que el concepto forma parte, como a la estructura matemática que dicho concepto configura.
- ♦ En la *fenomenología* incluyo aquellos fenómenos (contextos, situaciones o problemas) que pueden dar sentido al concepto.

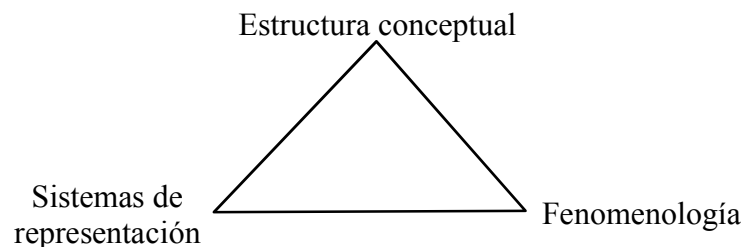


Figura 4. Las tres dimensiones del significado de un concepto en la matemática escolar

Las tres dimensiones del significado de un concepto en la matemática escolar que he propuesto ponen en evidencia una de las cuestiones centrales de la problemática de la planificación de clase: *la multiplicidad de significados de un concepto en las matemáticas escolares*. Un concepto matemático tiene una multiplicidad de significados porque:

- ♦ su estructura conceptual es compleja, dando lugar a una pluralidad de relaciones con otros conceptos matemáticos;
- ♦ hay una diversidad de modos en los que el concepto y sus relaciones con otros conceptos se pueden representar; y

¹⁴ Esta posición atiende a algunas de las ideas de Steinbring (1997, pp. 51-52) —“triángulo epistemológico”— y de Biehler (2004, p. 69) —dominios de aplicación—, entre otros.

- ♦ hay una variedad de fenómenos que le dan sentido.

Esta multiplicidad de significados de un concepto matemático implica que, para efectos de planificar una hora de clase o una unidad didáctica, el profesor debe:

1. recabar la información necesaria que le permita identificar dichos significados;
2. organizar esta información de tal forma que sea útil para la planificación; y
3. seleccionar, a partir de esta información, aquellos significados que él considera relevantes para la instrucción.

Denomino *análisis de contenido* al procedimiento en virtud del cual el profesor identifica y organiza la multiplicidad de significados de un concepto y selecciona los significados de referencia para la instrucción. El análisis de contenido es uno de los cuatro análisis que conforman el análisis didáctico que describo a continuación.

Análisis Didáctico

En lo que sigue, describo un procedimiento, que denomino análisis didáctico, y que representa una visión ideal de cómo el profesor debería diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje (Gómez, 2002a). Mi preocupación se centra en el procedimiento en virtud del cual el profesor planifica, lleva a la práctica y evalúa una unidad didáctica, una hora de clase o una porción de una clase. Por lo tanto, el contenido matemático que es objeto de la instrucción es una estructura matemática específica o uno o más aspectos de una estructura matemática para la que hay unos objetivos de aprendizaje determinados. El periodo de tiempo en el que tiene lugar la instrucción es limitado y *la especificidad del contenido permite profundizar en sus múltiples significados*. La descripción de un ciclo del análisis didáctico seguirá la secuencia propuesta en la Figura 5.

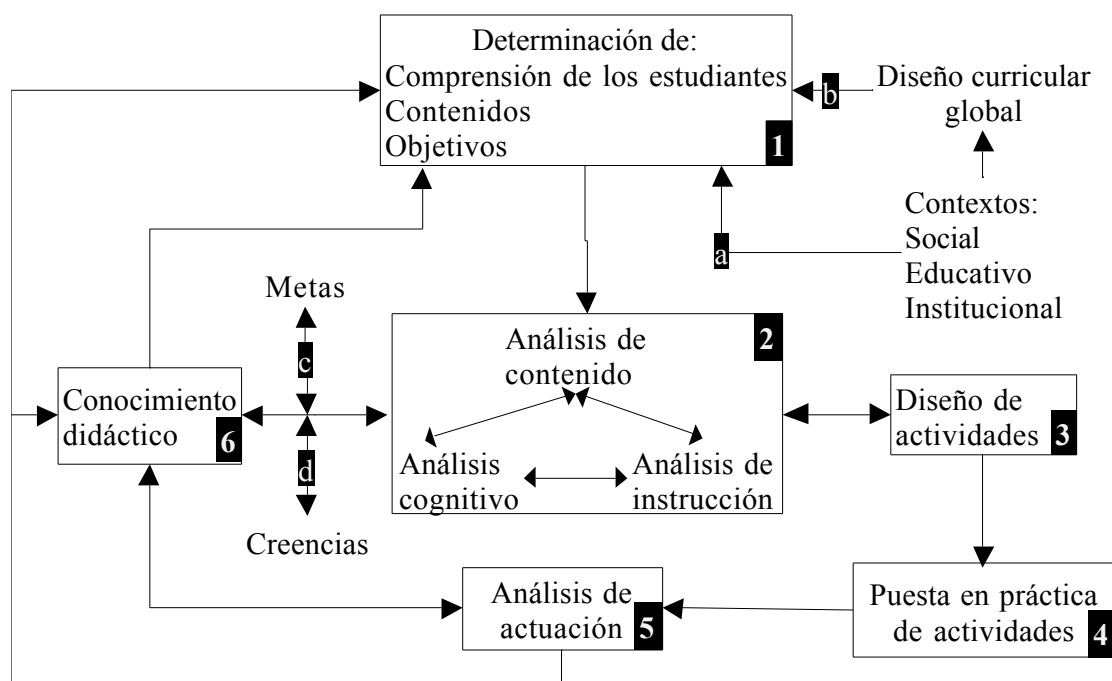


Figura 5. Ciclo de análisis didáctico

El análisis didáctico se inicia con la determinación del contenido que se va a tratar y de los objetivos que se quieren lograr, a partir de la percepción que el profesor tiene de la comprensión de los escolares con motivo de los resultados del análisis de actuación del ciclo anterior y teniendo en cuenta los contextos social, educativo e institucional en los que se enmarca la instrucción (cuadro 1 de la Figura 5). A partir de esta información, el profesor inicia la planificación con el análisis de contenido. La información que surge del análisis de contenido sustenta el análisis cognitivo. A su vez, la realización del análisis cognitivo puede dar lugar a la revisión del análisis de contenido. Esta relación simbiótica entre los análisis también se establece con el análisis de instrucción. Su formulación depende de y debe ser compatible con los resultados de los análisis de contenido y cognitivo, pero, a su vez, su realización puede generar la necesidad de corregir las versiones previas de estos análisis (cuadro 2). La selección de tareas que componen las actividades debe ser coherente con los resultados de los tres análisis y la evaluación de esas tareas a la luz de los análisis puede llevar al profesor a realizar un nuevo ciclo de análisis, antes de seleccionar definitivamente las tareas que componen las actividades de enseñanza y aprendizaje (relación entre cuadros 2 y 3). El profesor pone en práctica estas actividades (cuadro 4) y, al hacerlo, analiza las actuaciones de los escolares para obtener información que sirve como punto de inicio de un nuevo ciclo (cuadro 5). El conocimiento didáctico (cuadro 6) es el conocimiento que el profesor pone en juego durante este proceso.

Describo brevemente cada uno de los cuatro análisis que componen el análisis didáctico.

Análisis de Contenido

El análisis de contenido es el procedimiento en virtud del cual el profesor puede identificar, organizar y seleccionar los significados relevantes de un concepto o estructura matemática dentro

del contenido de las matemáticas escolares, para efectos de su enseñanza y aprendizaje. Sigo las tres dimensiones del significado de un concepto en las matemáticas escolares sugeridas anteriormente.

