ESTRUCTURAS MENTALES PARA UN ESQUEMA DE LA IMPLICACIÓN COMO ENTENDIMIENTO COMÚN

Isabel García-Martínez[1], Marcela Parraguez[2]
Universidad Católica del Norte[1], Pontificia Universidad Católica de Valparaíso[2]

Resumen: Como han reportado diversos autores, la implicación es un tópico que presenta dificultades en la comprensión por parte de los estudiantes. En este reporte se determinan componentes para un esquema (en el sentido de la teoría APOE) de la implicación como entendimiento común. Este último es uno de los cuatro tipos de sentencias condicionales considerados por Durand-Guerrier (2003). Como resultado, se destaca la importancia de que los estudiantes realicen actividades que incluyan frases contingentes, donde se considere como posibilidad "no se puede decir", para poder interiorizar acciones en procesos, en la implicación como entendimiento común.

Teoría APOE, esquema, implicación, entendimiento común

ANTECEDENTES Y PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Varios autores (Alvarado y González, 2009, 2013; Durand-Guerrier, 2003; Epp, 2003; Reid, 1992) han reportado que los estudiantes universitarios presentan dificultades con la comprensión de la implicación.

En García-Martínez y Parraguez (2015), se muestran dificultades de estudiantes universitarios cuando se enfrentan a actividades relacionadas con la implicación. Una de las preguntas que respondieron en la entrevista semiestructurada fue: "*Decida si la siguiente proposición es verdadera o falsa: Si hoy es viernes, entonces mañana es domingo*". En donde se evidencia que uno de los estudiantes entrevistados confunde el entendimiento común de la implicación (no considera el antecedente falso) con el uso en matemática (Figura 1).

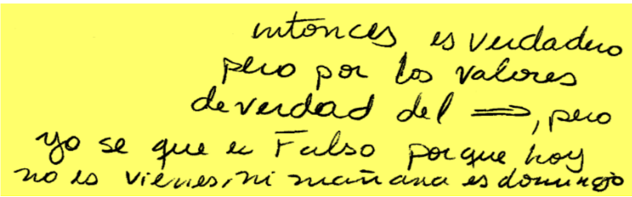


Figura 1: Respuesta dada por un estudiante universitario (García-Martínez y Parraguez, 2015).

Por otro lado, Durand-Guerrier (2003) en su artículo sobre *¿qué noción de implicación es la correcta?,* sostiene que las dificultades que presentan los estudiantes en la comprensión de la implicación, están relacionadas con la complejidad de esta noción debido a sus diferentes aspectos. En dicho artículo la autora considera los cuatro tipos de sentencias condicionales dados por Quine (1950).

El entendimiento común (donde, en general, el antecedente falso no se considera).

El conectivo proposicional (definido mediante la tabla de verdad).

El condicional lógicamente válido (reglas de inferencia).

El condicional generalizado (implicación con cuantificador universal).

En este reporte, se presenta un análisis del primero de estos cuatro tipos de sentencias, con base en una teoría de la Didáctica de la Matemática –teoría APOE–, de corte cognitivo, que permite explicar cómo se construye el conocimiento inserto en el entendimiento común de la implicación.

Teoría APOE

Esta teoría está basada en la construcción del conocimiento dada por Piaget (Arnon et al., 2014). A través de ella se explica el aprendizaje de conceptos matemáticos mediante las estructuras mentales: acciones, procesos, objetos y esquemas, que dan origen a su nombre. Un esquema es una estructura coherente de acciones, procesos y objetos relacionados con un concepto matemático determinado. Los mecanismos mentales permiten pasar de un estado de construcción de un concepto matemático a otro, entre ellos se destacan: interiorización, coordinación, encapsulación y desencapsulación.

El objetivo general de investigación fue describir elementos para un esquema de la implicación como entendimiento común.

Diseño metodológico

Esta investigación está situada en el paradigma interpretativo, en el cual se ha considerado la metodología estudio de casos (Stake, 2010), para indagar en profundidad una realidad específica de cómo los estudiantes conciben la implicación como entendimiento común. El único caso de estudio está constituido por cinco estudiantes de pedagogía en matemáticas de una universidad chilena, a los cuales se les aplicó un cuestionario con dos actividades (Tabla 1).

