TAREAS PARA ALUMNOS Y TAREAS PARA LA FORMACIÓN: DISCUTIENDO EL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR Y DEL FORMADOR DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Miguel Ribeiro
Universidade Estadual de Campinas, UNICAMP, Brasil

Resumen: Para la mejora de los aprendizajes de los alumnos se necesita un cambio en la práctica del profesor que solo será posible con una mejora de la formación de profesores. Asumiendo la especificidad del conocimiento del profesor de matemáticas, y su complementariedad con respecto al conocimiento de los alumnos (matemático y didáctico), el conocimiento del formador de profesores tiene también sus especificidades y particularidades con relación al del profesor. Por otro lado, las tareas asumen una importancia central en el desarrollo de la actividad matemática en la clase, de ahí que se configuren también como un elemento nuclear en (y para) el desarrollo del saber matemático (conocimientos, capacidades,…) de alumnos, profesores y formadores de profesores. Teniendo como punto de partida tareas "típicas" para alumnos, este artículo discute algunos aspectos del conocimiento especializado del profesor para interpretar y atribuir significado (matemático) a respuestas de alumnos, y el conocimiento especializado del formador de profesores para conceptualizar dichas tareas y atribuir significado a las respuestas de los profesores.

Tareas matemáticas; conocimiento matemático especializado del profesor; conocimiento matemático especializado del formador de profesores; racionales

INTRODUCCIÓN

A pesar de los cambios curriculares ocurridos con frecuencia (probablemente demasiada – a cada cambio de gobierno – y muchas veces sin evidencias que lo justifiquen), esos cambios no han producido resultados prácticos en el sentido de la mejora de los aprendizajes de los alumnos, ya que resultados de las investigaciones en Educación Matemática continúan poniendo de relieve las mismas áreas problemáticas que hace 20 o 30 años (e.g., Geometría, Estadística, demonstración, operaciones, resolución de problemas – Kammi & Dominick, 1998).

De entre la diversidad de perspectivas existentes, algunos consideran que la mejora de los resultados de los alumnos solo será posible si ocurre un aumento del número de horas de matemática en las escuelas, mientras que otros asumen que esa mejora solo podrá ocurrir si a los alumnos se les solicita que resuelvan una cantidad substancial de ejercicios de cada tipo. La perspectiva que asumo es substancialmente distinta. Sustentado en resultados de la investigación enfocada en los procesos de aprendizaje de los alumnos, en los factores que influencian dichos aprendizajes, en la práctica del profesor e en el conocimiento del profesor que enseña matemática (e.g., Carrillo et al., 2013; Ribeiro & Carrillo, 2011), asumo que la mejora de los aprendizajes matemáticos de los alumnos se sustenta en la mejora de la práctica del profesor y de su conocimiento. En ese sentido, mejorar los aprendizajes de los alumnos no se relaciona con la cantidad de horas de matemática o de ejercicios resueltos, sino con la calidad de la matemática explorada, con los objetivos matemáticos perseguidos y con las formas en que esa matemática es explorada con los alumnos (oportunidades de aprendizaje facultadas), dejando “la puerta abierta” para aprendizajes futuros.

Para esa mejora dos elementos son esenciales: las tareas que se preparan y discuten con los “resolutores” y el conocimiento del profesor. Estas tareas se pueden considerar desde la perspectiva de reproducción (asociada a conocer un conjunto de procedimientos para obtener la respuesta esperada), hasta tareas que tienen por objetivo contribuir para que los alumnos aprendan matemática entendiendo lo que están haciendo y por qué lo están haciendo. Esa centralidad de las tareas se justifica también porque “*lo que los alumnos aprenden es en gran parte definido por las tareas que les son dadas*” (Hiebert & Wearne, 1993) y se asocia tanto a las formas como son exploradas cuanto, fundamentalmente, a los objetivos matemáticos asociados, lo que pretenden alcanzar en el contexto que exploran, asumiendo la naturaleza de la propia tarea como un lugar destacado en la operacionalización de dichos objetivos. De forma asociada el profesor, y su conocimiento, corresponde al factor que más impacto posee en los resultados (y aprendizaje) de los alumnos (Nye, Konstantopoulos, & Hedges, 2004). Así, el conocimiento que el profesor tiene, o asume tener (Ribeiro & Carrillo, 2011), da forma a las tareas (foco, objetivo, naturaleza) y a los modos en que dichas tareas son exploradas (calidad matemática) con los alumnos, moldeando, a su vez, los modos en que los alumnos consideran la matemática y su enseñanza.

