ESTRUCTURAS DEDUCTIVAS Y TEXTOS MATEMÁTICOS UNIVERSITARIOS

Eduardo Mario Lacués Apud
Universidad Católica del Uruguay, Uruguay

Resumen: Para muchos estudiantes, los primeros cursos universitarios constituyen la ocasión de su encuentro con las demostraciones formales en Matemática, y las formas de razonamiento asociadas a ellas. Sin embargo, las estructuras deductivas subyacentes en ellas no suelen ser objeto de atención desde la enseñanza. En este trabajo se reporta el análisis realizado sobre la forma en que textos usuales en cursos universitarios iniciales tratan estructuras deductivas y procesos de demostración. Se seleccionaron dos textos de Cálculo y otros dos de Álgebra Lineal, y un tópico en cada uno de ellos (límite de una función en un punto en el primer caso, e independencia lineal de vectores, en el segundo) en ambos casos por la importancia conceptual del tema y por la naturaleza de su estructuración lógica. Se buscó detectar la eventual existencia de advertencias explícitas en los textos, que alertaran a los lectores acerca de las formas deductivas que estuvieran siendo utilizadas. Se encontraron pocas instancias de explicitación sobre este aspecto, lo que puede interpretarse como ausencia de intención para enseñarlas.

Estructuras deductivas, demostración, razonamiento, textos universitarios de matemática

INTRODUCCIÓN

Desde Euclides se ha concebido a la Matemática como una ciencia deductiva. Más allá de la evolución histórica que la noción de demostración ha ido teniendo, ésta resulta asociada con formas de razonamiento donde juegan un rol fundamental las estructuras lógicas que permiten la afirmación de ciertas sentencias a partir de otras.

Por eso, examinar cómo se presentan en la enseñanza las formas argumentales usuales en esta disciplina resulta de interés. En este trabajo se revisan algunos textos usuales en los cursos iniciales en la universidad (Cálculo y Álgebra Lineal), examinando de qué manera aparecen estas estructuras en el tratamiento de ciertos contenidos que resultan relevantes por su importancia dentro de la organización conceptual de la Matemática.

En la primera sección se presentan antecedentes acerca del objeto de este trabajo. En la segunda se revisa el tratamiento que dos textos de Cálculo dan a los aspectos lógicos de la definición de límite (presencia de cuantificadores, estructura condicional). En la tercera se hace lo propio con dos textos de Álgebra Lineal y la definición de independencia lineal de vectores. Se cierra con un análisis de los resultados de la indagación y reflexiones sobre cuestiones didácticas implicadas en ellos.

ANTECEDENTES

La necesidad de atender desde la enseñanza a los aspectos relacionados con las estructuras lógicas usadas en Matemática ha sido destacada por diferentes autores desde varias perspectivas. Durand-Guerrier (2008) ha señalado que los procesos de negación, implicación y cuantificación tiene una presencia preponderante en la noción de rigor matemático. Refiriéndose en particular a la enseñanza de Matemática en la universidad, ha abogado por la necesidad de abordar el tratamiento del Cálculo de Predicados y explicitar su rol en los procesos de demostración (Durand-Guerrier, 2005).

Experiencias como las descritas por Morou y Kalospyros (2011) o Hodds, Alcock e Inglis (2014) aportan intervenciones didácticas con esta finalidad, mientras que los trabajos de Inglis y Alcock (2012) y Mejía-Ramos, Fuller, Weber, Rhoads y Samkoff (2012) proporcionan elementos teóricos para diseñar estas.

REVISIÓN DE LOS TEXTOS DE CÁLCULO

Para este estudio se seleccionaron los textos de George Thomas (2015) y James Stewart (1999).

La elección de la definición de límite como elemento de análisis está motivada por su complejidad desde el punto de vista lógico y además, por su posición destacada en el currículo de Cálculo.

El texto de George Thomas

Para dar la definición en términos de *ε* y *δ*, se elige la siguiente formulación en la Sección 2.3:

> "Sea *f(x)* definida en un intervalo abierto alrededor de *c*, excepto posiblemente en *c* mismo. Decimos que el límite de *f(x)* cuando x se aproxima a *c* es el número *L*, y escribimos
>
> $$\operatorname*{Lim}_{x \to c} f(x) = L$$
>
> Si, para todo número $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ correspondiente, tal que, para toda x,
>
> $0 < |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - c| < \varepsilon$"[13] (Thomas, 2013, p. 60)

Es destacable la decisión de explicitar las instancias de cuantificación (universal para ε y x, existencial para δ) y la estructura condicional final. En los ejemplos que siguen a esta definición se presta especial atención a enfatizar este aspecto, ya sea a través de una representación gráfica o algebraica.

Esta intención se continúa desarrollando en los ejemplos, donde en particular aparece la propuesta de probar que un cierto número no es límite de una cierta función en un cierto punto. Este ejercicio conduce a la necesidad de negar una sentencia que incluye cuantificadores y una estructura condicional, lo que es desarrollado en detalle en el texto.

El texto de James Stewart

El texto de Stewart (1999) aborda la definición de límite, en la sección 2.2, mediante una introducción informal, expresada en lenguaje coloquial y basada en la noción de distancia entre números reales. La definición formal aparece en el apéndice D:

> "Sea *f* una función definida en algún intervalo abierto que contenga el número *a*, excepto posiblemente en *a* mismo. Entonces decimos que el límite de *f(x)* cuando *x* se aproxima a *a* es *L*, y escribimos
>
> $$\operatorname*{Lim}_{x \to a} f(x) = L$$
>
> Si para todo número $\varepsilon > 0$ hay un número $\delta > 0$ correspondiente tal que

[13] En todas las transcripciones textuales, cursivas y negritas figuran en el original.

