

EL ROL DE LA VISUALIZACIÓN EN EL TRABAJO GEOMÉTRICO DEL PROFESOR: APORTES PARA SU DESARROLLO Y DIFERENCIACIÓN

Carolina Henríquez-Rivas
Universidad de La Frontera

Resumen: El propósito de esta comunicación es profundizar en el proceso de visualización en geometría, lo cual contempla analizar su rol en el trabajo del profesor cuando resuelve tareas geométricas. Se identifican dos tipos de tareas que favorecen formas diferentes de visualizar y se aporta con evidencia empírica concerniente al razonamiento geométrico de profesores en situaciones que demandan tratamientos figurales. El marco teórico que sustenta los análisis es el Espacio de Trabajo Matemático, el cual considera aspectos cognitivo, epistemológicos y cómo estos son articulados al resolver una actividad. Asimismo, se identifican las circulaciones en el trabajo matemático y los planos verticales activados. Finalmente, se contempla la profundización de los aspectos teóricos involucrados.

Visualización, trabajo geométrico, profesor, circulación

INTRODUCCIÓN

En la presente comunicación se propone una profundización relativa al proceso cognitivo de *visualización* geométrica en el nivel secundario, lo cual forma parte de una investigación más amplia relativa al trabajo geométrico del profesor de secundaria (Henríquez-Rivas & Montoya-Delgadillo, 2016; Henríquez-Rivas & Montoya-Delgadillo, 2015; Henríquez, 2014). Específicamente, en esta comunicación se analiza el rol de la visualización en el trabajo geométrico del profesor al resolver tareas geométricas, lo cual contempla identificar tipos de tareas que favorecen ciertas formas de visualizar y la caracterización de este proceso. Asimismo, se presentan los análisis de evidencia empírica concerniente a los razonamientos geométricos de profesores en situaciones que demandan tratamientos figurales en coordinación con razonamientos discursivos. El trabajo se sustenta en el marco *Espacio de Trabajo Matemático, ETM* (Kuzniak, 2011; Kuzniak & Richard, 2014), en el cual el proceso de visualización es uno de sus componentes en el plano cognitivo. La investigación se focaliza en la profundización de aspectos teóricos y la documentación de evidencia empírica sobre este tema. Para estos efectos, el ETM se articula con el enfoque de Duval sobre desarrollo de la visualización y coordinación con razonamientos discursivos (Duval, 1995, 1999, 2005).

La investigación relativa a la enseñanza y aprendizaje de la geometría, específicamente sobre el proceso de visualización ha cobrado valor y vigencia en las últimas décadas, lo cual se aborda por Presmeg (2006) en el marco de la investigación reportada en *el International Group for the Psychology of Mathematics Educations* (PME). Presmeg ofrece una vasta revisión sobre trabajos realizados en relación a la visualización, presentando temáticas como: las dificultades de los estudiantes, la visualización en la enseñanza, la elaboración de currículos escolares, la influencia de los computadores en la visualización matemática, entre otros.

Respecto a los efectos de la informática en la visualización matemática, el trabajo de Yerushalmy, Shternberg y Gilead (1999), expone la visualización no solo en temas geométricos, sino que como un vehículo para resolver problemas algebraicos. Los autores clasifican diferentes tipos de problemas y destacan las ventajas del software dinámico para favorecer la coordinación entre registros semióticos. Otro trabajo sobre el papel de las figuras dinámicas operatorias para el aprendizaje de propiedades geométricas en la escuela secundaria es el desarrollado por Coutat y Richard (2011). El estudio está basado en el constructo de los *Espacio de Trabajo Matemático* (Kuzniak, 2011) y la interacción *sujeto-milieu*, y su propósito es enriquecer el referencial teórico que poseen los estudiantes.

En la perspectiva cognitiva desarrollada por Duval (1995, 1999, 2005), se destacan los sistemas semióticos con registros de representación y tratamientos específicos y, particularmente, investigación relativa al proceso de *visualización* –especialmente en geometría– considerando las condiciones cognitivas para su aprendizaje. En la perspectiva cognitiva de Radford (2007), relacionada con la semiótica cultural, el saber no es considerado como algo anterior a la actividad cognitiva, sino que dependiendo de la cultura, los *Sistemas Culturales Semióticos* pueden alcanzar un nivel más o menos elevado considerados como constitutivos del objeto conceptual –objetivan al objeto–.

