

## **INTERACCIÓN EN UN AULA DE GEOMETRÍA: CONSTRUCCIÓN COLECTIVA Y ESCRITURA AUTÓNOMA DE UNA DEMOSTRACIÓN**

**Óscar Molina**

**Universidad de los Lagos**

*Resumen: como resultado parcial de la más reciente investigación del grupo  $\mathcal{A}\cdot\mathcal{G}$  de la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia), cuyo objetivo consistió en involucrar a estudiantes de básica media y secundaria en el razonamiento científico en geometría, esta comunicación presenta diferencias entre su actividad cuando participan en interacciones colectivas y su escritura autónoma de demostraciones. Para analizar este fenómeno, se presenta un dispositivo analítico que articula marcos teóricos relativos a los intercambios instruccionales, normas sociomatemáticas y discurso reflexivo. Se ilustra la complejidad de la situación mediante un ejemplo de actuación exitosa que tuvo un estudiante durante la interacción colectiva, pero que no se vio reflejada por completo en su escritura autónoma de la demostración. Se discuten posibles causas de este hecho.*

Interacción, discurso reflexivo, contrato didáctico, norma sociomatemática, demostración

### **INTRODUCCIÓN**

Los educadores matemáticos tienen un desafío importante: lograr que los estudiantes comprendan el papel de la demostración en matemáticas (Hanna & de Villiers, 2012) y del razonamiento matemático como parte del razonamiento científico. En este sentido, el grupo Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría ( $\mathcal{A}\cdot\mathcal{G}$ ) de la Universidad Pedagógica Nacional (UPN), en el marco del proyecto<sup>14</sup>. *Geometría: Vía al Razonamiento Científico* diseñó e implementó una secuencia didáctica enfocada en buscar que los estudiantes (entre 14 y 15 años) de un curso de geometría de un colegio público ubicado en Bogotá-Colombia, se involucraran en una actividad demostrativa y, en esa vía, desarrollaran razonamiento científico. Análisis preliminares de los registros de información llamaron la atención acerca de las diferencias entre la participación de los estudiantes en las interacciones colectivas y su escritura autónoma de demostraciones. Este aspecto es el foco central de la comunicación; en consecuencia, se presenta un dispositivo analítico para estudiar este hecho. Una vía metodológica es abordar: i) el rol del discurso en el aula para apoyar el desarrollo matemático de los estudiantes (Cobb, Boufi, McClain, & Whitenack, 1997); y ii) el rol de la interacción en el aula, específicamente el papel de profesor (Jones & Herbst, 2012). Para esta comunicación, se ponen en juego estos aspectos para analizar dos sesiones de una clase de geometría: una, en la que se pretende que los estudiantes participen en la construcción colectiva de una demostración de un enunciado, y otra en la que parejas de estudiantes sin la compañía del profesor<sup>15</sup>, intentan escribir la demostración producida colectivamente. Para

---

<sup>14</sup> Financiado por el Centro de Investigaciones de la UPN y desarrollado durante 2015 y 2016. Agradezco la lectura previa de este documento a Carmen Samper, Leonor Camargo y Patricia Perry, integrantes del grupo de investigación.

<sup>15</sup> A la actividad en parejas, sin la compañía del profesor, le denominamos trabajo “autónomo”.

mostrar la complejidad de la situación, se presenta un ejemplo de actuación exitosa de un estudiante durante la interacción colectiva, que no se vio reflejada por completo en su escritura autónoma de la demostración, y se discuten posibles causas de este hecho.

## MARCO REFERENCIAL Y ANALÍTICO

Para abordar el asunto, se articularon tres referentes: conceptualización de *discurso reflexivo*<sup>16</sup> (Cobb, Boufi, McClain, & Whitenack, 1997), *norma sociomatemática* (Yackel & Cobb, 1996) e *intercambios instruccionales* (Jones & Herbst, 2012). Tales *intercambios* proveen una estructura útil para articular los demás elementos teóricos, pues se compone de tres elementos centrales que permiten analizar (o diseñar) una clase en la que se pretende construir una demostración (Jones & Herbst, 2012): contrato didáctico, actividad de clase en variadas escalas de tiempo y formas de intercambio. Dado el espacio limitado, no se describen en detalle tales elementos; se presenta parte de las relaciones que fueron establecidas entre ellos (Tabla 1), las cuales generaron un dispositivo para analizar la interacción en el aula. Las cláusulas (para profesor y estudiantes) del contrato didáctico y las respectivas normas sociomatemáticas descritas en la Tabla 1 se basan en las ideas de Martin, McCrone, Bower & Dindyal (2005) y Herbst (2006, en Jones & Herbst, 2012). Los tipos de discurso, que señalan cambios en el mismo, se toman de los indicadores para evaluar la comprensión de una demostración (Mejía-Ramos, Fuller, Weber, Rhoads & Samkoff, 2012; Molina, Samper & Perry, 2015).

