REVISTA EMA
2005, VOL. 10, Nº 2, - VOL. 10, Nº 3, 328-353

LA FUERZA DE LA ASERCIÓN Y EL PODER PERSUASIVO EN LA ARGUMENTACIÓN EN MATEMÁTICAS

MATTHEW INGLIS Y JUAN PABLO MEJÍA-RAMOS

El análisis de la construcción y evaluación de argumentos en matemáticas se ha convertido en una parte importante de la investigación en Educación Matemática a nivel universitario. En este artículo notamos que hasta el momento este análisis se ha hecho desde una perspectiva restringida que se concentra en argumentos construidos para eliminar toda duda en torno a una conjetura. Discutimos una perspectiva más amplia de la argumentación en matemáticas, que toma en consideración las distintas maneras por medio de las cuales tanto estudiantes como matemáticos califican sus conclusiones y se sienten persuadidos por argumentos en matemáticas. Esta perspectiva esta basada en el esquema de argumentación propuesto por Toulmin (1958) y permite analizar argumentos construidos para ***reducir*** *el nivel de incertidumbre asociado a una conjetura, al mismo tiempo que permite el análisis de distintos tipos de persuasión en la evaluación de argumentos en matemáticas.*

The analysis of the production and validation of arguments in mathematics has become an important part of research in undergraduate mathematics education. In this paper we note that until now this analysis has been done from a restricted perspective that focuses on arguments produced to remove uncertainty in a conjecture. We discuss a broader perspective of argumentation in mathematics, one that takes into account the distinct ways in which students and mathematicians both qualify their conclusions and feel persuaded by arguments in mathematics. This perspective is based on Toulmin's (1958) argumentation squeme and allows an analysis of arguments produced to reduce uncertainty (arguments in which conclusions are qualified in a non-absolute way), at the same time that it allows an analysis of distinct types of persuasion in the evaluation of mathematical arguments.

Palabras claves: argumentación, demostración, prueba, Toulmin, persuasión, convicción.

El análisis de la construcción y evaluación de argumentos por parte de estudiantes y matemáticos es central en la investigación de la Educación Matemática a nivel universitario. Harel y Sowder (1998), por ejemplo, fundamentaron su influyente marco de *esquemas de prueba* en los tipos de argumentos que estudiantes construyen no sólo para convencerse ellos mismos, sino para persuadir a otras personas de la verdad de una conjetura. El *esquema de prueba* de un estudiante determinado (en un momento determinado) es definido entonces como aquello que utiliza ese estudiante para *eliminar* sus propias dudas, y las dudas de otras personas, con respecto a la veracidad de una conjetura dada. Otros autores, también basados en el análisis de la construcción y evaluación de argumentos en matemáticas, han sugerido que estos dos procesos pueden estar desasociados: que los tipos de argumentos que estudiantes encuentran personalmente convincentes pueden diferir de aquellos tipos de argumentos que usarían para persuadir a otras personas tales como sus profesores de matemáticas (Healy & Hoyles, 2000; Segal, 1999; Raman, 2002).

En este artículo argumentamos que tanto la construcción como la evaluación de argumentos en matemáticas son procesos más complicados que lo propuesto hasta el momento. Primero, discutimos cómo, durante el proceso de construcción de demostraciones matemáticas, tanto estudiantes como matemáticos construyen argumentos con conclusiones no absolutas, destinados a *reducir* su nivel de incertidumbre, y no necesariamente *eliminar* toda duda, en torno a la veracidad de una observación determinada. Segundo, con respecto a la evaluación de argumentos en matemáticas, indicamos que hay al menos cuatro interpretaciones distintas que un participante puede hacer cuando se le pregunta qué tan persuasivo encuentra un argumento matemático.

EL MODELO ARGUMENTATIVO DE TOULMIN

La perspectiva de argumentación en matemáticas que presentamos en este artículo esta basada en el modelo argumentativo propuesto por Toulmin (1958). Toulmin propuso una manera de analizar argumentos que difería drásticamente del modelo clásico de la lógica formal. A Toulmin lo inquietaba menos la validez lógica de un argumento, y lo preocupaban más su estructura y su contenido semántico. De hecho, esto llevó a uno de sus contemporáneos a describir *The Uses of Arguments* como "el libro anti-lógica de Toulmin" (descripción reportada por Toulmin, 2001; nuestra traducción). Así, esta forma de analizar argumentos se ha llegado a conocer como 'lógica informal'.

El modelo de Toulmin esta conformado por seis tipos de declaraciones, cada uno de los cuales cumple un papel diferente en el argumento. La *aserción* (A) es la tesis que defiende quien argumenta. La *evidencia* (E) es la información en la cual se basa la aserción. La *garantía* (G) justifica la conexión entre evidencia y aserción haciendo referencia, por ejemplo, a una regla, una definición, o por medio de una analogía[1]. La garantía es apoyada por el *soporte* (S) a través de nueva evidencia. El *calificativo modal* (C) especifica la fuerza de la aserción, expresando el grado de confianza en la tesis; y la *refutación* (R) presenta las excepciones de la aserción, aquellas condiciones bajo las cuales no es posible sostener la tesis del argumento. Es importante destacar que, en cualquier argumento dado, no todos estos tipos de declaraciones son necesariamente verbalizados de manera explícita. Estos seis componentes de un argumento están conectados en la estructura que aparece en la Figura Nº 1.

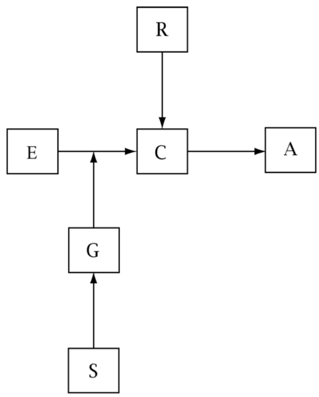

Figura Nº 1. El esquema del modelo argumentativo de Toulmin (1958), mostrando la evidencia (E), la garantía (G), el soporte (S), el calificativo modal (C), la refutación (R), y la aserción (A)

En su obra original, Toulmin (1958) sugirió que las matemáticas formales conformaban uno de los pocos dominios en los cuales la lógica formal -el sistema contra el cual estaba reaccionando- describía adecuadamente las estructuras de argumentación. Sin embargo, en una obra posterior, Toulmin, Rieke y Janik (1984) usaron el esquema introducido por Toulmin (1958) para modelar un argumento matemático formal. Recientemente se han dis-

1. Toulmin (1958) utiliza el término 'garantía' de una manera distinta a como ha sido utilizado por algunos autores en Educación Matemática. Por ejemplo, para Rodd (2000) las garantías eliminan toda duda sobre la veracidad de una observación, mientras que Toulmin es más flexible y acepta que una garantía, acompañada de un calificativo modal no absoluto, puede ser propuesta simplemente para reducir el nivel de incertidumbre de una persona con respecto a una aserción.

cutido nuevos ejemplos de la aplicación de lógica informal al análisis de este tipo de argumentos (e.g. Aberdein, 2005, 2006).

A continuación ilustramos la aplicación del modelo de Toulmin en el análisis de dos argumentos. El primero es ficticio y alude a la fiabilidad del horario de un bus; el segundo es un argumento heurístico publicado por Gowers (2006), en el cual se hace referencia a la conjetura de que, en algún lugar de la expansión decimal de π, hay un millón de sietes consecutivos. Nos referiremos a estos dos argumentos a lo largo del artículo.

Tomando el bus al aeropuerto

> Las últimas tres veces que he viajado en bus, he llegado varias horas tarde. Así que, sé con certeza que cuando vaya al aeropuerto mañana, el bus llegará tarde.