Sistemas de Representación

Recordemos que, de acuerdo con las ideas de Frege, los signos son elementos constitutivos centrales del significado de un concepto matemático: son los elementos que relacionan el sentido y la referencia y se requieren para expresar las relaciones internas entre los conceptos. En matemáticas, estos signos se organizan en “sistemas” que es posible caracterizar. Siguiendo una de las tradiciones de la literatura en didáctica de la matemática utilizaré la expresión “sistemas de representación” para referirme a los sistemas de signos por medio de los cuales se designa un concepto. La importancia de los sistemas de representación en el análisis de contenido radica en que:

- ◆ los sistemas de representación organizan los símbolos mediante los que se hacen presentes los conceptos matemáticos;
- ◆ los distintos sistemas de representación aportan distintos significados para cada concepto; y, por lo tanto,
- ◆ un mismo concepto admite y necesita de varios sistemas de representación complementarios.

Estructura Conceptual

La exploración de la segunda dimensión de un concepto en las matemáticas se refiere a las relaciones del concepto con otros conceptos, atendiendo tanto a la estructura matemática de la que el concepto forma parte, como a la estructura matemática que dicho concepto configura. En la estructura conceptual se tienen en cuenta estas relaciones, resaltando las relaciones entre los signos (representaciones) de los conceptos y objetos involucrados. En el contexto de la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria, utilizamos los mapas conceptuales como herramienta para que el futuro profesor recoja, organice, represente y comparta la información correspondiente a los significados de un concepto. Para construir la estructura conceptual de un tema, el profesor debe atender a tres ejes que se complementan y se desarrollan paralelamente: los conceptos, los sistemas de representación y las relaciones. En la medida en que el profesor identifica conceptos y objetos que conforman la estructura matemática, él debe determinar sus diversas representaciones (signos). Y, al distinguir estas representaciones, él tendrá que establecer las relaciones entre ellas.

Fenomenología

Utilizaré el término *fenomenología*, como dimensión del significado de un concepto, para referirme a los fenómenos que dan sentido a dicho concepto. El concepto adquiere sentido con respecto a los fenómenos correspondientes, cuando los fenómenos están vinculados con situaciones que el concepto permite describir o con cuestiones que el concepto permite plantear. La descripción de estas situaciones y cuestiones relacionadas con una estructura matemática implica la identificación de:

- ◆ las subestructuras correspondientes a esa estructura,
- ◆ los fenómenos organizados por cada una de ellas y
- ◆ la relación entre subestructuras y fenómenos.

Análisis Cognitivo

En el análisis cognitivo, “el profesor describe sus hipótesis acerca de cómo los estudiantes pueden progresar en la construcción de su conocimiento sobre la estructura matemática cuando se enfrenten a las tareas que compondrán las actividades de enseñanza y aprendizaje” (Gómez, 2002a, p. 271). El procedimiento que propongo para describir el progreso de los escolares debe fundamentarse en la identificación, descripción y relación de cinco elementos:

- ◆ las capacidades que los escolares tienen antes de la instrucción;
- ◆ las capacidades que se espera que los escolares desarrollen con motivo de la instrucción;
- ◆ las tareas que conforman la instrucción;
- ◆ las dificultades que los escolares pueden encontrar al abordar estas tareas; y
- ◆ las hipótesis sobre los caminos por los que se puede desarrollar el aprendizaje.

La noción de capacidad es un elemento que relaciona los aspectos cognitivos (un individuo desarrolla una capacidad), de contenido (es específica a un tema concreto) y de instrucción (se refiere a tipos de tareas o problemas) (Ver Figura 6).

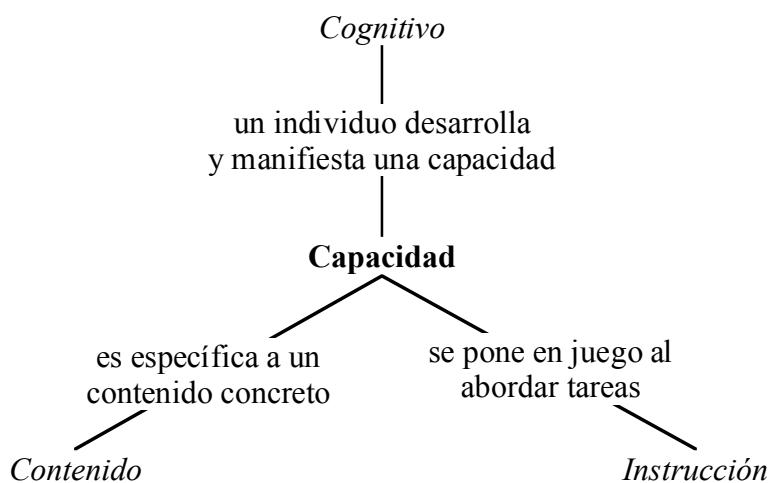


Figura 6. La noción de capacidad relaciona los tres análisis

Los primeros dos puntos del procedimiento que sugiero requieren que el futuro profesor organice información sobre: 1) lo que los escolares son capaces de hacer antes de la instrucción y 2) lo que se espera que ellos sean capaces de hacer después de la instrucción. Lupiáñez, Rico, Gómez y Marín (2005) han desarrollado un procedimiento para organizar esta información, basado en la noción de competencia. Ellos utilizan la noción de competencia propuesta por el proyecto PISA (OECD, 2003) y desarrollan un instrumento que permite establecer la medida en que unas capacidades dadas contribuyen al desarrollo de dichas competencias¹⁵. El análisis de las capacidades permite identificar el punto inicial y el punto final de una colección posible de caminos: 1) lo que los escolares son capaces de hacer antes de la instrucción; y 2) lo que se espera que ellos sean capaces de hacer después de la instrucción (Gómez y Lupiáñez, 2005). El análisis de los errores, los obstáculos y las dificultades indica las cuestiones claves que hay que tener en cuenta dentro de ese proceso. Son nodos de la red de caminos sobre los que el profesor

¹⁵ En el siguiente apartado presento la noción de competencia con mayor profundidad.

debe insistir. Qué caminos recorran los escolares dependerá de las tareas que se les proponga. La descripción de las capacidades y de los posibles caminos de aprendizaje le permiten al profesor producir conjeturas sobre esos caminos y, al hacerlo, revisar las tareas que puede proponer en su diseño (ver Figura 7).

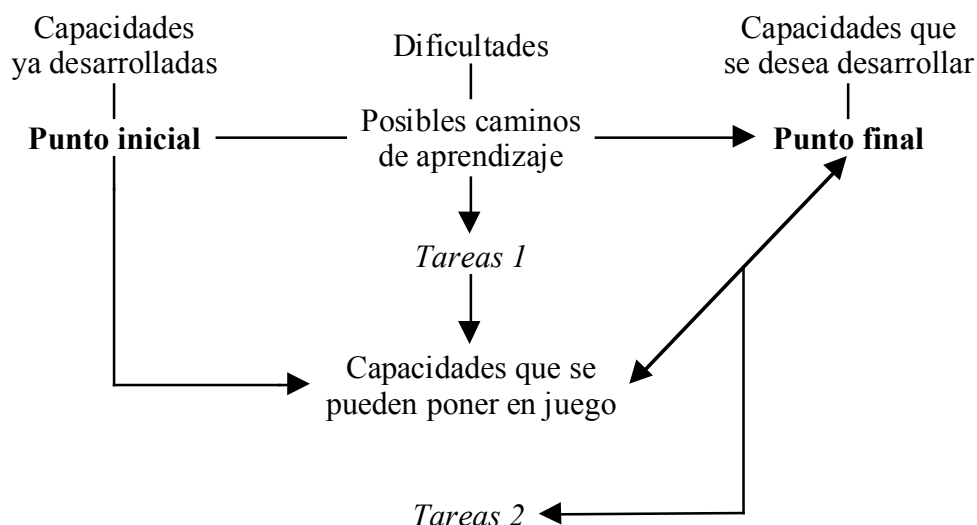


Figura 7. Ciclo de planificación local

Análisis de Instrucción

El esquema de la Figura 7 sugiere la estrecha relación entre el análisis cognitivo y el análisis de instrucción. Desde la perspectiva de la puesta en práctica de una tarea en el aula hay que tener en cuenta que:

- ◆ al asignar una tarea, el profesor tiene un propósito con respecto al aprendizaje de los escolares y este propósito puede enunciarse en términos de capacidades y competencias;
- ◆ al abordar una tarea, los escolares tienen un propósito (resolverla);
- ◆ las actividades de los escolares y del profesor se componen de acciones que pretenden lograr los propósitos correspondientes;
- ◆ al ejecutar dichas acciones, tanto escolares, como profesor, ponen en juego una colección de capacidades (que, en el caso de los escolares, contribuyen al desarrollo de las competencias);
- ◆ la planificación del profesor, debe incluir, no solamente el análisis y selección de las tareas, sino también la previsión de las posibles acciones de los escolares al abordar una tarea y de las capacidades que ellos pueden poner en juego al realizarlas.