Una investigación sustentada en el enfoque *Ontosemiótico* propone una manera de entender y relacionar el lenguaje y el pensamiento visual (Godino, Gonzato, Cajaraville & Fernández, 2012). En el estudio, la configuración de objetos y procesos en una práctica matemática está formada por dos componentes, visual y analítico, los cuales se apoyan en la solución de una tarea. Los autores proponen una tipología de objetos ligados a los procesos de visualización.

La presente investigación presenta un estudio al trabajo geométrico sintético de profesores centrado en el proceso cognitivo de visualización. Cabe precisar que, cuando aquí se habla del enfoque sintético, se hace en el sentido de Klein (1908), es decir “Geometría sintética, aquella en la cual se estudian las figuras en sí mismas sin intervención alguna de fórmulas” (p. 73). Finalmente, esta profundización al proceso de visualización reinterpreta y caracteriza el trabajo matemático de profesores de Educación Media, lo que conlleva a plantear las siguientes preguntas *¿cuál es el rol de la visualización en el trabajo del profesor cuando resuelve tareas geométricas?* Y, en relación a las tareas *¿qué tipos de tareas favorecen diversas formas de visualizar?, ¿qué elementos aportan a su desarrollo y diferenciación?*

En la siguiente sección, se presenta el marco teórico para analizar el trabajo matemático del docente que sustenta esta investigación.

MARCO TEORICO

Espacio de Trabajo Matemático

Este estudio se sustenta en el *Espacio de Trabajo Matemático* (Kuzniak, 2011; Kuzniak & Richard, 2014), específicamente en el dominio de la geometría (ETMG), el cual fue conocido inicialmente como *Paradigmas Geométricos y Espacio de Trabajo Geométrico* desarrollado por de Houdement y Kuzniak (2006). El ETM se define como un ambiente organizado para permitir el trabajo de las personas que resuelven tareas matemáticas.

En el ETM se distinguen dos planos, epistemológico y cognitivo, y la articulación entre estos mediante un conjunto de génesis (semiótica, instrumental y discursiva) que favorecen su coordinación (Kuzniak, 2011). El *plano epistemológico* está constituido por tres componentes: *representante* o *representamen*, *referencial*, y *artefacto*. El *plano cognitivo* está conformado por tres componentes: los procesos de *visualización*, *construcción* y *prueba*. En las interacciones entre las génesis y sus componentes se definen los *planos verticales*, los que permiten relacionar el trabajo matemático caracterizando e identificando las diferentes fases (de trabajo) en relación a una tarea dada. Los planos son: semiótico-instrumental [Sem-Ins], instrumental-discursivo [Ins-Dis], y semiótico-discursivo [Sem-Dis] (Kuzniak & Richard, 2014), como se muestra en la Figura (1).

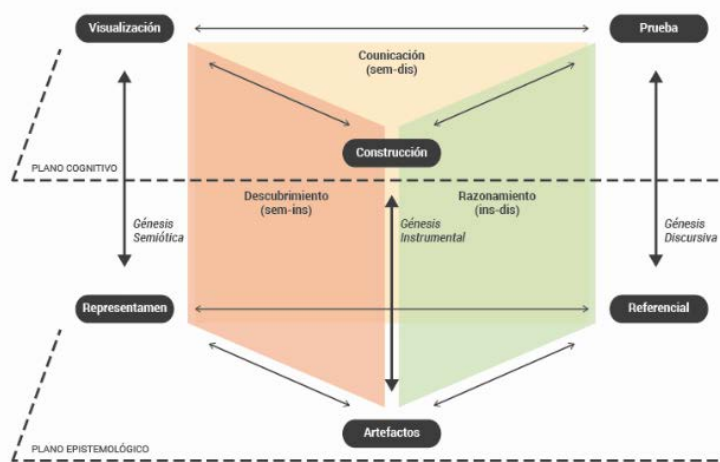


Figura 1: Los planos verticales en el ETM (Kuzniak & Richard, 2014).

Existen tres tipos de ETM: de *referencia*, definido sobre criterios matemáticos; *idóneo*, relativo a la enseñanza de un saber en una institución dada con una función definida; y *personal*, según la relación del individuo con un problema, sus conocimientos y capacidades cognitivas. En la presente comunicación se presentan los análisis relativos al ETM_G personal de profesores de matemática de Educación Media.