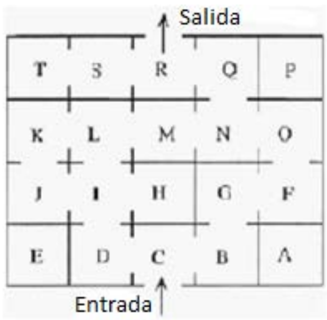
Números primos	Laberinto
Determine el universo más grande dentro de los números enteros desde 1 hasta 20, para el cual la siguiente implicación es verdadera: “si n es un número par, entonces n+1 es un número primo”.	Una persona llamada X logró pasar a través del siguiente laberinto (desde *Entada* hasta *Salida*) sin utilizar la misma puerta (abertura) dos veces.  Se pueden formular frases pertinentes a la situación. Para algunas de estas frases, podemos determinar un valor de verdad (VERDADERO o FALSO); para otras, no tenemos suficiente información para decidir si son verdaderas o no (en ese caso, responda NO SE PUEDE DECIR). De esta forma, analice cada una de las siguientes seis frases (justificando sus respuestas): 1- X cruzó P; 2- X cruzó N; 3- X cruzó M; 4- Si X cruzó O, entonces X cruzó F; 5- Si X cruzó K, entonces X cruzó L; 6- Si X cruzó L, entonces X cruzó K.

Tabla 1: Actividades del cuestionario. (Durand-Guerrier, 2003, pp. 6-8).

Estructuras mentales para un esquema de la implicación como entendimiento común

Los resultados de la medición, muestran elementos que permiten consolidar un esquema de la implicación como entendimiento común. Específicamente, en las respuestas de los estudiantes se pueden reconocer diferentes elementos, que permiten interpretarlos desde las estructuras mentales de la teoría APOE, como se muestra a continuación.

Estado de construcción acción de la implicación como entendimiento común

Temporalidad. Evidenciada cuando el antecedente sucede antes del consecuente (Figura 2).

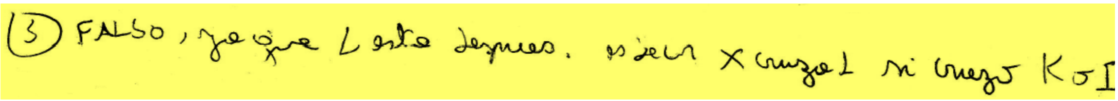

(3) FALSO, ya que L esta despues. es decir X cruzo L ni cruzo K o I

Figura 2: Respuesta de E3 a la pregunta del laberinto.

Antecedente siempre verdadero. Considera solamente el caso en el cual el antecedente es verdadero (Figura 3).

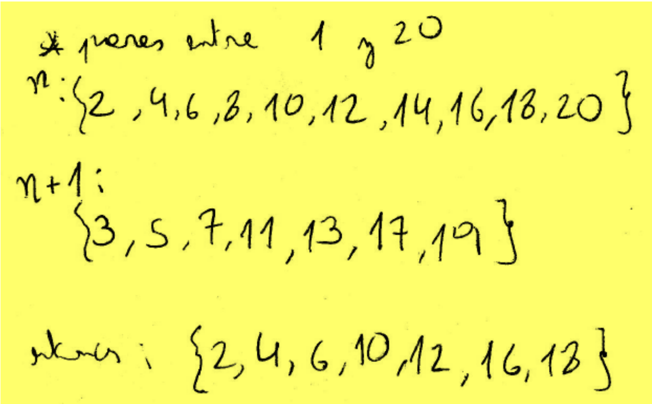

* pares entre 1 y 20
n: {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20}
n+1:
{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19}
[illegible]: {2, 4, 6, 10, 12, 16, 18}

Figura 3: Respuesta de E3 a la pregunta de los números primos.

Frase cuantificada. Evidenciada al considerar la frase cuantificada (Figura 4).