Ilustro gráficamente estas relaciones en la Figura 8, en la que se observa la estrecha relación entre la noción de tarea y las nociones de capacidad y competencia en las que basé el análisis cognitivo. Esta relación será central en el procedimiento que propondré para el análisis y selección de tareas.

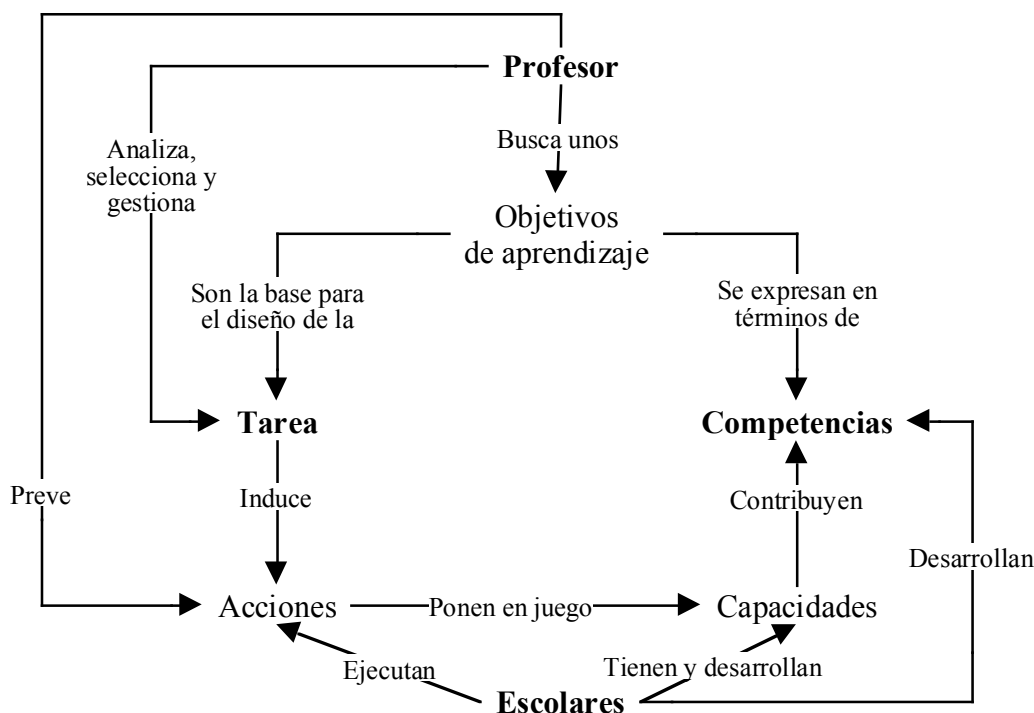


Figura 8. Tarea y competencias

El foco de mi interés se centra en *el análisis de tareas como recurso para el logro de los objetivos de aprendizaje*. En este sentido, el criterio central para clasificar una tarea es su relación con las competencias en virtud de las cuales el profesor establece los objetivos de aprendizaje y con las capacidades que contribuyen a esas competencias. El modelo de la Figura 8 sienta las bases para este propósito. El análisis de una tarea debe tener como resultado una medida del grado en que la tarea contribuye al desarrollo de las competencias que el profesor considera relevantes en ese momento y, por lo tanto, al logro de los objetivos de aprendizaje que él se ha propuesto. Para ello, el análisis de una tarea debe ser un procedimiento que permita (ver Figura 8):

- ◆ identificar las capacidades que se pueden poner en juego cuando los escolares la aborden;
- ◆ identificar las competencias a las que esas capacidades, con la tarea en cuestión, pueden contribuir;
- ◆ determinar y describir los posibles caminos de aprendizaje que los escolares pueden recorrer cuando aborden la tarea; y
- ◆ evaluar la pertinencia de la tarea a partir de esta información.

Análisis de Actuación

Recordemos que, al realizar la planificación, el profesor ha:

1. determinado unos objetivos de aprendizaje y ha establecido su relación con las competencias y capacidades correspondientes;
2. seleccionado unas tareas que conforman las actividades de enseñanza y aprendizaje que llevará a la práctica; y

3. formulado unas conjeturas sobre la actuación de los escolares con motivo de esas tareas y que se expresan en los posibles caminos de aprendizaje para dichas tareas.

Esta información constituye la base para el análisis de actuación. En una primera fase, el profesor puede *comparar sus previsiones sobre lo que iba a suceder en el aula con lo que realmente sucedió*. Para ello, él puede:

- ♦ establecer en qué medida se lograron los objetivos de aprendizaje, al identificar qué capacidades se pusieron en juego y en qué medida estas capacidades contribuyeron a las competencias que consideraba pertinentes;
- ♦ revisar si las tareas pusieron en juego aquellas capacidades para las que él preveía que los escolares pudieran manifestar dificultades, si esas dificultades se manifestaron (los escolares incurrieron en errores al poner en juego esas capacidades) y si se logró algún progreso en la superación de dichas dificultades;
- ♦ identificar aquellas capacidades que se pusieron en juego y aquéllas que no; y
- ♦ reconocer aquellas capacidades, dificultades y estrategias no previstas y que se manifestaron en la práctica.

Carácter Sistémico y Cíclico del Análisis Didáctico

Quiero resaltar tres características del análisis didáctico que surgen de la breve descripción anterior:

- ♦ *Su carácter sistémico*. La información que surge de un procedimiento o análisis es utilizada por otros procedimientos y análisis.
- ♦ *Su carácter cíclico*. El análisis didáctico es una sucesión de ciclos, uno para cada hora de clase o para cada unidad didáctica. Adicionalmente, algunos de sus procedimientos tienen también ese carácter cíclico (ver por ejemplo la relación entre el análisis cognitivo y el análisis de instrucción).
- ♦ *Identifica y caracteriza las capacidades del profesor*. En el análisis didáctico se describen los diferentes procedimientos que se espera que el profesor realice al planificar, llevar a la práctica y evaluar una unidad didáctica. Estos procedimientos permiten determinar, por lo tanto, las capacidades que el profesor debería desarrollar para realizar su actividad docente.

A continuación establezco la relación entre estas capacidades y las competencias del profesor.