Los componentes del ETM deben ser reinterpretados dependiendo del dominio matemático específico, y según como se utiliza este espacio de trabajo se distinguen *paradigmas* en el dominio. En el caso de la geometría se denominan paradigmas *geométricos* y se clasifican como GI, GII y GIII.

Profundización del proceso de Visualización en el ETM

Para profundizar en el proceso de visualización se considera la perspectiva de Duval (1995, 1999, 2005), relativa a las condiciones cognitivas para el aprendizaje de la geometría. Para Duval, la *visualización* está basada en la producción de una representación semiótica (figuras geométricas, gráficos cartesianos) de un objeto, identificando dos modos de visualizar que pueden funcionar según el tipo de operación con las figuras y cómo se movilizan sus propiedades: uno *icónico* y otro *no-icónico*. Estos mecanismos de visualización se relacionan con cuatro formas de *ver* en función del rol de las figuras en las

actividades geométricas propuestas a los alumnos¹⁰. En el *botaniste* y *arpenteur-géomètre*, el reconocimiento de lo que representan las formas se hace por el parecido con el objeto que representa, o por comparación con un modelo “tipo” de formas; en el *constructeur* e *inventeur-bricoleur*, el trabajo implica la deconstrucción de las formas ya reconocidas visualmente (deconstrucción instrumental, descomposición heurística, y deconstrucción dimensional).

La presente comunicación se focaliza en el proceso de visualización *no-icónico*, específicamente, actividades geométricas que consideran deconstrucción instrumental y deconstrucción dimensional¹¹. Cabe señalar que son identificadas las diferentes entradas al ETM según las componentes involucradas, lo que se denomina *circulaciones* entre las componentes de los planos (Montoya-Delgadillo, Mena-Lorca & Mena-Lorca, 2014; Henríquez Rivas & Montoya Delgadillo, 2015).

ELEMENTOS METODOLÓGICOS

El estudio es de corte cualitativo relativo a los análisis del ETM_G *personal* de 19 profesores de secundaria al resolver dos tareas dadas. Las tareas fueron desarrolladas el mismo día, resolvieron primero la tarea 1, luego la tarea 2. La formación inicial de los profesores corresponde a instituciones chilenas (dos públicas y una privada), quienes fueron clasificados según su experiencia en: futuro profesor (FP), profesor debutante (PD) y profesor experimentado (PE). Del total de los participantes, serán considerados aquellos que utilizaron métodos geométricos sintéticos para resolver.

El propósito de las dos tareas planteadas es favorecer el proceso de visualización *no-icónica*, la primera del modo *constructeur* y, la segunda, del modo *inventeur-bricoleur* (Duval, 2005), ambas en coordinación con razonamientos discursivos y uso de artefactos, las que privilegian el trabajo en el *paradigma geométrico* GII (o bien, el paso de GI a GII).

La primera tarea se presenta en la modalidad con uso de software Geogebra, pues considerada otra versión con herramientas tradicionales (regla y compás). En relación a las temáticas involucradas en ambas tareas, se consideran elementos básicos de la Geometría Euclidiana en el plano tales como puntos, rectas, trazos, figuras planas, propiedades y definiciones de dichos elementos primarios. El criterio utilizado para la selección obedece a que son nociones que están presentes en el currículo de Educación Media y, por tanto, deberían poder ser abordadas por todos los participantes. Cabe señalar que, los análisis de las posibles estrategias de solución de las tareas no son contemplados en este escrito dada su extensión. A continuación, se muestran las tareas propuestas.

Tarea propuesta 1

La tarea formulada (en versión sintética) se presenta en la siguiente Tabla (1).

¹⁰ Se han conservado los nombres en francés para no alterar su sentido.

¹¹ Parte de estos trabajos han sido presentados en la investigación de Henríquez-Rivas y Montoya-Delgadillo (2016) y, recientemente en ICME-13 en el TSG 20 Visualisation in the teaching and learning of mathematics.

Dados dos puntos A y B en el plano, construir el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de A y B .

Para ello use un software dinámico y solo utilizando las herramientas “Intersección de dos objetos”



“Recta que pasa por dos puntos”



y “Circunferencia dado su centro y uno de sus puntos”



1. Marca con rojo el lugar geométrico y verifica la construcción moviendo los puntos A y B .

1. Describa paso a paso la construcción realizada.

2. ¿Cómo justifica que la construcción realizada es la correcta? ¿Qué definiciones y/o propiedades aparecen involucradas?