Considerando la centralidad del profesor y de su conocimiento en y para los aprendizajes de los alumnos, y el hecho de que ese conocimiento se considera especializado, se puede considerar un paralelismo entre ese papel del profesor y el rol (deseado) del formador de profesores y de su conocimiento en los aprendizajes (desarrollo profesional) del profesor. También, en la formación de profesores, las tareas conceptualizadas e implementadas (naturaleza y objetivos asociados) deberán asumir una centralidad en el desarrollo de los aprendices – no se considera un paralelismo (transposición) directo, ya que los objetos de trabajo (el foco del trabajo y los objetivos asociados), aunque se refieran a conocimientos y saberes, deberán ser necesariamente distintos (complementarios). Al ser especializado el conocimiento del profesor, también el conocimiento del formador se considera así, pero esa especialización se refiere a aspectos tanto más amplios cuanto profundos. De la misma forma que el profesor cumple con más que ser un “bueno alumno” de la etapa educativa en la que enseña (enseñará), también el formador de profesores cumplirá más que con ser un “bueno profesor”, lo que implica que, al menos en parte, la naturaleza del conocimiento especializado en estos dos contextos deberá ser distinta.

En este artículo, teniendo como punto de partida un problema para alumnos de 6º grado en el ámbito de los racionales (cantidad no entera), se discuten algunos aspectos de las especificidades de las tareas que tienen como foco contribuir al desarrollo del conocimiento especializado del profesor (y en ultima instancia de los conocimientos y capacidades de los alumnos) y, de forma asociada, las particularidades del conocimiento especializado del profesor que enseña matemática y del formador de profesores que enseñan (enseñarán) matemática[2].

BREVES APUNTES TEÓRICOS

Es relativamente consensuado que el conocimiento matemático de alumnos y profesores deberá ser distinto (complementario). En ese sentido, la formación de profesores deberá enfocarse en contribuir para desarrollar dichas complementariedades, que se refieren tanto a un conocimiento y capacidades matemáticas como didácticas. Esa formación deberá permitir desarrollar un conocimiento asociado, por ejemplo, a la articulación de diferentes aspectos de la matemática (elemental y avanzada) y de la historia de la matemática y de la educación matemática de modo que puedan proporcionar oportunidades de aprendizaje que contribuyan al desarrollo de un entendimiento de los por-qués matemáticos asociados a lo que se hace y por qué se hace a cada momento.

Partiendo de la idea de que al profesor no le basta solo "saber más matemática" o conocer un conjunto de estrategias "generales" para la enseñanza, el conocimiento del profesor que enseña matemáticas se considera especializado, tanto en términos del conocimiento matemático como didáctico del contenido, asumiendo la perspectiva del *Mathematics Teachers Specialized Knowledge–MTSK* (Carrillo et al., 2013). Esa especialización en el conocimiento matemático se refina asociada a cada una de las tareas centrales de enseñanza, siendo una de esas tareas de enseñanza el atribuir sentido y significado a las respuestas de alumnos (resolutores), demandando la movilización de lo que denominamos conocimiento interpretativo (Jakobsen, Ribeiro, & Mellone, 2014). Ese conocimiento sustenta el entender y atribuir significado a las respuestas, esencialmente a las que se encuentran fuera de nuestro propio espacio solución (y que no habían sido consideradas – su existencia o posibilidad) e, en ese sentido se encuadra en la dimensión matemática.