Competencias y Capacidades del Profesor de Matemáticas

La noción de competencia del profesor se utiliza desde la década de los sesenta y se relaciona particularmente con el movimiento que se denominó “educación basada en competencia” (Bowden, 1997, p. 1) y su resurgimiento se puede relacionar con la preocupación por el bajo rendimiento del sistema educativo estadounidense (Bullough, 2002). La educación basada en la competencia ha generado permanentes debates en los que se caricaturiza al contrario ya sea “como alguien que no se preocupa en absoluto para la preparación para el trabajo, o como alguien que se opone a cualquier aprendizaje que no esté directamente relacionado con un rendimiento laboral preestablecido” (Bowden, 1997, p. 2). No obstante, la creación del Espacio Europeo de Educación Superior y el correspondiente informe *Tuning* (González y Wagenaar, 2003), han puesto de manifiesto la actualidad y la importancia de esta noción a nivel

universitario¹⁶. El proyecto *Tuning* se realizó en el marco del proceso Sorbona-Bolonia-Praga-Berlín, en virtud del cual se busca la creación de un área integrada de educación superior en Europa. Este propósito requiere que existan normas comunes para la compatibilidad, la comparabilidad y la competitividad. El proyecto se centra en la caracterización de competencias genéricas y específicas para los graduandos de primer y segundo ciclos. Se utiliza la siguiente noción de competencia:

*Las competencias tienden a transmitir el significado de lo que la persona es capaz de o es competente para ejecutar, el grado de preparación, suficiencia o responsabilidad para ciertas tareas ... las competencias y las destrezas se entienden como **conocer** y **comprender** (conocimiento teórico de un campo académico, la capacidad de conocer y comprender), **saber como actuar** (la aplicación práctica y operativa del conocimiento a ciertas situaciones), y **saber como ser** (los valores como parte integrante de la forma de percibir a los otros y vivir en un contexto social). Las competencias representan una combinación de atributos (con respecto al conocimiento y sus aplicaciones, aptitudes, destrezas y responsabilidades) que describen el nivel o grado de suficiencia con que una persona es capaz de desempeñarlos (González y Wagenaar, 2003, pp. 69-70, en negritas en el original).*

La idea de competencias del profesor también se ha venido promulgando por fuera del contexto europeo a través del establecimiento de estándares para la enseñanza. Éste es el caso, por ejemplo, en Estados Unidos (NBPTS, 2002; NCTM, 1991), Australia (DET, 2004), Reino Unido y Nueva Zelanda.

En el caso del profesor de matemáticas, Niss, Llinares y Rico, entre otros, han abordado esta cuestión. Niss (2003) define al “buen profesor de matemáticas” como aquel que puede inducir y promover el desarrollo de las competencias matemáticas en sus estudiantes. Esto implica que el profesor mismo debe poseer esas competencias matemáticas. Adicionalmente, Niss identifica y caracteriza unas competencias didácticas y pedagógicas específicas a las matemáticas que organiza en seis categorías: la gestión del currículo, la enseñanza, el aprendizaje, la evaluación, la colaboración y el desarrollo profesional (pp. 188-190).

Llinares (2004, p. 2) sugiere organizar la discusión sobre las competencias del profesor de matemáticas a partir de tres “sistemas de actividad”:

- ♦ organizar el contenido matemático para enseñarlo;
- ♦ analizar e interpretar las producciones matemáticas de los alumnos; y
- ♦ gestionar el contenido matemático en el aula.

En el mismo seminario en el que Llinares hace la propuesta anterior¹⁷, se establecen unas competencias generales para la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria (Rico, 2004, pp. 8-9):

¹⁶ La relevancia actual de la noción de competencia va más allá del Espacio Europeo y del nivel universitario. Por ejemplo, en Colombia, el Ministerio de Educación Nacional declaró el 2005 como el año de las competencias científicas y el 2006 como el año de las competencias matemáticas (para un ejemplo del trabajo sobre competencias en Colombia, ver, por ejemplo, MEN, 2004).

¹⁷ Seminario celebrado en Granada por la Subcomisión Española del ICMI en enero de 2004 (Recio, 2004).

1. dominio de los contenidos matemáticos de Educación Secundaria desde una perspectiva matemática superior y su conocimiento como objetos de enseñanza-aprendizaje,
2. dominio de la organización curricular y planificación de estos contenidos matemáticos para su enseñanza,
3. capacidad para el análisis, interpretación y evaluación de los conocimientos matemáticos de los alumnos a través de sus actuaciones y producciones matemáticas, y
4. capacidad de gestión del contenido matemático en el aula.

En este seminario también se establecieron competencias específicas¹⁸. Algunos ejemplos son los siguientes (Rico, 2004, p. 9):

- ◆ conectar los contenidos matemáticos de la Educación Secundaria con los fenómenos que los originan, reconociendo los aspectos formales implicados junto con su presencia en situaciones cotidianas y aquellas otras que procedan de ámbitos multidisciplinares (física, biología, economía, etc.),
- ◆ reconocer los tipos de razonamiento de los estudiantes, proponer tareas que los orienten, diagnosticar sus errores, y proponer los correspondientes procesos de intervención,
- ◆ seleccionar y secuenciar actividades para el aprendizaje escolar; analizar los diversos problemas que surgen en situaciones de aprendizaje, y
- ◆ disponer de criterios, técnicas e instrumentos específicos para la evaluación del conocimiento matemático.

Por lo tanto, en lo que corresponde a la actuación del profesor en el aula, observamos que la noción de competencia del profesor (en su dimensión general) se tiende a organizar de acuerdo con las capacidades necesarias para gestionar las cuatro dimensiones del currículo:

- ◆ el contenido,
- ◆ el aprendizaje,
- ◆ la enseñanza y
- ◆ la evaluación.

Éstas son las dimensiones que organizan los cuatro análisis que conforman el análisis didáctico. Además, la noción de competencia involucra:

- ◆ la realización de una tarea o actividad y
- ◆ la puesta en juego de unas capacidades (que requieren conocimientos, habilidades y actitudes) para realizar esa tarea.

Por consiguiente, la noción de análisis didáctico, como procedimiento ideal para la planificación, puesta en práctica y evaluación de unidades didácticas, sirve como marco conceptual para explorar las competencias del profesor de matemáticas en estos aspectos de su actividad docente. En particular, este procedimiento permite identificar, organizar y fundamentar las capacidades específicas que pueden contribuir al desarrollo de estas competencias.

¹⁸ La idea de “competencia específica” es problemática. Por un lado, resulta difícil determinar hasta que nivel de especificidad se debe llegar. Por el otro, en algunos casos la especificidad se logra al delimitar las competencias generales en contenidos concretos. En el siguiente apartado abordo esta cuestión, al utilizar la noción de capacidad para caracterizar las competencias generales del profesor de matemáticas.

Propongo un esquema complementario para abordar el tema de las competencias del profesor, aunque que ya existen varias propuestas al respecto, porque, al explorar las competencias del profesor de matemáticas desde la perspectiva del análisis didáctico,

- ◆ es posible determinar *sistemáticamente* las capacidades que contribuyen a las competencias generales;
- ◆ las capacidades se organizan en una estructura que permite establecer las relaciones entre ellas; y
- ◆ el procedimiento de identificación de las capacidades parte de un marco conceptual (el análisis didáctico) que lo fundamenta.

Análisis Didáctico y Capacidades y Competencias del Profesor de Matemáticas

Existe naturalmente una cierta similitud entre la enumeración de las competencias que acabo de presentar y las categorías con las que Ball y sus colaboradores organizan los tipos de conocimiento de las matemáticas para la enseñanza. Éstas son aproximaciones que se guían (ya sea desde la práctica o desde la teoría) por las dimensiones del currículo. El problema se centra en profundizar en esas competencias y caracterizarlas a partir de su especificidad a las matemáticas. Mientras que Ball y sus colaboradores fundamentan y especifican la noción de matemáticas para la enseñanza en el análisis de la práctica, yo busco explorar la descripción de las competencias del profesor desde una perspectiva analítica. Ball y sus colaboradores sugieren, por ejemplo, que el profesor debe ser capaz de analizar los errores de los estudiantes y usar representaciones matemáticas (conocimiento especializado de contenido). Pero, más allá de justificar esta elección de capacidades como consecuencia del análisis de la práctica, en sus publicaciones no se encuentran razonamientos que permitan respaldar dicha elección¹⁹. Utilizaré la descripción del análisis didáctico que presenté anteriormente para identificar las *capacidades* que pueden contribuir al desarrollo de algunas de las competencias del profesor de matemáticas. Enumeraré y organizaré estas capacidades de acuerdo con los cuatro análisis que conforman el análisis didáctico. Éstas son, por lo tanto, las capacidades que considero necesarias para planificar, llevar a la práctica y evaluar una unidad didáctica sobre un tema matemático concreto. Presento únicamente las capacidades básicas correspondientes a cada análisis. Como se sugiere en la breve descripción del análisis didáctico que presenté anteriormente, cada una de estas capacidades básicas se puede desarrollar en procedimientos más detallados. De hecho, el carácter sistémico y cíclico del análisis didáctico (Gómez, 2002b), hace evidente la relación entre las diferentes capacidades: unas capacidades dadas pueden requerir de otras capacidades o conocimientos.