3. Si se movieran los puntos A y B ¿la solución sigue teniendo validez? Justifique su respuesta.

Tabla 1: Tarea propuesta 1

En esta tarea se espera favorecer el potencial dinámico que entrega el programa, específicamente, en la pregunta 3 para validar los procedimientos de la construcción realizada. Por otro lado, al restringir las herramientas del software (las mediciones), el trabajo en el paradigma GI queda limitado.

Desde el punto de vista del ETM se privilegia el modo de visualizar *constructeur*. Inicialmente, es activado el proceso de construcción, a través del uso de herramientas que proporciona el software y las operaciones realizadas en cierto orden. Estos procedimientos de construcción se deben comunicar, activando así la génesis discursiva y el plano [Sem-Ins]. La pregunta 2 coordina la génesis instrumental con la génesis discursiva, pues es preciso justificar la técnica de construcción. En esta fase del trabajo es activado el plano [Ins-Dis]. En la justificación de la construcción aparecen definiciones (como circunferencia, mediatriz) y propiedades (como de mediatriz, de paralelogramo). En términos de prueba, el trabajo tiene características de *pragmática e intelectual*, específicamente, del tipo *ejemplo genérico* (Balacheff, 1987). La validación de la construcción es activada en la pregunta 3, aprovechando el potencial dinámico del software, lo cual activa el plano vertical [Sem-Dis]. El trabajo favorece la génesis discursiva de la prueba sobre una configuración previamente construida.

Tarea propuesta 2

La tarea que se propone es: *Probar que las rectas que unen los puntos medios de los lados sucesivos de cualquier cuadrilátero forman un paralelogramo.*

En los análisis a priori se consideró la posibilidad que los profesores respondan en el enfoque sintético o analítico. Como ya fue mencionado, en la presente comunicación es considerada la perspectiva geométrica sintética.

En la perspectiva del ETM, el trabajo contempla, en una fase primera fase de descubrimiento, la construcción de una configuración geométrica (con o sin uso de artefacto), activando en plano [Sem-Ins], luego, las operaciones involucran añadir un trazo auxiliar para transformar y descomponer la figura de partida en sus unidades figurales (igual y menor dimensión) y reconfigurarla de otra manera. Esta tarea demanda la coordinación con razonamientos discursivos de la prueba y elementos de la componente referencial (una propiedad de los segmentos que unen los puntos medios de dos lados del triángulo es la que se ha considerado). En este caso, el tipo de prueba es *intelectual*, específicamente del tipo

*demostración*¹², activando así el plano [Sem-Dis], lo cual es el centro del trabajo. Cabe señalar que en esta tarea el plano [Ins-Dis] tiene menor presencia.

RESULTADOS

En los resultados de la tarea 1 según el ETM_G *personal* de los 19 profesores participantes, se identificaron 6 tipologías de respuestas, lo cual se resume en la siguiente Tabla (2). Además, se muestra el paradigma geométrico privilegiado según cada tipología

VERSIÓN SINTÉTICA						
Tipologías de respuesta	Recta que pasa por dos puntos	Solución por simetría	Solución figural	Construcción de paralelogramo	Solución recta perpendicular	Solución en versión analítica
Nº de casos	11	1	2	3	1	1
Paradigma privilegiado	GI/gII GII/gI	GII/gI	GI	GII/gI	GI/gII	GI/gII

Tabla 2: Resumen de resultados en tarea propuesta 1

En los resultados de la tarea 2, de los 19 participantes, 11 responden usando métodos sintéticos (el resto utilizan métodos analíticos). El resumen de los resultados se presenta en la siguiente Tabla (3).

Enfoque Sintético	
Participantes	Paradigma privilegiado
FP1, FP3, FP5, FP11, FP12, PE1, PE2	GI
PD1	GI/gII
FP7, FP9, PD2	GI (no terminan el trabajo solicitado)

Tabla 3: Resumen de resultados en tarea propuesta 2

CONCLUSIONES

El resultado principal de esta investigación concierne a la profundización y documentación del trabajo geométrico de profesores, especialmente cuando las tareas demandan un trabajo que activa el proceso de visualización. Estos trabajos han permitido proponer tipos de tareas según modos de visualización que estas demandan. Por otro lado, se han reconocido diversas

¹² Para estos efectos consideramos las tipologías de prueba según Balacheff (1987) y la noción de razonamiento de Duval (1995).

clases de visualización asociadas a una tarea específica y las circulaciones en el ETM que estos trabajos activan.