Atendiendo a la insuficiencia de que el profesor sea solo un buen alumno o el formador de profesores solo un buen profesor, se considera la existencia de especificidades en el conocimiento especializado de cada uno de estos agentes educativos. Una de las especificidades del conocimiento del formador de profesores, que complementa las del conocimiento del profesor, se refiere a la conceptualización y exploración de tareas que permitan, en simultáneo, desarrollar el conocimiento especializado del profesor y permitir que estos vivencien situaciones de la misma naturaleza que se espera puedan proponer a sus alumnos.

El objetivo de todas las tareas matemáticas deberá ser el de iniciar una actividad matemáticamente provechosa (Mason & Johnston Wilder, 2006), que contribuya al desarrollo de las habilidades y conocimientos de los resolutores. Dado que las formas, y objetivos asociados, de desarrollar esas habilidades y conocimientos depende de los diferentes aprendices (e.g., alumnos, profesores), las tareas para alumnos y para profesores son consideradas desde diferentes perspectivas, lo que implica tener en consideración las

[2] Uso la expresión "profesor que enseña matemática" y no "profesor de matemáticas" como forma de incluir de manera explícita los profesores de los años iniciales (Infantil y Primaria) que son profesores generalistas.

especificidades del conocimiento del profesor – cuando las tareas tienen por objetivo el desarrollo de dicho conocimiento. Así la conceptualización de tareas para la formación de profesores, que pretendan contribuir para desarrollar su conocimiento especializado, tiene que tener en cuenta la necesidad de que estas tareas tengan como punto de partida (y de llegada) situaciones basadas en la práctica y en los problemas/dificultades identificadas en esa práctica (del profesor y en relación con los aprendizajes matemáticas de los alumnos) – situaciones matemáticamente críticas.

Una de las aún muchas situaciones matemáticamente críticas en los aprendizajes de los alumnos y prácticas del profesor se refiere a los racionales (Newstead & Murray, 1998). En este texto, la discusión se hará alrededor de una tarea que tiene por objetivo desarrollar el conocimiento interpretativo del profesor, teniendo como punto de partida la atribución de sentido a respuestas de alumnos a un problema que involucra racionales. En particular se pretende explorar la relación compleja entre diferentes representaciones de un mismo numero racional, explorando diferentes formas equivalentes de representar una misma cantidad usando representaciones gráficas y numéricas.

FORMACIÓN DE PROFESORES DESARROLLANDO EL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO

Este articulo tiene origen en trabajos que siguen una abordaje cualitativo e implican varios estudios de caso (instrumentales) – de profesores, futuros profesores y formadores de profesores de diferentes etapas educativas – desarrollados en diferentes contextos (desde Infantil a Universidad) y países (e.g., Brasil, Itália, Noruega, México, Chile). De forma asociada e imbricada se consideran tres focos de investigación (asociados a distintos temas, capacidades y competencias matemáticas) que se informan mutuamente y cuyos resultados contribuyen para guiar el recorrido conjunto a efectuar. Dichos focos se refieren a las dificultades de aprendizajes de los alumnos; el conocimiento especializado revelado por profesores y futuros profesores; y el conocimiento especializado del formador de profesores (nuestra propia práctica). Como elemento que relaciona los tres focos encontramos las tareas para alumnos y profesores (particularidades y especificidades de la naturaleza, tipo y forma para cada contexto especifico). Todos los momentos de recogida de datos (e.g., clases de los profesores; formación inicial y continua; entrevistas individuales y de grupo; grupos colaborativos) son grabados en audio y video y todas las producciones (de alumnos, profesores y formadores de profesores) son también colectadas.