Capacidades para el Análisis de Contenido

Para las tres dimensiones del significado de un concepto, el profesor debe ser capaz de:

- ◆ recabar la información necesaria que le permita identificar dichos significados;
- ◆ organizar esta información de tal forma que sea útil para la planificación;

¹⁹ Algo similar sucede cuando se consideran las competencias específicas propuestas por la Subcomisión Española del ICMI (Recio, 2004).

- ♦ seleccionar, a partir de esta información, aquellos significados que él considera relevantes para la instrucción, al tener en cuenta las condiciones de los contextos sociales, educativos e institucionales; y
- ♦ seleccionar los significados de referencia al tener en cuenta las condiciones del contexto del aula (que surgen de la información que se obtiene del análisis cognitivo).

Capacidades para el Análisis Cognitivo

A partir de la información que surge del análisis de contenido (la caracterización de los significados relevantes para la instrucción), el profesor debe ser capaz de establecer:

- ♦ las competencias que se quieren desarrollar,
- ♦ los focos de interés que se han de tratar,
- ♦ las capacidades que los escolares tienen antes de la instrucción,
- ♦ las capacidades que se espera que los escolares desarrollen con motivo de la instrucción (que contribuyen a las competencias previamente identificadas y que delimitan los significados de referencia),
- ♦ las tareas que conforman la instrucción (cuyo establecimiento involucra las capacidades que se enumeran en el análisis de instrucción),
- ♦ las dificultades que los escolares pueden encontrar al abordar esas tareas, y
- ♦ las hipótesis sobre los caminos por los que se puede desarrollar el aprendizaje.

Capacidades para el Análisis de Instrucción

Para efectos de analizar y seleccionar las tareas que conforman la instrucción, el profesor ha de ser capaz de analizar una tarea con el propósito de:

- ♦ identificar las capacidades que se pueden poner en juego cuando los escolares la aborden,
- ♦ identificar las competencias a las que esas capacidades, con la tarea en cuestión, pueden contribuir,
- ♦ establecer los posibles caminos de aprendizaje que los escolares pueden recorrer cuando aborden la tarea, y
- ♦ evaluar la pertinencia de la tarea a partir de esta información.

Capacidades para el Análisis de Actuación

Una vez que se ha realizado la instrucción y que el profesor ha observado y registrado lo que sucedió en su interacción con los estudiantes, él ha de ser capaz de:

- ♦ comparar las previsiones que se hicieron en la planificación con lo que sucedió cuando esa planificación se puso en práctica en el aula,
- ♦ establecer los logros y deficiencias de la planificación (actividades y tareas) en su puesta en práctica en el aula,
- ♦ caracterizar el aprendizaje de los escolares con motivo de la puesta en práctica de las actividades, y
- ♦ producir información relevante para una nueva planificación.

El carácter estructural de esta organización de las capacidades que contribuyen a las competencias del profesor de matemáticas de secundaria se hace evidente, por ejemplo, en el caso de la capacidad relacionada con la identificación de los significados relevantes del concepto en su dimensión de fenomenología. La identificación de las subestructuras que pueden organizar

los fenómenos relacionados con una estructura matemática, requiere que el profesor sea capaz de identificar los conceptos y procedimientos que conforman la estructura matemática correspondiente al tema (significados relacionados con la estructura conceptual), establecer las diferentes maneras en que el tema se puede representar (significados relacionados con los sistemas de representación) y determinar las relaciones entre la multiplicidad de signos resultante.

Por otro lado, la lista de capacidades que he propuesto se puede especificar en la medida que se profundice en los diferentes procedimientos que requiere el análisis didáctico. Por ejemplo, la identificación y la organización de las capacidades que los escolares tienen antes de la instrucción (análisis cognitivo) requiere de un procedimiento detallado en el que el profesor parte de los significados de referencia que surgen del análisis de contenido y utiliza la información proveniente del análisis de actuación.

Ejemplo de dos Capacidades

A continuación presento un ejemplo de cómo es posible desarrollar en detalle las capacidades básicas que he enumerado en el apartado anterior. Las dos primeras capacidades del análisis de contenido se refieren a la identificación y organización de los significados de un concepto matemático. Si consideramos las dimensiones de sistemas de representación y estructura conceptual de estos significados, entonces, para realizar estos procedimientos, el profesor debe ser capaz, para el concepto correspondiente, de:

1. identificar sus elementos (objetos, conceptos y estructuras matemáticas),
2. determinar las diferentes representaciones de esos elementos y
3. establecer las relaciones entre los elementos y entre sus representaciones.

Si profundizamos en el detalle de la capacidad 3, observamos que esta capacidad implica que el profesor debe ser capaz de establecer las relaciones:

- ◆ entre el concepto y los conceptos de la estructura matemática que dicho concepto configura,
- ◆ entre el concepto y los objetos que son casos particulares de dicho concepto,
- ◆ entre el concepto y los conceptos que pertenecen a la estructura matemática de la que el concepto forma parte,
- ◆ entre pares de signos que designan el mismo objeto o concepto, dentro de un mismo sistema de representación,
- ◆ entre pares de signos que designan el mismo objeto o concepto pertenecientes a sistemas de representación diferentes y
- ◆ entre pares de signos que designan dos objetos o conceptos diferentes dentro de un mismo sistema de representación.

En el ejemplo que acabo de presentar se aprecia la estructura de las capacidades que contribuyen a la competencia de planificación del profesor de matemáticas (ver Figura 9). La competencia de planificación es una de las competencias del profesor de matemáticas. He identificado unas capacidades básicas que contribuyen a esta competencia y las he estructurado de acuerdo con los análisis que conforman el análisis didáctico. En el caso del análisis de contenido, dos de las capacidades básicas se refieren a la identificación y organización de los significados del

concepto en términos de los sistemas de representación y la estructura conceptual. Esta capacidad involucra, entre otras, la capacidad de establecer diversos tipos de relaciones entre los elementos de los mapas conceptuales en los que el profesor organiza los significados del concepto en cuestión.