En este ejemplo, quien argumenta sugiere que el bus al aeropuerto llegará tarde (A), dado que las últimas tres veces que ha usado este medio de transporte ha llegado tarde a su destino (E). Una justificación, implícita, es que si el bus llega tarde tres veces consecutivas, entonces llegará tarde una cuarta vez (G); y esto es a su vez justificado, de nuevo implícitamente, por la creencia que eventos en el pasado son buenos guías de eventos en el futuro (S). En este caso, quien argumenta cree que su conclusión es cierta con toda seguridad (C), y no sugiere forma alguna de refutarla (R). Este argumento se muestra gráficamente, usando el modelo de Toulmin, en la Figura Nº 2.

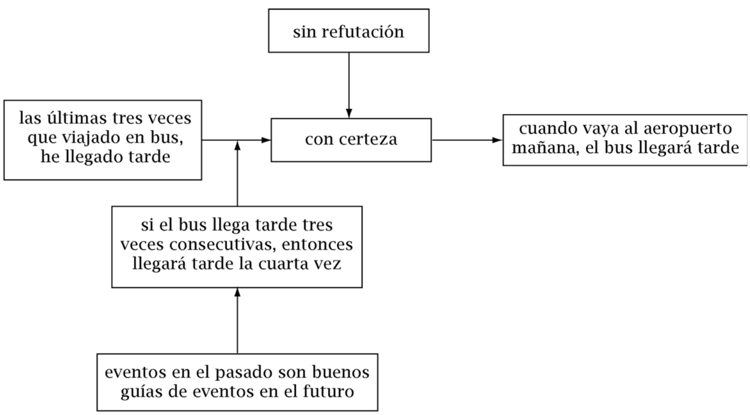

Figura Nº 2. Argumento del bus al aeropuerto modelado utilizando el esquema de Toulmin (1958), infiriendo los componentes de la garantía, el soporte, y la refutación

Sietes en π

Aserción: Hay un millón de sietes consecutivos en algún lugar de la expansión decimal de π.

> Toda la evidencia disponible apunta a que no hay nada muy sistemático en la sucesión de dígitos de π. En efecto, parecen comportarse como lo harían si uno simplemente escogiera al azar una sucesión de dígitos entre 0 y 9. Esta corazonada suena vaga, pero puede hacerse precisa de la siguiente manera: hay varias pruebas que estadísticos hacen a sucesiones para ver si es probable que éstas hayan sido generadas de manera aleatoria, y parece que las sucesiones de dígitos de π pasarían estas pruebas. Ciertamente los primeros millones de dígitos pasan estas pruebas. Una prueba obvia consiste en ver si cualquier sucesión corta de dígitos, como 137, ocurre en último término con aproximadamente la frecuencia correcta. En el caso de la cadena 137 uno esperaría que apareciese cerca de la 1/1000 parte del tiempo en la expansión decimal de π.
> Nuestra experiencia sugiere que sucesiones cortas en la expansión decimal de aquellos números irracionales que aparecen en la naturaleza, tales como π, e, sqrt(2), ocurren con las frecuencias correctas. Y si esto es así, entonces esperaríamos un millón de sietes en la expansión decimal de π cerca de la $10^{-1000000}$ parte del tiempo —y por supuesto, no nos sorprende que nosotros nunca podremos verificar eso directamente. Sin embargo, el argumento de que en efecto ocurre eventualmente, aunque no es una prueba, es bastante convincente.

Este argumento es más complejo que el anterior, e identificamos en él dos etapas. En la primera de ellas, Gowers (2006) concluye que es muy probable (C) que π sea normal (A), dado que los primeros millones de sus dígitos pasan varias pruebas estadísticas de normalidad (E). Esto es justificado notando que si una muestra grande de una cadena infinita de dígitos pasa varios tests de normalidad, esa cadena es probablemente normal (G). Podríamos inferir que esta última sentencia es respaldada por propiedades de esas pruebas estadísticas (S). Finalmente, en la calificación de la aserción como probable está implícita la consideración de la posibilidad, por pequeña que sea, de que π no pase dichas pruebas estadísticas al considerar suficientes dígitos de su expansión decimal (R). En la segunda etapa del argumento, se concluye que, asumiendo su normalidad (E), la expansión decimal de π tendría una sucesión de un millón de sietes consecutivos (A). Esto se justifica destacando que dicha sucesión aparece la $10^{-1000000}$ parte del tiempo (G) en un número normal, lo cual a su vez es justificado (implícitamente) por las propiedades de normalidad. En esta segunda etapa, la conclusión es dada con toda seguridad

(C), y no se sugiere forma alguna de refutarla (R). Estas dos etapas se muestran gráficamente, usando el modelo de Toulmin, en la Figura Nº 3.

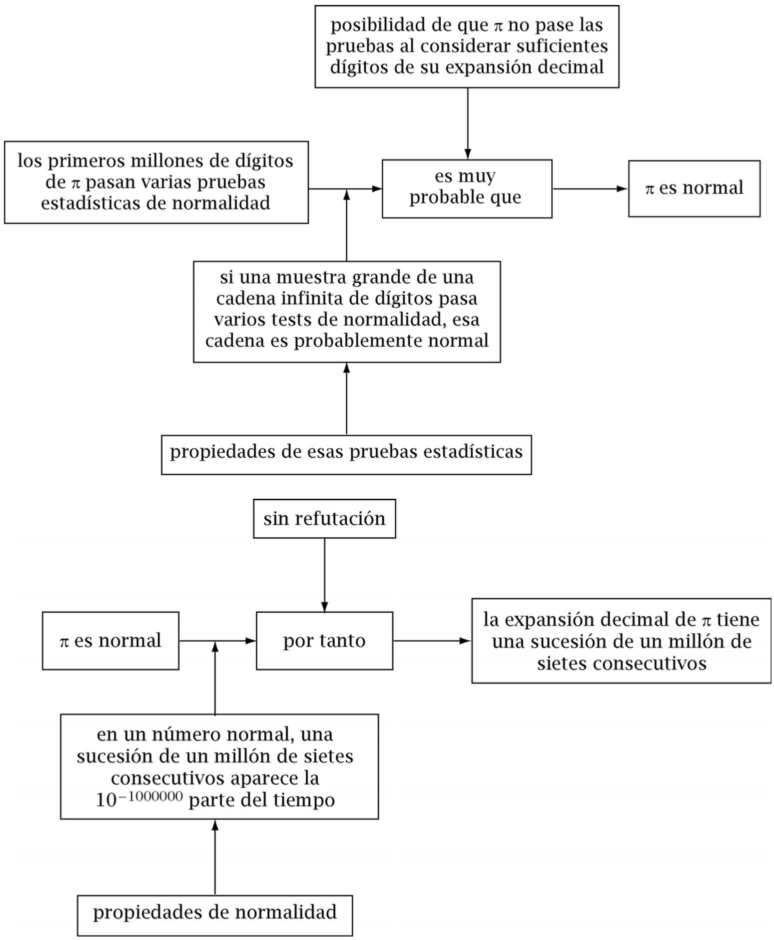

Figura Nº 3. Las dos etapas del argumento de Gowers (2006) modelado utilizando el esquema de Toulmin (1958), infiriendo los componentes del soporte y la refutación. (Se dice que un número es normal si sus dígitos muestran una distribución aleatoria).

LA FUERZA DE LA ASERCIÓN

En el campo de Educación Matemática, Krummheuer (1995) usó por primera vez el modelo de Toulmin para analizar argumentos que surgen en la clase de matemáticas. Sin embargo, él aplicó una versión reducida del modelo original, omitiendo el uso de la refutación y el calificativo modal. Aunque esta versión acortada del modelo puede haber sido suficiente para proveer el nivel de análisis que Krummheuer deseaba, no es claro de qué manera se puede justificar esta omisión en un marco conceptual que él mismo consideraba orientado hacia la reconstrucción del tipo de argumentación que puede carecer de conclusiones absolutamente necesarias.