FORMAS INSTRUCCIONALES	CONTRATO DIDÁCTICO		NORMAS SOCIOMATEMÁTICAS DE CLASE	TIPOS DE DISCURSO DE ESTUDIANTES
Negociación de Tareas Nuevas <sup>17</sup> (TN)	Profesor	Estudiante		
Construir conjuntamente (con participación de “todos”) una demostración de un hecho geométrico.	CDP <sub>1</sub> Debe favorecer la participación de los estudiantes mediante preguntas de indagación ( <i>por qué</i> ).	CDE <sub>1</sub> Debe argumentar sus afirmaciones en el marco del sistema teórico dado en la clase, <i>i.e.</i> , usando garantías provenientes de la geometría plana euclidiana.	NS <sub>1</sub> Toda afirmación debe argumentarse en el marco del sistema teórico (de la geometría euclidiana) dado en la clase.	D <sub>1</sub> Aluden explícitamente, a garantías teóricas para justificar afirmaciones. (C)
Situaciones de Instrucción <sup>18</sup> (SI)	CDP <sub>2</sub> Debe analizar los			

<sup>16</sup> Se caracteriza por un cambio de discurso (hacia uno matemático) producto de la discusión acerca de un objeto sobre el cual previamente se ha hablado o actuado.

<sup>17</sup> Toma lugar cuando se propone a los estudiantes tareas que son nuevas para ellos.

<sup>18</sup> Toman lugar cuando deben ser recordadas normas sociomatemáticas constituidas en la clase.

Proveer un formato para que estudiantes formulen por escrito, la demostración de un hecho geométrico.	argumentos de los estudiantes. CDE <sub>2</sub> Debe dar demostraciones de acuerdo a una cadena de argumentos válidos en las matemáticas. CDE <sub>3</sub> Debe responder toda indagación que se le haga.	NS <sub>2</sub> Una demostración es una cadena de razonamiento válida en las matemáticas.	D <sub>2</sub> Aluden a pasos estructurales de la demostración. (M) D <sub>3</sub> Aluden a pasos que posibilitan argumentos que soportan pasos estructurales. (L)
Actividad de clase en escalas de tiempo	De momento a momento		De Corto (C), Mediano (M) y Largo (L) plazo

Tabla 1. Relación entre formas de intercambio, contrato didáctico, normas sociomatemáticas y discursos<sup>19</sup>

## METODOLOGÍA Y CONTEXTO GENERAL DE LAS CLASES

Se realizó un experimento de enseñanza que pretendía que los estudiantes del curso citado se involucran en un ambiente de actividad demostrativa. El equipo de investigación diseñó e implementó una secuencia de problemas cuyo objeto de estudio se centró en las conexiones entre mediatriz y circunferencia a partir de la relación de equidistancia. La secuencia, que consistía de cuatro problemas, fue implementada por dos profesores del colegio, el titular del curso (P1) y una profesora (P2) que apoyó la actividad. Los estudiantes debían encontrar la solución de los problemas con el uso del software GeoGebra y reportarla a manera de conjetura (proposición condicional). Para este escrito, interesa la conjetura que se produjo a partir del segundo problema<sup>20</sup>, esta es: *Dados dos puntos A y B. Si A y B pertenecen a una circunferencia, entonces el centro C de esta pertenece a la mediatriz del segmento AB*. En la primera sesión de clase<sup>21</sup> (sesión 1), P1 y P2 lideraron la interacción para que entre “todos”, se dieran ideas para hacer la demostración de la conjetura. En la otra (sesión 2) por pareja de estudiantes se entregó una hoja con el enunciado de la conjetura y un formato a doble columna (Figura 1) en el cual ellos debían escribir la demostración “autónomamente”. Para recoger los datos de la investigación, las sesiones fueron grabadas en audio y video. Para la sesión 1 se hizo una transcripción completa de la interacción; para la sesión 2 se

<sup>19</sup> Los acrónimos (en negrilla) se usaron como códigos para analizar las interacciones de la clase.

<sup>20</sup> Su enunciado es el siguiente: Dados dos puntos A y B: i. ¿Existe una circunferencia que los contiene?; ii. ¿Existe otra? ¿Existen más?; iii. Con base en las respuestas dadas a los ítems i y ii, ¿dónde se encuentra el centro de la(s) circunferencia(s) que contiene(n) a los puntos A y B?

<sup>21</sup> Los elementos teóricos que conforman la demostración hacían parte del sistema teórico disponible en clase.

fotocopiaron las producciones de los estudiantes. Ambos registros (transcripción y fotocopias) se utilizaron para hacer el análisis a la luz de los elementos expuestos en la Tabla 1.

### UN EJEMPLO DE ANÁLISIS

Se toma parte de uno de los ocho fragmentos en que se dividió la sesión 1; estudiantes (I, J, E5, Varios) y P2 participan en la construcción colectiva de uno de los argumentos de la demostración ( $\overline{AC} \cong \overline{BC}$ ). La Tabla 2 presenta la transcripción de la interacción y el análisis de cada intervención.

P2	Tenemos que A y B pertenecen a la circunferencia, ¿Cierto?	[CDP <sub>3</sub> ] P2 procura recapitular lo hecho hasta el momento, con el fin encaminar la discusión; para este caso, busca precisar lo que permite justificar la congruencia en cuestión.
I, J	[Solo ellos asienten con la cabeza]	
P2	Como pertenecen ¿qué pasa?	[CDE <sub>3</sub> ] I y J responden las preguntas de P2
I, J	Son equidistantes de C	
P2	Por...	[CDP <sub>1</sub> ] Reitera la pregunta con el fin de corregir lo dicho por I, J.
Varios	Por definición de Circunferencia.	[CDE <sub>1</sub> ] Proveen una garantía solicitada. Actúan conforme a NS <sub>1</sub> .
P2	Y como son equidistantes ¿quiere decir que qué?	[CDP <sub>1</sub> ] Indaga por la conclusión que sigue luego de usar la garantía “definición de equidistancia”.
J	AC = BC	[CDE <sub>3</sub> ] Responde dando una conclusión válida. Actúa conforme a NS <sub>1</sub> .
P2	Tienen la misma medida, ¿Entonces?	Parafrasea lo dicho por J.
E5	Son congruentes	[CDE <sub>3</sub> ] Responde dando una conclusión válida. Actúa conforme a NS <sub>1</sub> .

Tabla 2. Transcripción y análisis.

La Figura 1 muestra parte de la producción escrita hecha por I en la sesión 2 y lo que se esperaba que reportara; nótese que, aunque alude a  $\overline{AC} \cong \overline{BC}$ , no presenta los pasos *finos* (*i.e.*, subcadenas deductivas que soportan pasos estructurales de la demostración) que permiten inferir tal relación (ver filas sombreadas). Con respecto a lo anterior se comentan tres asuntos: i) P2 busca reorientar a los estudiantes en la búsqueda de argumentos para justificar  $\overline{AC} \cong \overline{BC}$  (CDP<sub>3</sub>); aunque en la transcripción no está, ellos previamente aludieron a una garantía no válida (definición de radio). ii) Producto de la actividad de P2 (CDP<sub>1</sub> y CDP<sub>3</sub>) y su interacción con los alumnos, NS<sub>1</sub> se ha constituido en la clase; no solo I y J tienen un discurso (D<sub>1</sub>) acorde con dicha norma, también dos estudiantes más (se verificó la

hipótesis planteada). iii) NS<sub>2</sub> es parcialmente constituida, puesto que los estudiantes no actúan autónomamente acorde a ella; en la demostración, I reportó la cadena con pasos estructurales de la demostración (D<sub>2</sub>), pero no escribió en ella los pasos *finos* sombreados.

Garantía	Afirmación	Garantía
Dado	$A, B \in \odot_{C,r}$	Dado
Construcción Auxiliar [1]	$A, B$ equidistan de $C$	Def. circunferencia
Construcción Auxiliar [2]	$AC=BC$	Def. equidistancia
Construcción Auxiliar [1]	$\overline{AC} \cong \overline{BC}$	Def. congruencia
Definición de circunferencia [1]		

Figura 1. Parte de la demostración escrita por I, y la esperada por los profesores.

## ALGUNAS CONCLUSIONES

El dispositivo analítico permitió establecer que la hipótesis planteada se verifica parcialmente: en la demostración escrita hay evidencia de un cambio en el discurso en términos de D<sub>1</sub> y D<sub>2</sub> pero no en términos de D<sub>3</sub>. Posibles razones: i) NS<sub>2</sub> no se había constituido completamente como norma de clase; I reproduce la cadena deductiva estructural, pero no es consciente de la necesidad de pasos *finos* para completarla. ii) Salvo el fragmento ilustrado, no hubo otra ocasión para hacer una reflexión que llevara a la necesidad de pasos *finos* en una demostración; hizo falta involucrar a los estudiantes en más tareas que favorecieran la explicitación de tales pasos, asumiendo CDE<sub>2</sub> con mayor autonomía. Es razonable pensar que un *objeto de conocimiento a largo plazo* (Jones & Herbst, 2012) es la explicitación de pasos finos en una demostración.

## Referencias

- Cobb, P., Boufi, A., McClain, K. & Whitenack, J. (1997). Reflective discourse and collective reflection. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28, 258-277.
- Hanna, G. & de Villiers, M. (2012). *Proof and Proving in Mathematics Education*. New York: Springer.
- Jones, K. & Herbst, P. (2012). Proof, proving, and teacher-student interaction: theories and contexts. En G. Hanna & M. de Villiers, *Proof and Proving in Mathematics Education* (pp.261-278). New York: Springer.
- Martin, T., McCrone, S., Bower, M., & Dindyal, J. (2005). The interplay of teacher and student actions in the teaching and learning of geometric proof. *Educational Studies in Mathematics*, 60, 95-124.
- Mejia-Ramos, J.P., Fuller, E., Weber, K., Rhoads, K., & Samkoff, A. (2012). An assessment model for proof comprehension in undergraduate mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 79, 3-18.
- Molina, O., Samper, C., & Perry, P. (2015). Enunciado de un teorema: ¿Único componente de su significado? *Actas XIX Jornadas Nacionales de Educación Matemática: XIX JNEM 2015* (pp. 651-654). Villarrica, Chile: Pontificia Universidad Católica de Chile.
- Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27, 458-477.