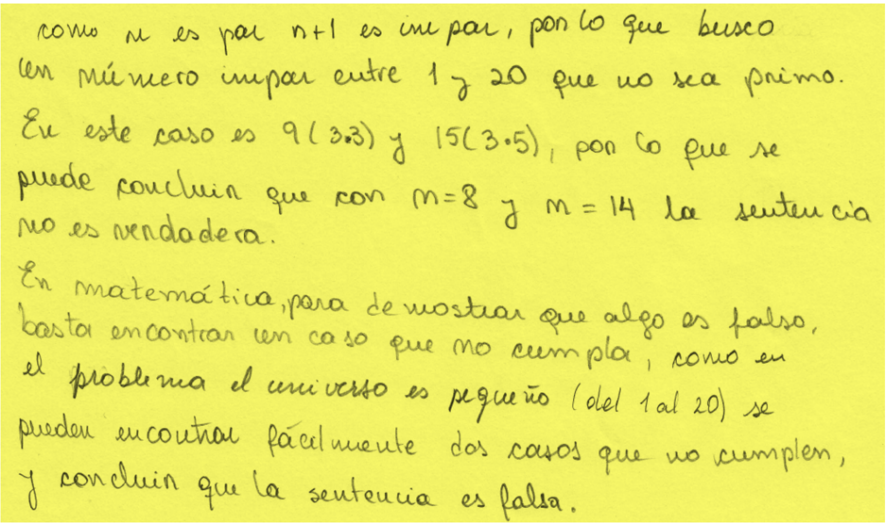

como n es par n+1 es impar, por lo que busco un número impar entre 1 y 20 que no sea primo.
En este caso es 9 (3·3) y 15 (3·5), por lo que se puede concluir que con m=8 y m = 14 la sentencia no es verdadera.
En matemática, para demostrar que algo es falso, basta encontrar un caso que no cumpla, como en el problema el universo es pequeño (del 1 al 20) se pueden encontrar fácilmente dos casos que no cumplen, y concluir que la sentencia es falsa.

Figura 4: Respuesta de E2 a la pregunta de los números primos.

Además se evidenció que 3 de los 5 estudiantes no consideran que el antecedente de una implicación pueda ser falso, en el problema de los números primos; sin embargo cuando se les otorga la posibilidad de respuesta "no se puede decir", responden correctamente la pregunta.

COMENTARIOS FINALES

El estudiante podrá mostrar una construcción proceso de la implicación como entendimiento común, cuando al enfrentar una actividad constituida por frases contingentes, interpretadas éstas desde la teoría como acciones; las interioriza a través de la búsqueda de conjuntos específicos para los cuales la proposición abierta sea verdadera y otros para los cuales sea falsa.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el Proyecto FONDECYT Nº 1140801. Una de las autoras es Beneficiaria Beca Postgrado PUCV 2016. Las autoras manifiestan sus agradecimientos por la buena disposición de todos los participantes en la investigación.

Referencias

Alvarado, A. y González, M. (2009). La implicación lógica en el proceso de demostración matemática: estudio de un caso. *Enseñanza de las Ciencias, 28* (1), 73-84.

Alvarado, A. y González, M. (2013). Generación interactiva del conocimiento para iniciarse en el manejo de implicaciones lógicas. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 16* (1), 37-63.

Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS Theory. A framework for research and curriculum development in mathematics education.* New York: Springer.

Durand-Guerrier, V. (2003). Which notion of implication is the right one? From logical considerations to a didactic perspective. *Educational Studies in mathematics, 53* (1), 5-34.

Epp, S. (2003). The role of logic in teaching proof. *American Mathematical Monthly 110*, 886-899.

García-Martínez, I. y Parraguez, M. (2015). Validación de una descomposición genética del concepto de inducción matemática. En C. Vásquez, H. Rivas, N. Pincheira, F. Rojas, H. Solar, E. Chandía y M. Parraguez (eds.). *Jornadas Nacionales de Educación Matemática XIX* (pp. 277-283). Villarrica: SOCHIEM.

Quine, W.V.O. (1950), *Methods of Logic*. New York: Holt, Rinehart and Winston.

Reid, D. (1992). *Mathematical induction. An epistemological study with consequences for teaching.* (Thesis for the degree of Master of Teaching Mathematics). Montreal: Concordia University.

Stake, R. (2010). Investigación con estudio de casos. Madrid: Morata.