Estudios anteriores desarrollados en el marco del ETM respecto a la práctica en el aula del profesor de secundaria en temas de geometría, han evidenciado el predominio del trabajo aritmético/algebraico, la visualización icónica y poco énfasis en los razonamientos discursivos. A lo anterior, se suma la falta de orientaciones didácticas para el profesor que potencien un ETM_G *personal* en los estudiantes. La investigación que se desarrolla aporta específicamente en su desarrollo, diferenciación, estudio de evidencia empírica y profundización teórica, lo cual es un trabajo que aún continúa. Se destaca aquí el potencial del ETM como herramienta de análisis al trabajo matemático.

En la tarea 1 presentada se privilegia el proceso de construcción, lo cual demanda su justificación y validación. En la presente versión de la tarea se destaca la relevancia de la variable didáctica al restringir las herramientas del software, lo cual obligó a realizar una construcción geométrica y la visualización dinámica en la validación de la construcción. En la tarea 2, que exige añadir un trazo auxiliar, la deconstrucción dimensional en coordinación con razonamientos discursivos, donde la mayor cantidad de los participantes desarrolla un trabajo que privilegia el paradigma geométrico GI, y en general, se observa un débil *referencial* que permita desarrollar un trabajo discursivo de la prueba.

Finalmente, es parte de los propósitos ampliar el trabajo y proponer categorías de tareas asociadas a formas de visualizar que se conecten con otras, por ejemplo nos cuestionamos sobre las *tareas que favorecen el tránsito de la visualización icónica a la no-icónica*, así como otras formas de visualización no consideradas en la perspectiva teórica que aquí se propone.

Referencias

- Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational studies in mathematics*, 18(2), 147-176.
- Coutat, S. & Richard, P. (2011). Les figures dynamiques dans un espace de travail mathématique pour l'apprentissage des propriétés géométriques. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 16, 97-126.
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Traducción al castellano de Myriam Vega. Berne, Suisse: Peter Lang.
- Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. In F. Hitt & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st North American PME Conference*, 1, 3-26.
- Duval, R. (2005). Les Conditions Cognitives de l'apprentissage de la géométrie: Développement de la Visualisation, Différenciation des Raisonements et Coordination de leurs Fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 10, 5-53.
- Godino, J. Gonzato, M. Cajaraville, J. & Fernández, T. (2012). Una aproximación ontosemiótica a la visualización en educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias*, 30(2), 109-130.
- Henríquez-Rivas, C. (2014). El trabajo geométrico de profesores en el tránsito de la geometría sintética a la analítica en el nivel secundario. Tesis para obtener el grado de Doctor en Didáctica de la Matemática. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile (no publicada).

- Henríquez-Rivas, C. & Montoya-Delgadillo, E. (2015). Espacios de trabajo geométrico sintético y analítico de profesores y su práctica en el aula. *Revista Enseñanza de las Ciencias*, 33(2), 51-70.
- Henríquez-Rivas, C. & Montoya-Delgadillo, E. (2016). El Trabajo Matemático de Profesores en el Tránsito de la Geometría Sintética a la Analítica en el Liceo. *Boletim de Educação Matemática*, 30(54), 45-66.
- Houdement, C. & Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 11, 175-193.
- Klein, F. (1908). *Matemática elemental desde un punto de vista superior: Geometría vol. 2*. Traducción de R. Fontanilla. Madrid, España: Biblioteca Matemática.
- Kuzniak, A. (2011). L'Espace de Travail Mathématique et ses Genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 16, 9-24.
- Kuzniak, A. & Richard, P. (2014). Spaces for Mathematical Work. Viewpoints and perspectives. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 17(4-I), 5-15.
- Montoya, E. Mena, A. & Mena, J. (2014). Circulaciones y génesis en el espacio de trabajo matemático. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 17(4-I), 191-210.
- Presmeg, N. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. En A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 205-235). UK: Sense Publishers.
- Radford, L. (2007). Semiótica cultural y cognición. En Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano* (pp. 669-689). México DF, México: Diaz de Santos-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.
- Yerushalmy, M., Shternberg, G., & Gilead, S. (1999). Visualization as a vehicle for meaningful problem solving in algebra. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd PME International Conference, 1*, 197-211.