El caso que se discute en este articulo se sitúa en la formación inicial de profesores (con datos de Brasil, Noruega e Itália) y se refiere a la conceptualización e implementación de una tarea que tiene por objetivo desarrollar el conocimiento interpretativo del profesor a partir de la atribución de sentido a respuestas de alumnos a un problema de un libro de texto de 6.º de primaria en Portugal, considerando como punto de partida una situación matemáticamente crítica para los alumnos. Considerando el contexto de implementación de la tarea (formación de profesores), la conceptualización ha tenido como punto de partida respuestas de estudiantes al problema inicial (Ribeiro & Jakobsen, 2012) y a partir de esas respuestas han sido seleccionadas las que tenían más potencialidades matemáticas – tanto en términos de discutir los motivos matemáticos que podrían sustentar los errores como relacionadas con abordajes no-típicos/alternativos al problema.

La tarea propuesta está compuesta por dos partes: en la primera los profesores deben contestar al problema: *¿Qué cantidad de chocolate recibirá cada alumno si distribuimos equitativamente entre ellos 6 barras de chocolate?* (para sí mismos y no pensando en el contexto de la escuela); en la segunda, se solicita que atribuyan sentido a un conjunto de respuestas de alumnos al problema inicial discutiendo la validez y adecuación matemática y proveyendo de un *feedback* al alumno. Después de contestar a las dos partes de la tarea (en parejas) ocurre la discusión en gran grupo – que es grabada también en audio e video.

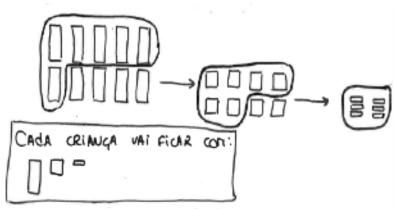

Figura 1: La respuesta de Mariana

La selección de las producciones de los alumnos a incluir en la tarea es algo central en la conceptualización de la propia tarea y de los objetivos que se persiguen. En ese sentido, es esencial analizar y discutir las elecciones efectuadas, mostrando las relaciones entre la representación grafica y el razonamiento matemático asociado, explorando posibles formas de navegar entre ellos[3]. En la solución elegida para incluir en la tarea, las cinco barras de chocolate están representadas por rectángulos e son consideradas divididas en 10 partes iguales. La primera parte encerrada en un círculo muestra la posibilidad de distribuir aquella cantidad de chocolate entre los seis alumnos (cada uno recibe ½ de una barra). La segunda división (de las cuatro mitades) muestra otra división en mitades (ocho partes iguales) siendo seis distribuidas como antes (una para cada alumno), correspondiendo a ¼ de la barra de chocolate. Al final, cada uno de los dos rectángulos pequeños (mitad de mitad) es dividido en tres partes que son encerradas en un círculo, mostrando la posibilidad de distribución entre los seis alumnos (1/3 del pedazo anterior). En la respuesta final los tres pedazos de chocolate son representados recurriendo solamente a dibujos, representando la respuesta correcta correspondiente a la cantidad de 5/6 (½+¼+1/12).

El análisis ha sido hecho en tres etapas: conocimiento de los futuros profesores asociado a resolver el problema propuesto; interpretaciones y argumentos al atribuir significado a las respuestas de los alumnos y el tipo (forma y contenido) del feedback; discusiones en grupo de las respuestas. El análisis se sustenta en la búsqueda de una más amplia comprensión de los motivos matemáticos que pueden sustentar las dificultades de los futuros profesores, considerando dichas dificultades como un punto de partida para la reflexión sobre el foco de la formación y de la propia práctica. Dicho análisis se sustenta en los subdominios del conocimiento especializado del profesor que enseña matemática (MTSK), en particular en

[3] En la tarea los profesores tienen de analizar siete producciones distintas, teniendo cada una sido seleccionada por se asociar a un determinado objetivo específico.

relación con los subdominios del contenido, ya que son estos los que dan forma al conocimiento interpretativo.

A partir de las discusiones de la tarea en gran grupo han emergido situaciones que permiten discutir algunas particularidades del conocimiento del formador de profesores en relación con el tema de los racionales pero, esencialmente, en relación con el propio sentido de la generalización, algo que no había sido contemplado en la selección de la resolución a incluir en la tarea.