La mayoría de investigadores posteriores parecen haber seguido a Krummheuer al usar esta versión reducida del modelo de Toulmin. Este enfoque ha sido adoptado, entre otros, por investigadores que han estudiado habilidades numéricas básicas (Evens y Houssart, 2004), deducción lógica (Hoyles y Kuchemann, 2002; Weber y Alcock, 2005), geometría (Knipping, 2003; Pedemonte, 2005; Pedemonte, en prensa), y prueba matemática en general (Yackel, 2001). En efecto, esta posición parece haberse enraizado en la investigación sobre prueba en Educación Matemática, de tal manera que, en su reciente revisión del campo, Mariotti (2006) se refiere al esquema de Toulmin como un "modelo ternario".

Inglis, Mejia-Ramos, y Simpson (en prensa) argumentaron que únicamente utilizando el esquema de Toulmin en su *totalidad* (en particular, haciendo uso del calificativo modal y la refutación), es posible modelar fielmente todo el rango de argumentación en matemáticas. Por ejemplo, el argumento de Timothy Gowers sobre la expansión decimal de π usa calificativos modales tales como: "*parecen* comportarse", "*parece* que las sucesiones", "es *bastante* convincente". Modelar este argumento utilizando una versión reducida del esquema de Toulmin, una versión sin calificativo modal y refutación, no sólo no podría capturar la naturaleza del argumento de Gowers, sino que produciría el modelo de un argumento sustancialmente distinto, en el cual toda aserción es presentada de manera absoluta.

Inglis et al. (en prensa) encontraron que el uso de calificativos modales no absolutos está lejos de ser una práctica inusual en la argumentación en matemáticas universitarias. Ellos invitaron a investigadores matemáticos a participar en un estudio en el cual debían decidir si una serie de conjeturas dadas eran ciertas o falsas, y justificar sus respuestas con demostraciones matemáticas. Encontraron que estos matemáticos construían con frecuencia argumentos con justificaciones no deductivas con el objetivo de *reducir*, y no necesariamente *eliminar por completo*, su nivel de incertidumbre con respecto a la veracidad de una conjetura. Inglis et al. advirtieron que era imposible modelar fielmente estos argumentos sin incorporar la parte del calificativo modal en el esquema de Toulmin (1958).

Además de observar que los matemáticos utilizan argumentos informales al desarrollar sus ideas, lo cual ha sido discutido por otros autores (e.g. Burton, 2004; Hadamard, 1945; Poincaré, 1905; Thurston, 1994), Inglis et al. (en prensa) clasificaron estos argumentos, sugirieron una manera de analizarlos utilizando el modelo argumentativo de Toulmin, y discutieron posibles diferencias en el uso de argumentos informales por parte de matemáticos expertos y novatos. Con respecto a estas diferencias, Inglis et al. destacaron que el uso de argumentos informales es común tanto en expertos como en novatos, pero difiere en la fuerza concedida a conclusiones alcanzadas por medio de justificaciones no deductivas. En términos del modelo argumentativo de Toulmin, Inglis et al. demostraron que aunque los matemáticos en su estudio usaron garantías de tipo inductivo e intuitivo, lo hicieron asociándolas a calificativos modales no absolutos, reconociendo las posibles refutaciones asociadas a estos tipos de razonamiento. Asimismo, Inglis et al. ilustraron cómo estudiantes novatos llegan a construir argumentos asociando garantías no deductivas a calificativos modales absolutos, e incluso asociando garantías deductivas a calificativos modales no absolutos.

Así, Inglis et al. (en prensa) adoptaron una perspectiva de la argumentación en matemáticas que incluye toda una variedad de argumentos informales que surgen en la exploración de ideas y conjeturas en matemáticas. Esta perspectiva es más amplia que la adoptada hasta el momento por investigadores en Educación Matemática, requiere el uso del modelo argumentativo de Toulmin *en su totalidad*, y tiene importantes implicaciones teóricas y metodológicas para la investigación en argumentación/prueba en Educación Matemática.

Algunas implicaciones teóricas y metodológicas

Varios investigadores han propuesto marcos teóricos para discutir los tipos de argumentos construidos por estudiantes para persuadir a otras personas y convencerse a sí mismos de la veracidad de una conjetura en matemáticas. Entre ellos sobresale el influyente marco de *esquemas de prueba*, propuesto por Harel y Sowder (1998).

Aunque la noción de *esquema de prueba* está definida en términos de lo que un estudiante determinado (en un momento dado) encuentra convincente y persuasivo, ampliando de esta manera las perspectivas platónico-formales de prueba matemática, este marco teórico adopta una interpretación restrictiva de las nociones fundamentales de convicción y persuasión. De esta manera, el marco teórico de Harel y Sowder se refiere únicamente a aquellos argumentos utilizados por un estudiante para *eliminar* sus dudas (las propias y las de su audiencia) en torno a la veracidad de una conjetura dada. En términos del modelo argumentativo de Toulmin, el marco de *esquemas de prueba* está definido para considerar únicamente aquellos argumentos con un calificativo modal absoluto. Por supuesto, este enfoque dejaría fuera el argumento de Timothy Gowers sobre la expansión decimal de π, y la mayoría de aquellos argumentos construidos por matemáticos y reportados por Inglis et al. (en prensa). Ciertamente, estaríamos de acuerdo en que esos argumentos no son representativos de los *esquemas de prueba* de Timothy Gowers (o de los demás matemáticos); es claro que esos argumentos no *eliminan* sus dudas acerca de la veracidad de las conjeturas en cuestión. Sin embargo, como es reportado por Inglis et al, al ser calificados de una manera no absoluta, estos argumentos informales cumplen un papel fundamental en la argumentación en matemáticas, y por lo tanto deben ser tenidos en cuenta por cualquier marco teórico diseñado para modelar argumentos en matemáticas.

Una preocupación más seria concierne al análisis de argumentos realizado desde una perspectiva que no tiene en cuenta la diversidad de calificativos modales utilizados en la argumentación en matemáticas. Así como consideramos imposible modelar fielmente el argumento de Timothy Gowers haciendo caso omiso de sus calificativos no absolutos, encontramos cuestionables algunos análisis de argumentos de estudiantes realizados por investigadores que trabajan desde una perspectiva reducida de la argumentación, una perspectiva enfocada en argumentos con conclusiones absolutas.

Varios investigadores han encontrado que muchos estudiantes usan ejemplos particulares para convencerse de la veracidad de una proposición general. Se ha encontrado que el uso de este tipo de evidencia empírica es común, en un rango amplio de tópicos en matemáticas, entre estudiantes de secundaria (Porteous, 1990; Coe y Ruthven, 1994; Edwards, 1998; Healy y Hoyles, 2000), profesores de colegio (Knuth, 2002), y estudiantes universitarios (Moore, 1994; Goetting, 1995; Recio y Godino, 2001). Por ejemplo, Recio y Godino (2001) reportan que un estudiante escribió lo siguiente cuando se le pidió que demostrara que la diferencia entre los cuadrados de dos números naturales consecutivos es siempre un número impar, igual a la suma de esos números:

$36 - 25 = 6 + 5$
$11 = 11$

Tenemos

$49 - 36 = 7 + 6$
$13 = 13$

> Tenemos A^2 - B^2 = A + B" (Recio y Godino, 2001, p. 86, nuestra traducción).

Recio y Godino describieron la respuesta de este estudiante de la siguiente manera: "el estudiante comprueba la proposición con ejemplos, y asevera su validez general".