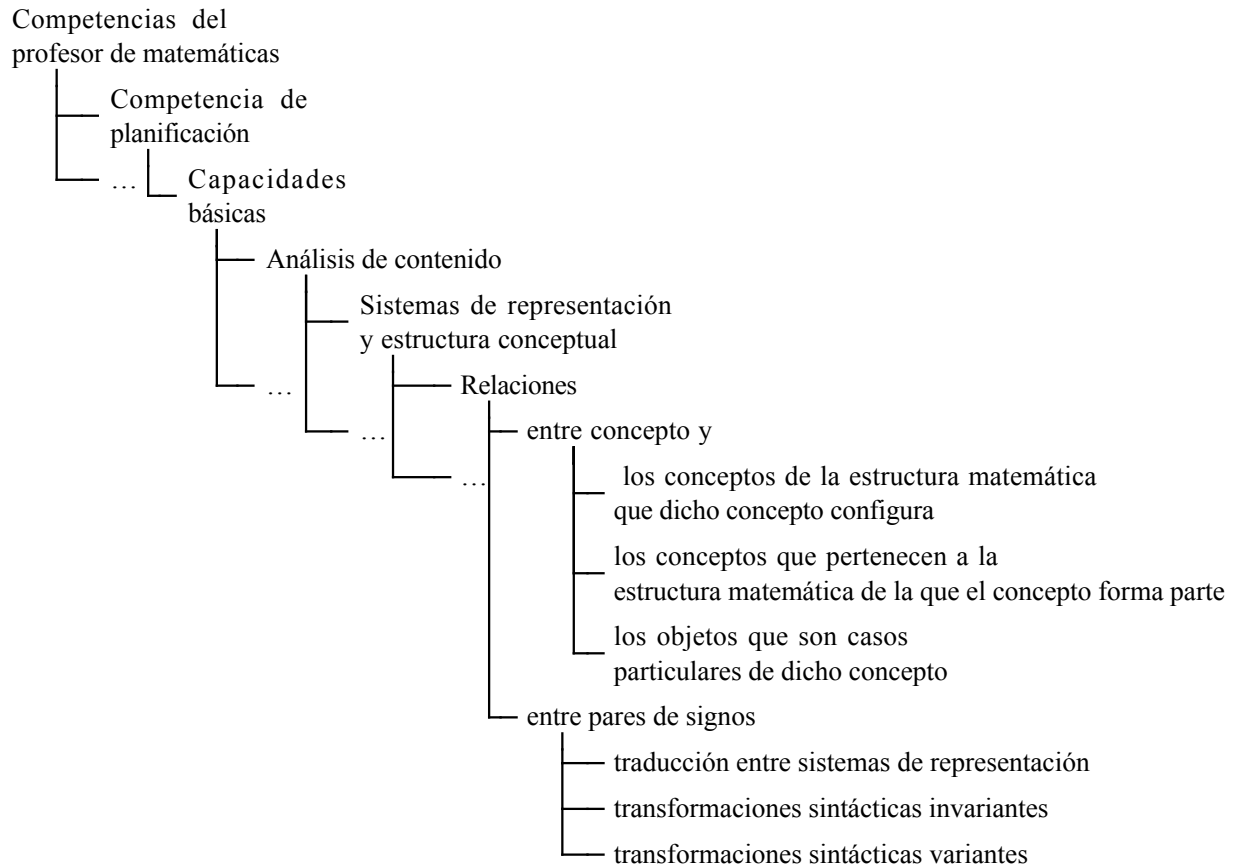


Figura 9. Estructura de capacidades y competencia de planificación

CONCLUSIONES

En la primera parte de este artículo presenté una revisión del estado del arte en formación de profesores de matemáticas desde la perspectiva de los trabajos y discusiones que se presentaron en el decimoquinto estudio ICMI. Resalté la gran variedad de contextos, problemas y modelos que existen alrededor del mundo en relación con la formación inicial y permanente de profesores de matemáticas. Y, de la pluralidad de temas y problemas que se están considerando en este momento, seleccioné la problemática del conocimiento del profesor de matemáticas y, en particular, la propuesta de Ball y sus colaboradores sobre las “matemáticas para la enseñanza”. En la segunda parte del artículo describí las principales características de esta propuesta y sugerí algunas críticas a esta visión del conocimiento del profesor de matemáticas.

Mi propuesta es de tipo analítico y, por lo tanto, es complementaria a la noción de “matemáticas para la enseñanza”. Al presentar el análisis didáctico como conceptualización de

las actividades del profesor para planificar, llevar a la práctica y evaluar unidades didácticas, delimito una estructura de procedimientos que pueden caracterizar buena parte de la actividad docente del profesor de matemáticas. De esta manera puedo profundizar sistemáticamente en la identificación de algunas de las capacidades que contribuyen al desarrollo de sus competencias profesionales.

Existe una gran diversidad de contextos sociales, educativos, institucionales y de aula que condicionan la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. A la hora de realizar su actividad docente, el profesor debe tener en cuenta estos contextos y adaptar su planificación y su gestión de clase estas condiciones. De la misma manera, las diferencias en los contextos en los que se realiza la formación inicial de profesores de matemáticas implica que existen una variedad de modelos y aproximaciones para abordar esta cuestión. No obstante, es válido preguntarse si, dentro de esta diversidad, es posible identificar y caracterizar un núcleo común. En este artículo he sugerido que ese núcleo se puede localizar en la conceptualización y caracterización del conocimiento del profesor de matemáticas. He presentado dos aproximaciones a esa cuestión. La primera, de Ball y sus colaboradores, se basa en el análisis de la práctica de profesores exitosos y sugiere una adaptación de la noción de conocimiento pedagógico de contenido propuesta por Shulman. La segunda, es una aproximación analítica, que, con base en la noción de análisis didáctico, identifica y estructura de manera sistemática las capacidades que pueden contribuir a las competencias profesionales del profesor de matemáticas.

REFERENCIAS

- 15th ICMI Study. (2005). 15th ICMI Study Conference: The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics. Contributed Papers, Demonstrations And Worksessions. Descargado el 27/6/2005, de http://stwww.weizmann.ac.il/G-math/ICMI/log_in.html
- Adler, J., Ball, D., Krainer, K., Lin, F. L. y Novotna, J. (2005a). Reflections on an emerging field: researching mathematics teacher education. *Educational Studies in Mathematics*, 60(3), 359-381.
- Adler, J., Davis, Z., Kazima, M., Parker, D. y Webb, L. (2005b). *Working with learners' mathematics: Exploring key elements of mathematical knowledge for teaching*. Trabajo presentado en PME 29, Melbourne.
- Adler, J. y Jaworski, B. (2005). *The state of research on mathematics teacher education, and how it needs to develop*. Trabajo presentado en The Fifteenth ICMI Study, Águas de Lindóia.
- Artigue, M. (1990). Epistémologie et didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(23), 241-286.
- Arvold, B. (2005). *Goals embedded in tradition: springboards for mathematics teacher education*. Trabajo presentado en The Fifteenth ICMI Study, Águas de Lindóia.
- Askew, M., Latham, P. y Burns, C. (2005). *Learning from practice: teachers and researchers in joint inquiry*. Trabajo presentado en The Fifteenth ICMI Study, Águas de Lindóia.
- Bairral, M. y Giménez, J. (2005). *Dialogic use of teleinteractions for distance geometry teacher training (12-16 years old) as an equity framework*. Trabajo presentado en The Fifteenth ICMI Study, Águas de Lindóia.

- Bairral, M. y Zanette, L. (2005). *Geometric learning and interaction in a virtual community of practice*. Trabajo presentado en The Fifteenth ICMI Study, Águas de Lindóia.
- Ball, D. (1988). *The subject matter preparation of prospective mathematics teachers: Challenging the myths*. East Lansing, MI: The National Center for Research on Teacher Education.
- Ball, D. (1991). Research on teaching mathematics: Making subject matter knowledge part of the equation. En J. Brophy (Ed.), *Advances in research on teaching. Vol. 2. Teacher's knowledge of subject matter as it relates to their teaching practice. A research annual* (Vol. 2, pp. 1-48). Greenwich, CT: Jai Press.
- Ball, D. L. (1990). The mathematical understandings that prospective teachers bring to teacher education. *Elementary School Journal*, 90(4), 449-466.
- Ball, D. L. y Bass, H. (2000). Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: Knowing and using mathematics. En J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning* (pp. 83-104). Westport: Ablex.
- Ball, D. L. y Bass, H. (2003). Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. En B. Davis y E. Simmt (Eds.), *Proceedings of the 2002 Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group* (pp. 3-14). Edmonton, AB: CMESG/GCEDM.
- Ball, D. L., Bass, H., Delaney, S., Hill, H., Lewis, J., Phelps, G., Thames, M. y Zopf, a. D. (2005a, April 14, 2005.). *Conceptualizing mathematical knowledge for teaching*. Trabajo presentado en Annual meeting of the American Educational Research Association, Montréal, Quebec.
- Ball, D. L., Bass, H., Sleep, L. y Thames, M. (2005b). *A theory of mathematical knowledge for teaching*. Trabajo presentado en The Fifteenth ICMI Study, Águas de Lindóia.
- Ball, D. L., Lubienski, S. T. y Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (4 ed., pp. 433-456). Washington, DC: American Educational Research Association.
- Batanero, C., Biehler, R., Maxara, C., Engel, J. y Vogel, M. (2005). *Using simulation to bridge teachers' content and pedagogical knowledge in probability*. Trabajo presentado en The Fifteenth ICMI Study, Águas de Lindóia.
- Bergsten, C., Grevholm, B. y Agder, H. i. (2005). *The didactic divide and educational change*. Trabajo presentado en The Fifteenth ICMI Study, Águas de Lindóia.
- Biehler, R. (2004). Reconstruction of meaning as a didactical task: the concept of function as an example. En J. Kilpatrick, C. Hoyles y O. Skovsmose (Eds.), *Meaning in Mathematics Education* (pp. 61-81). Dordrecht: Kluwer.
- Bishop, A. J., Clements, K., Keitel, C., Kilpatrick, J. y Laborde, C. (1996). *International handbook of mathematics education*. Dordrecht: Kluwer.
- Boerst, T. (2005). *Reflection for teaching: nurturing and noticing reflection in practice-based professional learning experiences*. Trabajo presentado en The Fifteenth ICMI Study, Águas de Lindóia.
- Borba, M. C. (2005). *Internet-based continuing education programs*. Trabajo presentado en The Fifteenth ICMI Study, Águas de Lindóia.