Si $0 < |x - a| < \delta$ entonces $|f(x) - c| < \varepsilon$" (Stewart, 1999, p. A28)

Aunque aparece destacadas las cuantificaciones de ε y δ y la estructura condicional, no ocurre lo mismo con la de x. Por otro lado, no existen comentarios respecto a lo que significaría negar la definición, ni ejercicios o ejemplos en este sentido.

REVISIÓN DE LOS TEXTOS DE ÁLGEBRA LINEAL

Los textos de Álgebra Lineal revisados fueron los de David Poole (2004) y David Lay (2013).

Se eligió la definición de independencia lineal como contenido a analizar debido a que en su estructura aparecen instancias de cuantificación, ya sea existencial o universal, además de o bien una conjunción o bien un condicional, respectivamente.

El texto de David Poole

En la sección 6.2 se retoma la introducción a la noción de independencia lineal para espacios R^n dada en la sección 2.3 y define conjunto linealmente dependiente de la siguiente manera:

> "Un conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ de un espacio vectorial V es *linealmente dependiente* si existen escalares $c_1, c_2, \ldots, c_k$ *al menos uno de los cuales no sea 0*, tales que
>
> $$C_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_kv_k = o.$$
>
> Un conjunto de vectores que no es linealmente dependiente se dice que es *linealmente independiente*." (Poole, 2004, p. 443)

Se elige usar un cuantificador existencial ("…existen escalares $c_1, c_2, \ldots, c_k$…"); la última parte está constituida por la conjunción (significada con "tal que") de una disyunción ("al menos uno de los cuales no sea 0" expresa sintéticamente que $c_1 \neq 0$ o $c_2 \neq 0$ o … o $c_k \neq 0$) con la sentencia que afirma que la combinación lineal tenga como resultado el vector nulo ($c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{o}$).

A continuación de esta definición se plantea que "…$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ es linealmente independiente en un espacio vectorial V si y solo si $c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_k v_k = o$ implica que $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0$" (Poole, 2004, p.443).

Para justificar esta equivalencia con la definición dada, se opta por un razonamiento en el que se expresa que la dependencia lineal establece que el vector nulo puede ser expresado como una combinación lineal no trivial de los vectores del conjunto; por eso, la independencia lineal significa que el vector nulo puede expresarse como combinación lineal de esos vectores únicamente de la manera trivial. Esta explicación no pone en claro el proceso de negación de una sentencia con una estructura compleja como la descrita, que requiere la transformación del cuantificador existencial en uno universal y la conjunción en un condicional.

El texto de David Lay

En la sección 4.3 se vuelve sobre la definición dada para R^n en la sección 1.7 para decir que "Un conjunto indexado de vectores $\{v_1, \ldots, v_p\}$ es linealmente independiente si la ecuación vectorial $c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_pv_p = o$ tiene *solamente* la solución trivial $c_1 = 0 \ldots = c_k = 0$" (Lay, 2013, p. 226).

Se elige una aproximación a la definición diferente a la anterior, haciendo referencia a la estructura condicional a través del destaque de la palabra "*solamente*" pero no hay mención a la instancia de cuantificación implícita en que la ecuación vectorial puede ser cualquiera, y por lo tanto, cualesquiera pueden ser los escalares.

Continúa definiendo conjunto linealmente dependiente como aquel para la cual la ecuación vectorial dada admite al menos una solución no trivial. Con esto, tampoco se explicita el proceso de negación de las instancias de cuantificación ni de la sentencia condicional.

REFLEXIONES FINALES

En general, en los textos analizados se encuentra escasa evidencia de tratamiento explícito de los contenidos referidos a estructuras deductivas. Aunque en algunos casos se ponen de relieve las instancias de cuantificación, las estructuras lógicas implicadas (condicionales, conjunciones o disyunciones) y los procesos de negación no aparecen destacados.

Teniendo en cuenta que los textos tienen una influencia importante en las prácticas de los profesores, puede conjeturarse que tampoco en el aula aparezcan tareas cuyas consignas atiendan a la enseñanza de estructuras deductivas.

Éste es un punto que requiere ser estudiado. En ese sentido, observaciones de clases y revisión de los registros tomados por estudiantes en sus apuntes pueden ser fuentes de información.

Referencias

Durand-Guerrier, V. (2005). Natural deduction in predicate calculus a tool for analysing proof in a didactic perspective. *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 4)*, (págs. 409-419).

Durand-Guerrier, V. (2008). About logic, language and reasoning at the transition between French upper Secondary school and University. *ICME 11.*

Hodds, M. Alcock, L.Inglis, M. (2014). Self-Explanation Training Improves Proof Comprehension. *Journal For Research in Mathematics Education, 45*(1), 62-101.

Inglis, M., Alcock, L. (2012). Experts and Novices Approaches to Reading Mathematical Proofs. *Journal for Research in Mathematics Education, 43*(4), 358-390.

Lay, D. (2013). Álgebra lineal para cursos con enfoque por competencias. México: Pearson Education.

Mejía-Ramos, J. P., Fuller, E., Weber, K., Rhoads, K., & Samkoff, A. (2012). An assessment model for proof comprehension in undergraduate mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 79*(1), 3-18.

Morou, A., & Kalospyros, N. (2011). The role of logic in teaching, learning and analyzing proof. *Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 7).* Rzeszów.

Poole, D. (2004). *Álgebra Lineal Una introducción moderna*. México: Thomson.

Stewart, J. (1999). *Cálculo, conceptos y contextos.* México: International Thomson Editores.

Thomas, G. (2015). *Cálculo. Una variable.*