Desde la perspectiva adoptada por Inglis et al. (en prensa), la respuesta de este estudiante puede ser examinada de una manera más profunda. Utilizando los seis componentes del esquema de Toulmin obtenemos el siguiente análisis del argumento:

- Evidencia: 36 - 25 = 6 + 5 y 49 - 36 = 7 + 6.
- Garantía: no declarada.
- Soporte: no declarado.
- Calificativo modal: no declarado.
- Refutación: no declarada.
- Aserción: $A^2 - B^2 = A + B$.

Así, basado en la evidencia empírica de dos ejemplos, este estudiante afirma que $A^2 - B^2 = A + B$. Sin embargo, las otras partes del argumento —incluyendo, crucialmente, el calificativo modal— no han sido verbalizadas. En su análisis de datos Recio y Godino *infirieron* que el argumento del estudiante presentaba un calificativo absoluto, y lo categorizaron como una prueba empírica. En comparación, al enfrentarse a la conjetura de que todo divisor de un número deficiente es deficiente, uno de los entrevistados por Inglis et al. consideró el caso del número 10, y encontrando que sus divisores 2 y 5 son deficientes, concluyó:

> Sí, pues aparentemente funciona aquí. Sí ok, pues aparentemente, a mí me parece que es cierto. (Inglis et al., en prensa, nuestra traducción).

En este caso, el entrevistado argumentó que la conjetura era cierta y, usando un calificativo no absoluto, dijo que a él *le parecía* verdadera. En el momento de la entrevista, este participante estaba en su último año de doctorado en análisis funcional, en un departamento de matemáticas que ha sido clasificado entre los mejores del Reino Unido: este entrevistado no puede ser considerado matemáticamente ingenuo. Sin embargo, al igual que el estudiante entrevistado por Recio y Godino, este estudiante de doctorado parece haber reducido su nivel de incertidumbre utilizando una versión de lo que Balacheff (1988) llama empiricismo ingenuo. Es posible que el participante de Recio y Godino haya usado un calificativo modal similar al utilizado por el matemático entrevistado por Inglis et al. Nosotros no lo sabemos, pero tampoco lo saben Recio y Godino, ya que dicho calificativo modal no está explícito en la respuesta del estudiante.

En ocasiones, algunos investigadores en Educación Matemática han incluso ignorado calificativos modales *explícitamente* verbalizados por participantes en sus estudios. Por ejemplo, en su análisis del uso de ejemplos en tareas de prueba matemática, Coe y Ruthven (1994) hicieron caso omiso de un calificativo no absoluto que había sido claramente verbalizado por uno de sus participantes. Bill, un estudiante de 17 años de edad, comprobó que una sentencia dada era cierta en seis casos particulares y declaró que "no había peligro en hacer una conjetura" al respecto. Influido por la insistencia del entrevistador, Bill estimó que tenía un "porcentaje de certeza" superior a noventa. A pesar de este uso *explícito* de un calificativo modal no absoluto, Coe y Ruthven escribieron que Bill "parece haber adquirido *certeza* solamente comprobando un número de casos relativamente pequeño" (p.50, nuestro énfasis y traducción).

Los peligros metodológicos de adoptar una perspectiva reducida de la argumentación en matemáticas (una perspectiva desde la cual una persona está únicamente 100% convencida o 0% convencida de su conclusión), pueden apreciarse claramente en el análisis de Coe y Ruthven (1994). Trabajando desde tal perspectiva, el calificativo modal utilizado por Bill, el cual era alto, pero no absoluto, fue analizado como absoluto. Consecuentemente, un argumento moderadamente normativo —conforme al comportamiento de los expertos estudiados por Inglis et al. (en prensa)— fue presentado como un argumento no matemático.

Adicionalmente, hacer caso omiso de la diversidad de calificativos modales utilizados en la argumentación en matemáticas puede ocultar aspectos importantes de un argumento de un estudiante. El siguiente ejemplo ilustra este punto. Linvoy es un participante en un estudio longitudinal sobre la construcción y evaluación de pruebas por parte de estudiantes de matemáticas a nivel universitario. En su segunda entrevista con uno de los autores de este artículo, Linvoy recibió la siguiente tarea (basada en un problema usado por Raman, 2002):

> Determine si la siguiente proposición es verdadera o falsa (explique su respuesta probando o refutando la proposición): La derivada de una función par diferenciable, es impar.

Después de trabajar durante algunos minutos utilizando las definiciones de función par/impar y de la derivada de una función diferenciable, Linvoy dijo:

> Lo que estoy pensando es que, dado que esto no parece estar yendo a ningún lado, aunque puede llevarme a algo… lo que estoy pensando es que

> tal vez si considero algunas funciones, es posible que pueda pensar en algún contraejemplo, pero si la proposición es verdadera obviamente no lo haré. Vamos a ver.
>
> Tal vez si pienso de una manera un poco menos formal, si pienso en la derivada de una función como el gradiente en un punto particular… y… err… [Dibuja la gráfica de una función sinusoidal par] Pienso en una gráfica como ésta que es [inaudible] porque es una función par, entonces… sí, supongo que una manera de ver esto es que cualquier punto aquí, digamos este punto [escoge un punto de la gráfica de la función localizado en el primer cuadrante], uno tiene este gradiente yendo en esta dirección, y si uno compara exactamente la otra parte, uno tiene el gradiente yendo en la dirección opuesta porque es exactamente, err, es como la imagen en un espejo, así que… y esa es, esa es impar, porque ese gradiente sería exactamente el negativo de ese gradiente.
>
> Así que, sí, supongo que, sólo por ese ejemplo básico, supongo que intuitivamente esto es, parece que tendría sentido, pero y si… tal vez es sólo el ejemplo de la función que escogí, pero eso no puede ser cierto, porque, lo que estoy pensando es que… si uno toma, digamos, cualquier [dibuja otro par de ejes]… esto puede hacer lo que quiera, pero digamos que estamos interesados en un punto en el que esta haciendo esto [dibuja sólo una parte pequeña de la gráfica de una función genérica en el primer cuadrante], entonces va a tener ese gradiente y entonces si lo transferimos va a ser así [dibuja la reflexión en el eje x de la parte de la gráfica que acababa de dibujar], entonces va a tener ese gradiente, el cual sería exactamente el opuesto del otro… sí, pensándolo de esta manera, parece verdadero, sólo pensándolo en esos términos, umm… como antes, estaría más feliz si pudiera pensar en alguna manera de probarlo…
>
> [Señalando la gráfica del ejemplo genérico] eso, eso me convence, así que supongo que si vuelvo a mirar esto [señalando su trabajo previo con las definiciones]…

En esta serie de argumentos, Linvoy usa una variedad de calificativos modales, tales como "parece que tendría sentido", "parece verdadero", y "eso me convence". Estos calificativos sugieren un incremento del nivel de convicción de Linvoy con respecto a la veracidad de la conjetura, e indican al investigador los diferentes factores que pueden ser considerados responsables de tal incremento.

Después de trabajar por unos minutos usando algunas definiciones, Linvoy dijo que no estaba seguro si la proposición era verdadera o falsa. Sin embargo, tras estudiar el ejemplo particular de una función par, concluyó que la conjetura parecía tener sentido. En ese momento, este participante no parecía creer que la proposición era definitivamente cierta; este experimento parece haberle sugerido simplemente que su búsqueda de un contraejemplo no iba a ser fructífera, y que la conjetura era en efecto factible. Inmediatamente después, Linvoy expresó una posible refutación a su argumento empírico, diciendo: "tal vez es sólo el ejemplo de la función que escogí". Esto lo llevó a realizar otro experimento, esta vez estudiando un ejemplo genérico representado por una gráfica imaginaria que podía "hacer lo que quiera", mientras él dibujaba y se concentraba en sólo una pequeña parte de esa gráfica. Con esta nueva evidencia, y su garantía correspondiente, Lynvoy cualificó su conclusión con un calificativo modal más fuerte, pero todavía no absoluto: "parece verdadero, sólo pensándolo en esos términos". Finalmente, después de expresar su inclinación por demostraciones más formales y estudiar su ejemplo genérico por unos segundos más, Linvoy dijo que su argumento visuo-empírico era convincente (distintos tipos de persuasión serán discutidos en la siguiente sección de este artículo). Es claro que excluir los distintos tipos de calificativos usados por Linvoy habría desdibujado la complejidad de su razonamiento y el importante papel que jugaron en él sus ejemplos particulares y genéricos.