CONOCIMIENTO DEL FORMADOR Y DEL PROFESOR

Uno de los objetivos asociados a la discusión del ejemplo presentado se refiere a la posibilidad de explorar las conexiones entre la representación pictórica y la correspondiente numérica y entre símbolos y sus referentes semánticos, trabajando la idea de composición operacional de número (en el sentido de Subramaniam y Banerjee, 2011).

Al contestar la primera cuestión de la tarea (resolver el problema propuesto) muchos futuros profesores aún presentan como respuesta elementos del conjunto de los enteros *(e.g., cada alumno se queda con cinco partes)*, lo que nos hace problematizar la propia formación que han tenido (tanto en el ámbito de la formación de profesores cuanto su formación como alumnos.

Otra respuesta común se torna problemática (por el razonamiento evidenciado) con relación al papel del todo (la unidad considerada) ya que para los futuros profesores lo importante es la representación numérica y no su significado *(e.g., 1/6 del chocolate)*. Esta solución se aproxima al tipo de solución anterior (en los naturales), pero con un ligero movimiento hacia la representación en fracción ya que la primera parte del razonamiento (explicitado en sus respuestas) es similar a lo que permite obtener como respuesta un numero natural (cada alumno se queda con cinco partes de un total de 30 partes de las barras de chocolate), pero la expande, considerando el papel del todo (que es la unidad) pero sin que ocurra una articulación con la situación específica, lo que implica presentar como solución *5/30=1/6*, obteniendo así una respuesta correcta pero que se sustenta en un razonamiento inadecuado.

Los dos ejemplos de respuestas anteriores (muchos otros podrían ser discutidos) llaman la atención para un tipo de responsabilidad del formador de profesores (parte esencial de su conocimiento especializado) que se relaciona con el provocar/obligar la ampliación del espacio solución de los (futuros) profesores (como mínimo saber obtener la respuesta adecuada en el conjunto correspondiente), asumiendo las tareas propuestas (tipo, naturaleza y objetivos) un lugar central en tornar efectiva dicha ampliación. Esta responsabilidad se asocia a un conocimiento sobre las dificultades de los profesores en cada uno de los temas específicos (que a veces son semejantes a las de los alumnos), pero se relaciona también con la necesidad de articulación entre aspectos de la matemática avanzada (frecuentemente de las asignaturas de matemática de la universidad) y la matemática elemental (denominada también de escolar) buscando erradicar este tipo de problemática, posibilitando que puedan aportar un *feedback* constructivo a sus (futuros) alumnos.

Con relación a la atribución de significado a las respuestas de los alumnos, solo un 10% de cada grupo de futuros profesores que han contestado a la tarea presentan un posible razonamiento correcto para la respuesta de Mariana – esencialmente la descripción que se ha presentado anteriormente. Una vez más, la gran mayoría de los resolutores refieren no entender la solución presentada o la “evaluan” como incorrecta ya que no presenta valores numéricos *(e.g., no entiendo la resolución; la respuesta esta incorrecta ya que Mariana no presenta ninguno número; ella no entiende fracciones, solo esta dividiendo los rectángulos).* El hecho de que la respuesta presentada de Mariana se encuentre fuera del conjunto de respuestas esperado (espacio solución esperado) ha direccionado los comentarios de los futuros profesores para el ámbito general de cualquier respuesta, olvidando la matemática en discusión *(e.g., Mariana presenta muy buenas reflexiones; su forma de resolver el problema es “inteligente”).* Este tipo de abordaje pone en evidencia su conocimiento sobre fracciones; sobre diferentes formas de representación de una misma cantidad, en el sentido de la composición operacional de número (Subramaniam & Banerjee, 2011); dificultades en salir de su propio espacio solución; sus creencias respecto del contenido matemático (fracciones) y de la propia resolución de problemas.