- Bowden, J. A. (1997). *Competency-based education: Neither a panacea nor a pariah*. Trabajo presentado en Technological Education and National Development 97 Conference, Abu Dhabi.
- Bromme, R. (1994). Beyond subject matter: A psychological topology of teachers professional knowledge. En R. Biehler (Ed.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 73-88). Dordrecht: Kluwer.
- Bromme, R. y Steinbring, H. (1994). Interactive development of subject matter in the Mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 27, 217-248.
- Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Kluwer.
- Bullough, R. V. (2001). Pedagogical content knowledge circa 1907 and 1987: a study in the history of an idea. *Teaching and Teacher Education*, 17, 655-666.
- Bullough, R. V. (2002). Thoughts on Teacher Education in the USA. *Journal of Education for Teaching: International Research and Pedagogy*, 28(3), 233.
- Carlsen, W. (2001). Domains of teacher knowledge. En J. Gess-Newsome y N. G. Lederman (Eds.), *Examining pedagogical content knowledge. The construct and its implications for science education* (pp. 133-144). Dordrecht: Kluwer.
- Chapman, O. (2005). *Stories of practice: a tool in preservice secondary mathematics teacher education*. Trabajo presentado en The Fifteenth ICMI Study, Águas de Lindóia.
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-266.
- Chiocca, C. M. (2005). *Functions of writing for the consideration of pupils' learning by trainee teachers*. Trabajo presentado en The Fifteenth ICMI Study, Águas de Lindóia.
- Cooney, T. J. (1994). Research and teacher education: In search of common ground. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(6), 608-636.
- da Ponte, J. P. y Serrazina, L. (2005). *Understanding and transforming practice: A Portuguese experience*. Trabajo presentado en The Fifteenth ICMI Study, Águas de Lindóia.
- Davis, B., Simmt, E. y Sumara, D. (2005). *Mathematics-for-teaching: an ongoing investigation of the mathematics teachers (need to) know*. Trabajo presentado en The Fifteenth ICMI Study, Águas de Lindóia.
- Dawson, A. J. (2005). *Mathematics Education in Micronesia: Building Local Capacity to Provide Professional Development for Teachers of Mathematics*. Trabajo presentado en The Fifteenth ICMI Study, Águas de Lindóia.
- DET. (2004). *Competency framework for teachers*. East Perth: Department of Education and Training.
- Durand-Guerrier, V. y Winsløw, C. (2005). *Education of lower secondary mathematics teachers in denmark and france: a comparative study of characteristics of the systems and their products*. Trabajo presentado en The Fifteenth ICMI Study, Águas de Lindóia.
- Even, R. (2005). *Developing and integrating knowledge and practice: examination of two activities*. Trabajo presentado en The Fifteenth ICMI Study, Águas de Lindóia.
- Firer, M. (2005). *Writing didactical activities as a formative element for mathematic teachers*. Trabajo presentado en The Fifteenth ICMI Study, Águas de Lindóia.
- Francisco, J., Maher, C. A., Powell, A. B. y Weber, K. (2005). *Urban teachers attending to students' mathematical thinking: an emergent model of professional development*. Trabajo presentado en The Fifteenth ICMI Study, Águas de Lindóia.

- Frege, G. (1998a). *Ensayos de semántica y filosofía de la lógica*. Madrid: Tecnos.
- Frege, G. (1998b). Función y concepto. En L. M. Valdés (Ed.), *Ensayos de semántica y filosofía de la lógica* (pp. 53-79). Madrid: Tecnos.
- Gadanidis, G. y Namukasa, I. (2005). *Math therapy*. Trabajo presentado en The Fifteenth ICMI Study, Águas de Lindóia.
- García, M. y Sánchez, V. (2005). *An approach to secondary mathematics teacher education*. Trabajo presentado en The Fifteenth ICMI Study, Águas de Lindóia.
- Geddis, A. y Wood, E. (1997). Transforming subject matter and managing dilemmas: a case study in teacher education. *Teaching and Teacher Education*, 13(6), 611-626.
- Gellert, U. y Krummheuer, G. (2005). *Collaborative interpretation of classroom interaction: stimulating practice by systematic analysis of videotaped classroom episodes*. Trabajo presentado en The Fifteenth ICMI Study, Águas de Lindóia.
- Georget, J.-P. (2005). *How to aid teachers to practice open problems with their students (9-11 year-old): a try of collaborative work between teachers*. Trabajo presentado en The Fifteenth ICMI Study, Águas de Lindóia.
- Gess-Newsome, J. (2001). Pedagogical content knowledge: An introduction and orientation. En J. Gess-Newsome y N. G. Lederman (Eds.), *Examining Pedagogical Content Knowledge. The Construct and its Implications for Science Education* (pp. 3-17). Dordrecht: Kluwer.
- Godino, J. D., Roa, R., Ruiz, F. y Pareja, J. L. (2005). *Mathematical and pedagogical content knowledge for prospective elementary school teachers: the "Edumat-Maestros" project*. Trabajo presentado en The Fifteenth ICMI Study, Águas de Lindóia.
- Gómez, P. (2002a). Análisis del diseño de actividades para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En M. C. Penalva y G. Torregosa (Eds.), *Aportaciones de la didáctica de la matemática a diferentes perfiles profesionales* (pp. 341-356). Alicante: Universidad de Alicante.
- Gómez, P. (2002b). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *Revista EMA*, 7(3), 251-293.
- Gómez, P. y Lupiáñez, J. L. (2005). *Trayectorias hipotéticas de aprendizaje en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Trabajo presentado en V Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática, Oporto, Portugal.
- Gómez, P. y Rico, L. (2005). *Learning in secondary preservice teacher education from the communities of practice perspective*. Trabajo presentado en The Fifteenth ICMI Study, Águas de Lindóia.
- González, J. y Wagenaar, R. (Eds.). (2003). *Tuning Educational Structures in Europe. Informe final. Fase uno*. Bilbao: Universidad de Deusto y Universidad de Groningen.
- Graf, D., Leung, F. y López-Real, F. (Eds.). (2005). *Mathematics education in different cultural traditions: a comparative study of East Asia and the West*. Berlin: Springer-Verlag.
- Graves, B., Suurtamm, C. y Benton, N. (2005). *Learning and teaching mathematics in communities of inquiry: is it enough to transform practice?* Trabajo presentado en The Fifteenth ICMI Study, Águas de Lindóia.
- Grevholm, B. y Bergsten, C. (2005). *The development of a professional language in mathematics teacher education*. Trabajo presentado en The Fifteenth ICMI Study, Águas de Lindóia.