De manera simplificada, nuestra posición es la siguiente: al estudiar las prácticas argumentativas de estudiantes, los investigadores necesitan tener en cuenta todos los componentes de un argumento, no sólo la evidencia, la conclusión, y la garantía (o justificación). De particular importancia es el calificativo modal: todo calificativo que sea verbalizado debe ser tenido en cuenta en el análisis del argumento. Por otro lado, si un estudiante no verbaliza su calificativo, entonces el investigador tiene dos opciones: inferirlo, o intentar averiguarlo mediante preguntas adicionales que provoquen su verbalización. Hasta el momento, investigadores en este campo se han concentrado en la primera opción, infiriendo un calificativo absoluto. En algunos casos esto puede ser legítimo, pero en muchos otros puede no serlo. Nuestra sugerencia es que, si el entrevistador fracasa en su intento de incitar la verbalización del calificativo modal de un argumento, el investigador puede inferirlo a partir de pistas no verbales sólo si puede proporcionar razones convincentes *explícitas* de la validez de dicha inferencia.

EL PODER PERSUASIVO DE UN ARGUMENTO

Además de estudiar la construcción de argumentos en matemáticas, algunos investigadores en el campo de Educación Matemática han mostrado interés en la evaluación de argumentos por parte de estudiantes. Selden y Selden (2003) definen la *validación de una prueba* como la lectura que hace una persona de un argumento o prueba, lo cual incluye todas aquellas reflexiones y procesos mentales asociados con esa lectura. En particular, anteriores investigadores han intentado estudiar los diferentes tipos/niveles de convicción/persuasión que un estudiante asigna a un argumento dado, preguntándole qué tan convincente o persuasivo encuentra dicho argumento (e.g. Mejia-Ramos y Tall, 2005; Segal, 1999; Raman, 2002). Pero, ¿cómo interpreta el estudiante esta pregunta? Nosotros señalamos que hay al menos cuatro interpretaciones razonables.

Para ilustrar nuestra tipología de estas interpretaciones utilizamos evaluaciones del argumento de Gowers (2006) realizadas por participantes en un estudio reciente sobre el papel que juega la autoridad en la argumentación en matemáticas (Inglis y Mejia-Ramos, sometido). Debemos enfatizar que la clasificación que introducimos en este artículo se deriva de un análisis teórico del modelo argumentativo de Toulmin (1958); por tanto, los datos reportados en las siguientes secciones son utilizados para ejemplificar la clasificación teórica, y no deben ser vistos como un corpus a partir del cual estamos intentando hacer generalizaciones. No obstante, a pesar de que los datos reportados en este artículo fueron seleccionados por su valor ilustrativo, el lector puede encontrar útil conocer algunos de los detalles metodológicos de su recolección. Nuestra muestra estaba compuesta de dos grupos: estudiantes de pregrado e investigadores en el área de matemáticas. Los participantes realizaron una tarea a través de Internet (Krantz y Dalal, 2000, discuten en profundidad la fiabilidad de estudios conducidos en Internet). Los estudiantes de pregrado (N=496) llevaban a cabo sus estudios en universidades que han sido clasificadas entre las mejores del Reino Unido, y fueron invitados a participar a través de un correo electrónico proveniente de la secretaría de su departamento. Los investigadores en el área de matemáticas fueron contactados de dos maneras: algunos (N=489) fueron invitados a participar de una manera similar a la de los estudiantes de pregrado, mientras que con otros (N=87) nos pusimos en contacto mediante un anuncio publicado en un boletín de noticias para investigadores matemáticos. Antes de realizar la tarea, los participantes en el grupo de investigadores debían declarar que trabajaban activamente en investigación matemática[2]. La tarea consistía en leer el argumento de Gowers (2006) y declarar hasta qué punto se sentían persuadidos por dicho argumento haciendo uso de una escala tipo Likert. Adicionalmente, se invitaba a los participantes a presentar comentarios que explicaran/ampliaran su respuesta. Son éstos los comentarios que utilizamos en las siguientes secciones para ilustrar nuestra clasificación teórica.

2. La identidad del autor del argumento fue revelada a la mitad de participantes cada grupo, y no a la otra mitad. El diseño de este experimento fue ideado para estudiar el papel que cumple la autoridad en la evaluación de argumentos, y no es relevante en este artículo. Inglis y Mejia-Ramos (sometido) proporcionan un reporte completo de estos datos.

Tipo 1

Una manera de enfrentar la pregunta *¿cuán persuadido se siente usted por el siguiente argumento?*, consiste en estimar el nivel de convicción que uno tiene en la conclusión del argumento. Por ejemplo, al evaluar el argumento del bus presentado anteriormente, una persona podría sugerir sentirse muy persuadida debido a que sabe que, en efecto, la vía que toma el bus para llegar al aeropuerto estará cerrada debido a reparaciones programadas para ese día determinado. En este caso, esta persona estaría reportando el calificativo modal de un argumento construido por ella misma y que es totalmente distinto al que se le pidió evaluar. La única semejanza entre los dos argumentos es su conclusión, o aserción.

Evaluaciones del Tipo 1 no son poco comunes. Por ejemplo, al pedirle que evaluara y justificara su nivel de persuasión en el argumento de Timothy Gowers, un matemático escribió:

> La normalidad de p no es irrazonable dado que casi todos los reales son normales. (Matemático)

En este caso, quien evaluó el argumento ignoró la evidencia, garantía, y refutación presentadas por Gowers, y en cambio construyó un nuevo argumento que sólo comparte la aserción con el argumento dado. La evidencia, garantía, y soporte de este nuevo argumento son completamente distintos, el evaluador reportó el calificativo de este nuevo argumento declarando que la conclusión "no es irrazonable".

Otro ejemplo de una interpretación Tipo 1 fue proporcionado por un estudiante:

> Principalmente, no me siento persuadido porque he visto una fórmula que puede calcular el enésimo dígito de π, sugiriendo que no es una serie de números al azar. (Estudiante de Pregrado)

De nuevo, el estudiante evaluó el calificativo de un argumento completamente distinto; la evidencia, la garantía, y el soporte del argumento de Gowers no fueron tomados en cuenta.

Tipo 2

Otra manera de evaluar un argumento consiste en considerar su evidencia, garantía, soporte, refutación, y aserción, e intentar decidir por uno mismo el tipo de calificativo modal con el cual uno completaría el argumento. En nuestro ejemplo del bus, alguien estaría tipificando este tipo de evaluación al decidir que el argumento es "plausible" debido a que, en ocasiones, eventos en el pasado son buenos guías de eventos en el futuro. Dadas la evidencia presentada y la garantía implícita, esa persona diría que es razonable concluir la aserción con un calificativo de "plausibilidad". Mientras una interpretación Tipo 1 se concentra únicamente en la aserción del argumento dado, e involucra la construcción (posiblemente implícita) de un nuevo argumento, una interpretación Tipo 2 involucra únicamente la evaluación de la aserción concentrándose principalmente en la evidencia y la garantía del argumento.

Esta respuesta tipifica una evaluación Tipo 2:

> La evidencia proporciona un peso decente a la conjetura; pero naturalmente como prueba es imposible, es poco realista asumir certeza. (Estudiante de Pregrado)

En este caso el estudiante sugiere que la evidencia presentada indica que la conjetura puede ser verdadera, pero que un calificativo más fuerte sería inapropiado. En términos del modelo argumentativo de Toulmin, este estudiante parece haber considerado la evidencia, la garantía, y el soporte del argumento, y ha decidido que estaría dispuesto a emparejar a esa parte del argumento un calificativo que "proporciona un peso decente" a la aserción.

Tipo 3

Una interpretación Tipo 3 tiene lugar cuando el evaluador decide hasta qué punto es apropiado emparejar la garantía y el calificativo modal del argumento. En nuestro ejemplo del bus, alguien podría responder que no se siente persuadido ya que, aunque podría ser razonable preocuparse por la tardanza del bus basándose en experiencia previa, es completamente inadecuado emparejar tal garantía con un calificativo absoluto, como parece haber hecho el autor del argumento. En contraste a una evaluación de Tipo 2, en la cual el evaluador reporta el tipo de calificativo que sería apropiado dado el resto del argumento, en una evaluación Tipo 3 el asunto es si el calificativo dado es apropiado dado el resto del argumento. Es claro que uno podría considerar un argumento persuasivo Tipo 2, al mismo tiempo que lo considera no persuasivo Tipo 3.

Al considerar cuán persuasivo era el argumento de Gowers, muchos participantes hicieron una interpretación Tipo 3:

> Cualquier análisis que podría hacer un estadístico para probar la 'aleatoriedad' dentro de π sólo podría ser probado en un número finito de dígitos. Como π tiene un número infinito de dígitos, yo pensaría que sería peligroso extrapolar esta apariencia de aleatoriedad a todo π. (Estudiante de Pregrado).

> El razonamiento es erroneo al pasar de hablar de cómo nuestra experiencia sugiere que 'sucesiones cortas' se dan en aquellos números irracionales que ocurren naturalmente, a decir que es probable que haya 'un millón de sietes'. Claro, su definición de 'sucesión corta' no es dada, pero me arriesgo

> a adivinar que son mucho menos números que un millón. (Estudiante de Pregrado).

En estos dos casos, los evaluadores explican que no se sienten persuadidos por el argumento, ya que la garantía proporcionada no justifica la fuerza atribuida a la aserción por medio del calificativo modal usado.

Tipo 4

El último tipo de evaluación que hemos identificado concierne la admisibilidad del argumento en un contexto determinado. Es bien sabido en el contexto de jurisprudencia que algunos argumentos, sin importar cuán persuasivos sean, son inadmisibles en la corte. En Inglaterra y en Gales, por ejemplo, un demandante no puede referirse al pasado criminal del defendido durante el caso. Un argumento basado en esta evidencia puede llevar un calificativo modal extremadamente alto, pero es inadmisible en ese contexto. Naturalmente, distintos contextos tienen distintas reglas de admisibilidad: lo que es admisible en una corte penal difiere de lo que es admisible en una corte civil, lo cual, a su vez, difiere de lo que es admisible en un argumento dado en una cervecería.

Así, por ejemplo, el argumento del bus bien puede ser admisible en una conversación informal, pero si uno lo utilizara para intentar convencer al asistente financiero de su departamento de que le pagara por adelantado la tarifa de un taxi al aeropuerto, el argumento bien podría ser considerado inadmisible. Estos asuntos se rigen por ciertas reglas relacionadas al tipo de evidencia, garantía, soporte, calificativo, y refutación que pueden ser admisibles en un argumento; y es poco probable que un presentimiento acerca de la posible tardanza del bus cumpla estas reglas.

En su evaluación, muchos participantes cuestionaron la admisibilidad del argumento heurístico propuesto por Gowers:

> El argumento gira alrededor de una noción precisa de la noción de aleatoriedad en los dígitos de π, la cual puede ser plausible, pero no ha sido demostrada. Si un manuscrito que presentara un argumento análogo me llegara para ser arbitrado, yo recomendaría que fuera rechazado por falta de rigor matemático. Sin embargo, si alguien quisiera generar pedazos 'seudoaleatorios' de los dígitos de π para un programa de computador casual (i.e. uno del cual no dependieran vidas o propiedades de una manera crucial), yo diría que el argumento de Gowers justificaría la estrategia. (Matemático)

En este caso el evaluador admite que en el contexto de una revista académica de matemáticas encontraría el argumento inadmisible, pero que en un contexto distinto, en el cual sólo fuera necesario generar algunos números aleatorios, el argumento sería aceptable. Sin embargo, considerando un tercer contexto, si esta generación de números aleatorios fuera un asunto de vida o muerte, el argumento bien podría volver a ser considerado inadmisible.

Claro, en algunos contextos no existen reglas específicas de admisibilidad más allá de las consideradas en una evaluación Tipo 3. En estas situaciones de "exploración libre", cualquier argumento que sea persuasivo Tipo 3 es, por defecto, persuasivo Tipo 4.

Mezcla de tipos

Algunos participantes ofrecieron de manera explícita evaluaciones de diferentes tipos en una misma respuesta: múltiples interpretaciones de la pregunta pueden llevar a respuestas con múltiples niveles. Por ejemplo, uno de los matemáticos respondió de la siguiente manera cuando se le pidió que evaluara el argumento de Gowers:

> Sólo lógicamente basado en la evidencia presentada, no estoy para nada persuadido. Sin embargo, soy consciente de la existencia de un conjunto sustancial de investigaciones (bastante más formales que lo expuesto en el argumento) abordando específicamente la equidistribución de sucesiones de dígitos de π. Así que pasé del nivel más escéptico a la siguiente categoría combinando ese conocimiento con la información de arriba. (Matemático)

En este caso, quienes evalúan el argumento expresan explícitamente que no se sienten persuadidos por la evidencia, garantía, y soporte del argumento: que no se sienten persuadidos Tipo 2. Sin embargo, señalan que se sienten algo persuadidos Tipo 1, dado su conocimiento previo acerca de las sucesiones de dígitos de π. Es comprensible que estas distintas interpretaciones hayan confundido a los participantes a la hora de evaluar su nivel de persuasión en una escala de Likert.

Algunas implicaciones teóricas y metodológicas

Con esta tipología de persuasión hemos sugerido que existen (al menos) cuatro interpretaciones razonables de la pregunta "*¿qué tan persuasivo encuentra este argumento?*" Los primeros dos tipos involucran la evaluación de la probabilidad de la conclusión:

1) ¿Cuál es su nivel de convicción en la conclusión, considerando otro argumento (posiblemente no verbalizado)?
2) ¿Cuál es su nivel de convicción en la conclusión, considerando únicamente el argumento dado?

En una evaluación Tipo 1 el participante considera cuán probable es la conclusión, dado un argumento cualquiera. Una evaluación Tipo 2 es similar, pero en este caso el participante sólo considera la evidencia, garantía, soporte, y refutaciones presentadas, o inferidas del argumento en cuestión. Por otro lado, los tipos 3 y 4 involucran el nivel de convicción en relación al argumento, no a la conclusión:

3) ¿Se han emparejado apropiadamente la garantía y el calificativo modal?

4) ¿Es el argumento admisible, dado cierto contexto?

Una evaluación Tipo 3 considera si la garantía del argumento ha sido emparejada con un calificativo modal adecuado; el asunto en este caso es si el argumento es internamente coherente. En contraste, una evaluación Tipo 4 considera si el argumento es admisible en un contexto determinado, es decir, si el argumento es externamente adecuado[3]. Los cuatro tipos de persuasión discutidos están esquematizados en la Figura 4 utilizando el modelo argumentativo de Toulmin.

Anteriores investigadores han estudiado dos maneras distintas de evaluar un argumento dado, y los dos niveles de persuasión correspondientes reportados por sus participantes. Esto los llevó a establecer una distinción entre un sentido de convicción privado y uno público, o entre uno interno y uno externo (e.g. Mejia-Ramos & Tall, 2005; Raman, 2002; Segal, 1999). Por ejemplo, Raman (2002) estableció una distinción entre argumentos públicos y privados, y sus sentidos de convicción correspondientes:

> Con 'argumento privado' quiero decir, 'un argumento que engendra comprensión', y por 'público' quiero decir 'un argumento con suficiente rigor para una comunidad matemática particular'. [...] Uno también puede distinguir entre sentidos de convicción públicos y privados, el sentido público basado en argumentos públicos y el sentido privado basado en argumentos privados. (p. 9)

Desde nuestra perspectiva, Raman estaba destacando las diferencias entre persuasión Tipo 4 y persuasión de Tipos 1-3. Nosotros sugerimos que la terminología público/privado es ambigua: mientras anteriores investigadores han hablado sólo de un sentido de convicción privado, nosotros hemos demostrado que, en el caso de la evaluación de argumentos, existen (por lo menos) tres maneras distintas por medio de las cuales se puede realizar una evaluación en un modo "privado". De igual manera, como es reconocido por Raman, no existe una sola variedad de persuasión "pública", o Tipo 4. Cada contexto particular trae consigo sus propias reglas de admisibilidad, y estas reglas varían ampliamente de un contexto a otro.

3. Aquí los adjetivos 'interno' y 'externo' hacen referencia al argumento, no a la persona quien argumenta (como han sido usados por otros autores).

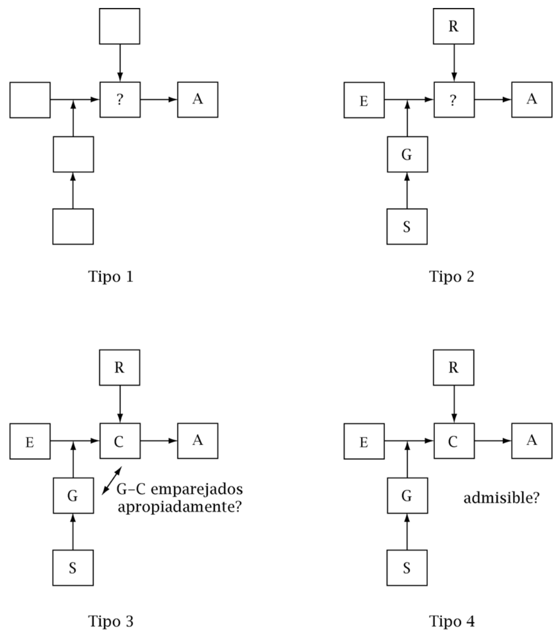

Figura Nº 4. Un resumen de los distintos tipos de persuasión identificados en este artículo, expresados utilizando el esquema de Toulmin (1958)

Segal (1999) utilizó dos preguntas diferentes para estudiar esta distinción entre un sentido público y un sentido privado de convicción. Siguiendo la terminología de Mason, Burton y Stacey (1982), Segal preguntó a sus participantes si un argumento los convencía personalmente, y si el argumento persuadiría "a un enemigo (en contraste a un amigo, o a uno mismo)" (p.199, nuestra traducción). En este caso, no es claro si respuestas a la primera pregunta involucraron una evaluación Tipo 3 (en la cual fue examinada la pareja garantía-calificativo), una evaluación Tipo 2 (en la cual fueron tomados en cuenta la evidencia, garantía, y soporte del argumento), o una evaluación Tipo 1 (en la cual el participante reportó su grado de creencia en la conclusión, independientemente del argumento dado). Adicionalmente, cualquier respuesta a la segunda pregunta (posiblemente relacionada a evaluaciones Tipo 4) claramente depende del contexto en el cual el participante haya situado a su enemigo, y en el tipo de evaluación que se puede esperar de ese enemigo.

Finalmente, sugerimos que la terminología "público" y "privado" puede ser engañosa: evaluaciones Tipo 4 no necesitan ser realizadas en escenarios públicos, así como evaluaciones Tipo 1-3 no necesitan ser realizadas en escenarios privados.

Otros investigadores han establecido distinciones entre diferentes tipos de convicción en términos de los distintos tipos de argumentos que los generan. Por ejemplo, Fischbein (1982) escribió lo siguiente acerca de tres tipos de convicción:

> Uno es el tipo de convicción formal extrínseco, que es impuesto indirectamente por una argumentación formal (en ocasiones puramente simbólica). La segunda forma de convicción es la empírica inductiva, derivada de una multitud de resultados prácticos que sustentan las conclusiones respectivas. El tercero es el tipo de convicción intuitivo intrínseco, directamente impuesto por la estructura de la situación misma. (p.11, nuestra traducción).

Usando la terminología del modelo de Toulmin, la distinción establecida por Fischbein esta basada en el tipo de garantía del argumento: deductiva en el primer caso, inductiva en el segundo, y estructural-intuitiva en el tercer caso (Inglis et al., en prensa, discuten en profundidad una tipología de garantías en la argumentación en matemáticas). A pesar de haberlos llamado "tipos de convicción", Fischbein no discutió las distintas maneras por medio de las cuales una persona puede evaluar su nivel de convicción o persuasión en un argumento; él categorizó tres diferentes tipos de garantía.

Nuestra posición es la siguiente: al estudiar la evaluación de argumentos matemáticos por parte de estudiantes, los investigadores deben tener en cuenta las distintas maneras por medio de las cuales se puede llevar a cabo dicha evaluación. En el caso particular en el que se pide al participante evaluar su nivel de persuasión en un argumento determinado, sugerimos que existen al menos cuatro maneras distintas de interpretar dicha pregunta, y que, por medio de preguntas adicionales, el investigador debe intentar averiguar cuáles de estas interpretaciones realiza cada participante. Destacamos que hasta el momento, anteriores investigadores se han concentrado en una clasificación restringida de esos tipos de convicción/persuasión, la cual puede ser ambigua y engañosa. En el caso general, cuando se estudian otros aspectos de la evaluación de argumentos en matemáticas, estos cuatro tipos de evaluación sugieren al investigador cuatro posibles focos de atención del participante cuando considera otras preguntas en relación con un argumento determinado.

CONCLUSIONES

En este artículo hemos discutido una perspectiva de la prueba y argumentación en matemáticas más amplia que la adoptada hasta el momento por investigadores en Educación Matemática. De acuerdo a lo propuesto por Inglis et al. (en prensa), y en contraste a la ya establecida práctica de anteriores investigadores, creemos que es necesario modelar la argumentación de estudiantes utilizado *todos* los componentes del esquema de Toulmin (1958) -incluyendo crucialmente el calificativo modal y la refutación. En este artículo hemos señalado algunas de las implicaciones teóricas y metodológicas de adoptar esta perspectiva en el estudio de la construcción y evaluación de argumentos en matemáticas.

Con respecto a la construcción de argumentos, sugerimos que al adoptar esta perspectiva es posible analizar y discutir un espectro más amplio de la argumentación en matemáticas, el cual incluye argumentos en los cuales se emparejan garantías no deductivas con calificativos modales no absolutos. Como es reportado por Inglis et al. (en prensa), éstos cumplen un papel fundamental en la argumentación en matemáticas, y por tanto deben ser tenidos en cuenta en toda teorización de la construcción de argumentos matemáticos.