Estas evidencias llaman la atención para otro tipo de responsabilidad del formador de profesores (parte esencial de su conocimiento especializado) que se relaciona con el ampliar el ámbito de los conocimientos especializados del profesor para atribuir significado (y sentido) a las respuestas de los alumnos, incluyendo el ver y escuchar más allá de lo obvio, creando la génesis de una constante búsqueda de posibles formas distintas de responder a las situaciones, bien como de cuestiones potentes que podrán surgir (aunque en ese momento uno no las sepa contestar). Acá, en particular, ese conocimiento se relaciona con el leer también numéricamente una representación pictórica de cantidades no enteras en el contexto de la escuela básica, pero tener también en mente posibles conexiones entre esta representación pictórica y, por ejemplo, la representación decimal de una cantidad no entera (0,8(3)), aspectos de la historia de la matemática asociados a las relaciones con otros algoritmos de la suma o con los decimales infinitos periódicos o semiperiódicos.

Complementar lo que se había previsto en un primer momento enfocar con relación a la respuesta de Mariana, las discusiones (e.g., la gestión de la clase; el hábito de discutir los errores considerándolos como origen de aprendizajes; el cuestionar al otro; la búsqueda por abordajes matemáticos alternativos) han permitido expandir el espacio solución de los propios formadores. Esa expansión ha tenido origen en un cuestionamiento de uno de los futuros profesores (Francisca) sobre la posibilidad, o no, de que la respuesta de Mariana haya sido obtenida por ensayo y error sin un razonamiento matemático asociado, y la consecuente (im)posibilidad de que funcione para otras cantidades de alumnos y de barras de chocolate:

Francisca: (…) si fueran siete alumnos no sé si funcionaría. Ha sido un proceso por ensayo y error que ha funcionado con estos valores pero no sé si con otros números va a funcionar.

Educador: ¿Dices entonces que este proceso parece no poder ser utilizado con otros números...?

Francisca: No lo sé…, tal vez no funcione con otros valores.

Asociado a este comentario de Francisca, al formador de profesores cumple un conocimiento sobre prueba y generalización, pero en el sentido de que pueda discutirlos con los (futuros) profesores de forma matemáticamente e didácticamente significativas, explorando diferentes "puntos de ataque" para cada una de las situaciones (aspectos nucleares de la demonstración y de lo que significa obtener generalizaciones y cuándo se puede, o no, buscar esas generalizaciones). El ver y escuchar el comentario de Francisca (más allá del obvio) implica movilizar un conocimiento asociado a una visión amplia de posibles formas de representar un racional cualquiera (en particular 5/6) incluyendo la más tradicional (5x1/6) pero también otras alternativas, como la representación usando series finitas (con recurso a fracciones unitarias) – haciendo también conexiones matemáticas y didácticas con dimensiones de la matemática avanzada. Así, el caso del 5/6 se puede representar como ½+1/4+1/12, que corresponde a la respuesta de Mariana y que es generalizable ya que toda la cantidad representada en fracción se puede escribir como suma finita de fracciones unitarias decrecientes, siendo el primer elemento la parte entera y cada una de las demás corresponde a la fracción unitaria más grande que está contenida en la parte restante.

ALGUNAS REFLEXIONES FINALES Y PERSPECTIVAS FUTURAS

El conocimiento especializado del formador de profesores (en particular el que se refiere al conocimiento interpretativo) posé una naturaleza y contenidos complementarios del especializado del profesor, ese conocimiento deberá expandir las fronteras del conocimiento didáctico – que es frecuentemente apuntado como el conocimiento central de la práctica docente. Así, al reconocer que para perseguir determinado conjunto de objetivos (e.g., que los alumnos entiendan lo que hacen y por qué lo hacen), al profesor cumple un determinado conjunto de conocimientos, al cambiar el foco de atención, y luego, los objetivos, al formador de profesores cumple otro cuerpo de conocimientos (que se considera expandir los del profesor) buscando posibilitar a que los profesores puedan posteriormente explorar los contenidos con efectiva comprensión, promoviendo el desarrollo de una alfabetización matemática en los alumnos.