- Hill, H. y Ball, D. L. (2004). Learning mathematics for teaching: Results from California's mathematics professional development institutes. *Journal for Research in Mathematics Education*, 35(5), 330-351.
- Hill, H., Rowan, B. y Ball, D. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal*, 42(2), 371-406.
- Hospesova, A., Budejovice, C., Ticha, M. y Machackova, J. (2005). *Developing the competences of primary school teachers via collective reflection*. Trabajo presentado en The Fifteenth ICMI Study, Águas de Lindóia.
- ICMI 15. (2004). Discussion document: the fifteenth icmi study: the professional education and development of teachers of mathematics: the international commission on mathematical instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 56(2-3), 359-372.
- Jaworski, B. (2005). *Learning in practice from a study of practice*. Trabajo presentado en The Fifteenth ICMI Study, Águas de Lindóia.
- Kinach, B. M. (2002). A cognitive strategy for developing pedagogical content knowledge in the secondary mathematics methods course: toward a model of effective practice. *Teaching and Teacher Education*, 18, 51 –71.
- Liljedahl, P. (2005). *Changing beliefs, changing intentions of practices: the re-education of preservice teachers of mathematics*. Trabajo presentado en The Fifteenth ICMI Study, Águas de Lindóia.
- Llinares, S. (2004). *La actividad de enseñar matemáticas como organizador de la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Adecuación al Itinerario Educativo del Grado de Matemáticas*. Trabajo presentado en Itinerario Educativo de la Licenciatura de Matemáticas, Granada.
- LMT. (2005). Learning Mathematics for Teaching Project. Sample Items. Descargado el 23/5/2005
- Lupiáñez, J. L., Rico, L., Gómez, P. y Marín, A. (2005). *Análisis cognitivo en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Trabajo presentado en V Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática, Oporto, Portugal.
- MEN. (2004). *Intercambio de experiencias significativas sobre desarrollo de competencias en lenguaje y matemáticas*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.
- Millman, R. y Ma, X. (2005). *Integrating the assessment principle into mathematics content courses for preservice elementary teachers*. Trabajo presentado en The Fifteenth ICMI Study, Águas de Lindóia.
- Morselli, F. (2005). *Reflections on pre-service primary teachers' needs and difficulties: their "relation to mathematics"*. Trabajo presentado en The Fifteenth ICMI Study, Águas de Lindóia.
- Mumme, J. y Carroll, C. (2005). *Using video to consider teachers opportunities to learn in professional development settings*. Trabajo presentado en The Fifteenth ICMI Study, Águas de Lindóia.
- NBPTS. (2002). *What teachers should know and be able to do*. Arlington: NBPTS.
- NCTM. (1991). *Professional standards for teaching mathematics*. Reston: NCTM.
- Niss, M. (2003). The Danish KOM project and possible consequences for teacher education. En R. Strässer, G. Brandell y B. Grevholm (Eds.), *Educating for the future. Proceedings of*

- an international symposium on mathematics teacher education* (pp. 179-192). Göteborg: Royal Swedish Academy of Sciences.
- OECD. (2003). *The PISA 2003 assessment framework. Mathematics, reading, science and problem solving knowledge and skills*. París: OCDE.
- Oldager, N. (2004). *Conceptual knowledge representation and reasoning*. Tesis doctoral no publicada, Technical University of Denmark, Copenhagen.
- Palis, G. d. L. R. (2005). *Continuing education: activities based on student work. How we did it and what we have learned from it*. Trabajo presentado en The Fifteenth ICMI Study, Águas de Lindóia.
- Pope, S. y Jones, K. (2005). *Who trains the new teachers? - supporting tutors new to initial teacher education in mathematics*. Trabajo presentado en The Fifteenth ICMI Study, Águas de Lindóia.
- Recio, T. (2004). Seminario: itinerario educativo de la licenciatura de matemáticas. Documento de conclusiones y propuestas. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 7(1), 33-36.
- Rico, L. (2004). Reflexiones sobre la formación inicial del profesor de matemáticas de secundaria. *Profesorado. Revista de currículum y formación del profesorado*, 8(1), 1-15.
- Robinson, N. (2005). *Lesson study: an example of its adaptation to israeli middle school teachers*. Trabajo presentado en The Fifteenth ICMI Study, Águas de Lindóia.
- Rosu, L. M. y Arvold, B. (2005). *Questioning as learning milieu in mathematics teacher education*. Trabajo presentado en The Fifteenth ICMI Study, Águas de Lindóia.
- Rowland, T. y Thwaites, A. (2005). *The knowledge quartet: a framework for reflection, discussion and professional development*. Trabajo presentado en The Fifteenth ICMI Study, Águas de Lindóia.
- Seago, N. y Mumme, J. (2005). *Collective inquiry and analysis into video-based professional development*. Trabajo presentado en The Fifteenth ICMI Study, Águas de Lindóia.
- Segall, A. (2004). Revisiting pedagogical content knowledge: the pedagogy of content/the content of pedagogy. *Teaching and Teacher Education*, 20(5), 489-504.
- Shamatha, J. (2005). *Building capacity for mathematics achievement: a collaborative approach*. Trabajo presentado en The Fifteenth ICMI Study, Águas de Lindóia.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22.
- Siemon, D. (2005). *Learning in and from professional practice through peer observation and review - A case-study*. Trabajo presentado en The Fifteenth ICMI Study, Águas de Lindóia.
- Sierra, M. (2004). *Itinerario educativo*. Trabajo presentado en Seminario Itermat organizado por ICMI-E & Universidad de Granada, Granada.
- Silver, E., Castro, A., Ghouseini, H. y Stylianides, G. (2005). *The professional education and development of teachers of mathematics*. Trabajo presentado en The Fifteenth ICMI Study, Águas de Lindóia.

- Simon, M. A. (1997). Developing new models of mathematics teaching: An imperative for research on mathematics teacher development. En E. Fennema y B. S. Nelson (Eds.), *Mathematics teachers in transition* (pp. 55-86). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.
- Skott, J. (2005). *Developing pre-service teacher education in times of constraints: the case of the Eritrean elementary school*. Trabajo presentado en The Fifteenth ICMI Study, Águas de Lindóia.
- Stacey, K., Chick, H. y Kendal, M. (Eds.). (2004). *The Future of the Teaching and Learning of Algebra*. Berlin: Springer-Verlag.
- Steinbring, H. (1997). Epistemological investigation of classroom interaction in elementary mathematics teaching. *Educational Studies in Mathematics*, 32(1), 49-93.
- Suurtamm, C., Graves, B. y Koch, M. (2005). *Building community: focusing on a provincial initiative to build primary teacher expertise in mathematics*. Trabajo presentado en The Fifteenth ICMI Study, Águas de Lindóia.
- Sztajn, P. (2005). *Documenting learning within school-based mathematics education communities of teachers*. Trabajo presentado en The Fifteenth ICMI Study, Águas de Lindóia.
- Tatto, T., Paine, L. y Schwille, J. (2005). *Analyzing the relation between theory and practice in three country case studies*. Trabajo presentado en The Fifteenth ICMI Study, Águas de Lindóia.
- Tirosh, D. y Tsamir, P. (2005). *Formulating and developing a didactics of mathematics component in a teacher education program: research and instruction*. Trabajo presentado en The Fifteenth ICMI Study, Águas de Lindóia.
- Visnovska, J. (2005). *Use of video cases in teacher professional development: analysis of two contrasting cases*. Trabajo presentado en The Fifteenth ICMI Study, Águas de Lindóia.
- Wood, T. (2005). *Developing a more complex form of mathematics practice in the early years of teaching*. Trabajo presentado en The Fifteenth ICMI Study, Águas de Lindóia.