Adicionalmente, indicamos algunas de las implicaciones de esta perspectiva en el análisis de argumentos construidos por estudiantes y matemáticos. Señalamos que, en el caso en el cual un participante no verbaliza explícitamente el calificativo de su argumento, anteriores investigadores han tendido a inferir un calificativo absoluto (o peor aún, reemplazar un calificativo no-absoluto explícitamente verbalizado, por uno absoluto). Este enfoque no puede producir un modelo fiel de estos argumentos. En este artículo hemos propuesto que en estas situaciones el investigador tiene dos maneras de proceder: intentar averiguar el calificativo modal mediante preguntas adicionales que provoquen su verbalización; o proveer razones explícitas, convincentes, y detalladas que justifiquen cualquier inferencia de un calificativo no verbalizado.

También destacamos que esta perspectiva nos permite realizar un análisis más profundo de la evaluación de argumentos en matemáticas. En particular, mientras anteriores investigadores teorizaron la existencia de dos tipos de convicción (uno público y uno privado), nosotros planteamos la existencia de (al menos) cuatro maneras diferentes por medio de las cuales una persona puede evaluar qué tan persuadida se siente por un argumento determinado. En las primeras dos el participante evalúa su nivel de convicción en la conclusión del argumento; mientras que en las últimas dos evalúa la totalidad del argumento, ya sea con respecto a su coherencia interna, o a su admisibilidad externa. Estas distintas formas de evaluar un argumento se pueden distinguir claramente utilizando el esquema completo de Toulmin.

Dadas estas múltiples maneras por medio de las cuales una persona puede interpretar la pregunta *¿qué tan persuasivo (convincente) encuentra el argumento?*, sugerimos que el investigador empírico debe diseñar cuidadosamente sus instrumentos metodológicos para determinar cuál pregunta está respondiendo su participante, y tener en cuenta estas diferentes interpretaciones a la hora de teorizar el poder persuasivo de un argumento.

No obstante estos nuevos requerimientos teóricos y metodológicos, creemos que utilizar el esquema completo de Toulmin en la investigación en Educación Matemática constituye un avance importante con respecto al enfoque adoptado por anteriores investigadores. Al usar el esquema completo, el investigador puede estudiar la construcción y la evaluación de argumentos en matemáticas de una manera más legítima y profunda de lo que permiten perspectivas existentes.

REFERENCIAS

Aberdein, A. (2005). The uses of argument in mathematics. *Argumentation, 19,* 287-301.

Aberdein, A. (2006). The informal logic of mathematical proof. En R. Hersh (Ed.), *18 Unconventional Essays on the Nature of Mathematics* (pp. 56-70). New York: Springer.

Balcheff, N. (1988). Aspects of Proof in Pupils' Practice of School Mathematics. En D. Pimm (Ed.), *Mathematics, Teachers and Children* (pp. 216-235). London: Hodder y Stoughton.

Burton, L. (2004). *Mathematicians as Enquirers: Learning about Learning Mathematics*. Dordrecht: Kluwer.

Coe, R. y Ruthven, K. (1994). Proof practices and constructs of advanced mathematical students. *British Educational Research Journal, 20* (1), 41-53.

Edwards, L. D. (1998). Odds and evens: Mathematical reasoning and informal proof among high school students. *Journal of Mathematical Behavior, 17,* 489-504.

Evens, H. y Houssart, J. (2004). Categorizing pupils' written answers to a mathematics test question: 'I know but I can't explain'. *Educational Research,* 46, 269-282.

Fischbein, E. (1982). Intuition and proof. *For the Learning of Mathematics, 3*(2), 9-18.

Goetting, M. (1995). *The college students' understanding of mathematical proof.* Tesis doctoral no publicada, University of Maryland.

Gowers, W. T. (2006). Does mathematics need a philosophy? En R. Hersh (Ed.), *18 unconventional essays on the nature of mathematics* (pp. 182-200). New York:Springer.

Hadammard, J. (1945). *The Psychology of Invention in the Mathematical Field*. New York: Dover Publications, edición de 1954.

Harel, G. y Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. En A. H. Schoenfeld, J. Kaput, y E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics III* (pp. 234-282). Providence, RI: American Mathematical Society.

Healy, L. y Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education, 31,* 396-428.

Hoyles, C. y Küchemann, D. (2002). Students' understanding of logical implication. *Educational Studies in Mathematics, 51*(3), 193-223.

Inglis, M. y Mejia-Ramos J. P. (sometido). Authority and persuasion in mathematics. *Manuscript submitted for publication*.

Inglis, M., Mejia-Ramos, J. P. y Simpson, A. (en prensa). Modelling mathematical argumentation: The importance of qualification. Aparecera en *Educational Studies in Mathematics*.

Knipping, C. (2003). Argumentation structures in classroom proving situations. In: M. A. Mariotti (Ed.), *Proceedings of the Third Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Bellaria, Italy: ERME.

Knuth, E. (2002). Secondary school mathematics teachers conceptions of proof. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*, 379-405.

Krantz, J. H. y Dalal, R. (2000). Validity of web-based psychological research. En M. H. Birnbaum (Ed.), *Psychological Experiments on the Internet* (pp. 35-60). San Diego: Academic Press.

Krummheuer, G. (1995). The ethnology of argumentation. En P. Cobb y H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 229-269). Hillsdale: Erlbaum.

Mariotti, M.A. (2006). Proof and proving in mathematics education. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 173-204). Rotterdam: Sense.

Mason, J., Burton, L. y Stacey, K. (1982). *Thinking Mathematically.* London: Addison-Wesley.

Mejia-Ramos, J. P. y Tall, D. (2005). Personal and public aspects of formal proof: a theory and a single-case study. En D. Hewitt y A. Noyes (Eds.), *Proceedings of the Sixth British Congress of Mathematics Education* (pp. 97-104).

Moore, R. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics,* 27, 249-266.

Pedemonte, B. (2005). Quelques outils pour l'analyse cognitive du rapport entre argumentation et d´emonstration. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 25, 313-348.

Pedemonte, B. (en prensa). How can the relationship Between Argumentation and Proof be analysed? Aparecera en *Educational Studies in Mathematics*.

Poincaré, H. (1905). *Science and Hypothesis*. London: Walter Scott Publishing.

Porteous, K. (1990). What do children really believe? *Educational Studies in Mathematics, 21*, 589-598.

Raman, M. (2002). *Proof and justification in collegiate calculus*. Tesis doctoral no publicada. Berkeley: University of California.

Recio, A. y Godino, J. (2001). Institutional and personal meanings of mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics, 48,* 83-99.

Rodd, M.M. (2000). On mathematical warrants. *Mathematical Thinking and Learning, 2,* 221-244.

Segal, J. (1999). Learning about mathematical proof: conviction and validity. *Journal of Mathematical Behavior, 18*(2), 191-210.

Selden, A. y Selden, J. (2003). Validation of proofs considered as texts: Can undergraduates tell whether an argument proves a theorem?, *Journal for Research in Mathematics Education, 34*(1), 4-36.

Thurston, W.P. (1994). On proof and progress in mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society, 30*, 161-177.

Toulmin, S. (1958). *The uses of argument*. Cambridge: CUP.

Toulmin, S. (2001). *Return to reason*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Toulmin, S., Rieke, R. y Janik, A. (1984). *An introduction to reasoning*. New York: Macmillan, segunda edición.

Weber, K. y Alcock, L. (2005). Using warranted implications to understand and validate proofs. *For the Learning of Mathematics, 25*(1), 34-38.

Yackel, E. (2001). Explanation, justification and argumentation in mathematics classrooms. En M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th International Conference on the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 9-23). Utrecht, Holland: IGPME.

Matthew Inglis
Instituto de Investigación en las Ciencias del Aprendizaje
(Learning Sciences Research Institute)
Universidad de Nottingham
E-mail: matthew.inglis@nottingham.ac.uk

Juan Pablo Mejía-Ramos
Instituto de Educación
(Institute of Education)
Universidad de Warwick
E-mail: j.p.mejia@warwick.ac.uk