Ya se sabe que el profesor (y su conocimiento) es el factor que más impacto tiene en los resultados (y aprendizajes) de los alumnos (Nye et al., 2004), por lo que una cuestión emergente se relaciona con el papel del conocimiento del formador de profesores en la práctica del profesor – y eso se articula, necesariamente, con el contenido de ese conocimiento. Aunque existen algunos trabajos centrados en el formador de profesores (e.g., su desarrollo profesional; el proceso de aprendizaje docente en la enseñanza superior), son muy raros los trabajos que buscan identificar y entender nuestro propio conocimiento especializado como formadores. Esta carencia de evidencias de la investigación permite argumentos como *que "para ser bueno formador es suficiente haber sido bueno profesor del nivel en que se están formando los profesores"*, y que *"para ser bueno formador basta hacer investigación en Educación Matemática"*, lo que me parece asociado a una visión demasiado limitadora del papel del formador, de la investigación, de la práctica y de las necesarias articulaciones entre estos elementos. De forma asociada, las tareas que se preparan, y las formas como se implementan, son centrales en la práctica (en ambos contextos) por lo que para contribuir a la mejora de la formación de profesores, de la práctica e de las aprendizajes de los alumnos, una discusión más profunda sobre los objetivos asociados a las tareas para la formación se torna esencial.

Articulando las dos dimensiones consideradas centrales en y para la formación de profesores (tareas y conocimiento del formador), se torna evidente la necesidad de investigaciones que contribuyan para avanzar en el área, permitiendo mapear el conocimiento del formador de profesores de forma que la formación se enfoque donde es efectivamente necesaria y ayude a contribuir para perseguir objetivos a medio y largo plazo permitiendo, posteriormente, incluso diseñar programas de formación de formadores de profesores que promuevan el desarrollo de nuestro conocimiento especializado.

Referencias

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., & Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining Specialized Knowledge for Mathematics Teaching. *Proceedings of CERME 8* (pp. 2985-2994). Antalya: ERME.

Hiebert, J. & Wearne, D. (1993). “Instructional Task, Classroom Discourse, and Students’ Learning in Second Grade.” American Educational Research Journal, 30: 393-425

Jakobsen, A., Ribeiro, C. M., & Mellone, M. (2014). Norwegian prospective teachers’ MKT when interpreting pupils’ productions on a fraction task. *Nordic Studies in Mathematics Education, 19*(3-4), 135-150.

Kamii, C., & Dominick, A. (1998). The harmful effects of algorithms in grades 1-4. In L. J. Morrow & M. J. Kenney (Eds), The teaching and learning of algorithms in school mathematics (130-140). Resto, V A: NCTM.

Mason, J., & Johnston-Wilder, S. (2006). *Designing and using mathematical tasks*. St Albans: Tarquin.

Newstead, K., & Murray, H. (1998). Young students’ constructions of fractions. In A. Olivier & K. Newstead (Eds.), *Proceedings 22ndPME* (Vol. 3, pp. 295-303). Stellenbosch, South Africa.

Nye, B., Konstantopoulos, S., & Hedges, L. V. (2004). How large are teacher effects? *Educational Evaluation and Policy Analysis, 26*(3), 237-257.

Ribeiro, C.M. & Carrillo, J. (2011). Discussing a teacher MKT and its role on teacher practice when exploring Data analysis. In B. Ubuz (Eds.). *Proceedings 35th PME* (vol. 4, pp. 41-48). Ankara, Turkey: PME. (ISBN: 978-975-429-262-6)

Ribeiro, C. M., & Jakobsen, A. (2012). Prospective teachers’ mathematical knowledge of fractions and their interpretation of the part-whole representation. In B. Maj-Tatsis & K. Tatsis (Eds.), *Generalization in mathematics at all educational levels* (pp. 289-298). Reszów, Poland: Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego.