

# EXPLICACIONES DE CIERTAS ACTITUDES HACIA EL CAMBIO: LAS CONCEPCIONES DE PROFESORES Y PROFESORAS<sup>1</sup> DE MATEMÁTICAS COLOMBIANOS(AS) SOBRE LOS FACTORES DETERMINANTES DE SU PRÁCTICA DE ENSEÑANZA DEL ÁLGEBRA ESCOLAR<sup>2</sup>

CECILIA AGUDELO VALDERRAMA

*Este artículo surge de un estudio cuyo propósito general fue investigar qué relación existe entre las concepciones que los profesores de matemáticas tienen de lo que es el **inicio del trabajo algebraico** en la enseñanza de las matemáticas escolares y sus concepciones sobre sus propias prácticas de enseñanza. Centrar la atención en las descripciones que los profesores hacen de su propia situación en el contexto escolar, y en las explicaciones que ofrecen sobre el **por qué** de lo que hacen en el aula de clase permitió identificar no sólo cómo ven el **cam-bio** en su práctica sino, además, el poderoso rol que juegan sus concepciones de factores sociales e institucionales del contexto escolar en sus formas de entender sus prácticas. El grado con que atribuían lo que hacían en sus aulas de clase a estos factores, **externos** a ellos, se convirtió en la base de categorización de sus concepciones de 'las determinantes cruciales' de su práctica, en tres tipos. Los hallazgos se hacen relevantes para nuestra comprensión del fenómeno de la **estabi-lidad** y **persistencia** de los enfoques de enseñanza de las matemáticas en el contexto colombiano pero, muy posiblemente, tienen implicaciones en una variedad de contextos educativos del ámbito internacional. Se identifican implicaciones específicas tanto para el desarrollo de la investigación sobre concepciones de los profesores acerca de las matemáticas y su enseñanza como para los programas de formación de profesores.*

1. Al referirme en este título a 'profesores y profesoras' quiero resaltar mi consciencia sobre formas de escribir que pueden promover el sexismo. En el texto, sin embargo, utilizo solamente las palabras 'profesor', 'profesores' para facilitar la lectura, y por razones prácticas, dadas las restricciones editoriales en cuanto al número de palabras del escrito que van a publicar.
2. Esta es una traducción del original, en inglés, que se encuentra en prensa en *Journal of Mathematics Teacher Education* (Ver <http://www.editorialmanager.com/jmte/>). La Publicación de esta traducción ha sido autorizada por Springer, The Netherlands.

*This article arises from a study whose overall purpose was to investigate the relationship between Colombian mathematics teachers' conceptions of beginning algebra and their conceptions of their own teaching practices. The teachers' understandings of their teaching practices were explored with a view to unravelling their conceptions of change in their teaching. Focusing on the perspectives of teachers afforded opportunities that exposed the powerful role that the teachers' conceptions of social/institutional factors of teaching played in their conceptions of their practices. The degree to which they attributed these (external) factors as crucial reasons for what they do in their teaching was the basis of a categorisation of their conceptions of the crucial determinants of their teaching practices into three types. The findings are particularly relevant to our understanding of the stability of mathematics teaching approaches in the Colombian context but have likely implications for a range of international education contexts. Specific implications for the development of the research into teachers' conceptions of mathematics and its teaching, and for teacher education programmes are presented.*

Palabras claves: Concepciones, creencias y actitudes de profesores de matemáticas; prácticas de enseñanza del álgebra y, en general, de las matemáticas escolares; posibilidades y barreras del cambio del profesor de matemáticas; temas socioculturales.

En Colombia y a nivel e internacional una de las áreas específicas más críticas en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas escolares es el álgebra (ver, por ejemplo, Zazkis, 2001; Agudelo-Valderrama, 2000; Bednarz, Kieran y Lee, 1996; MacGregor y Stacey, 1994; Booth, 1984; Cockcroft, 1982; Küchemann, 1981). Datos obtenidos, en el contexto colombiano, sobre algunas dificultades en el aprendizaje del álgebra y sobre el significado asignado al uso de las letras en álgebra por los alumnos de los Grados 11 de varios colegios (ver, por ejemplo, Agudelo-Valderrama, 2001; Bonilla, 1994), indican una necesidad urgente de enfocar y profundizar en el currículo de esta área de las matemáticas, en la que la mayor parte de los alumnos muestran índices muy bajos de motivación por el aprendizaje, y en consecuencia hay altas tasas de mortalidad académica y deserción. Según comparaciones del desempeño en matemáticas de estudiantes de 41 países en el estudio TIMSS<sup>3</sup>, los estudiantes colombianos quedaron ubicados en el puesto número 40 (ver, por ejemplo, Lokan, Ford y Greenwood, 1996). Esto sugiere que muchos estudiantes colombianos no están desarrollando el

---

3. El estudio TIMSS 'Third International Study in Mathematics and Science' se llevó a cabo durante el período de 1991-1995, con la participación de 41 países. En este estudio participaron estudiantes colombianos de los Grados 7 y 8 y 11.

poderoso pensamiento matemático que se construye a través del aprendizaje del álgebra.

Pensar algebraicamente, en el contexto del análisis de situaciones de la vida real, requiere ir más allá de la simple identificación de hechos y realización de cálculos con números específicos; el estudio del álgebra requiere que centremos la atención en los aspectos relacionales y las estructuras matemáticas presentes en dichas situaciones contextuales. Entre las capacidades que muestran los estudiantes competentes en álgebra están la habilidad para identificar las estructuras matemáticas que gobiernan las relaciones entre las cantidades que operan en los problemas o situaciones contextuales específicas que se están explorando, y la habilidad para generalizar y para representar, en formas diferentes, dichas relaciones (cf. Roberts, 2002). Esta potente forma de pensar en matemáticas caracterizada como *algebraica* (e.g., Mason, 1999; Mason, Graham, Pimm y Gowar, 1999), y que puede ser desarrollada por niños de temprana edad (ver, por ejemplo, Sutherland 1991; Kaput y Blanton, 2001), es útil para el análisis de situaciones de la vida real y la toma de decisiones y, por consiguiente, cada ciudadano la necesita para poder participar activamente como miembro de una sociedad democrática. Además, el continuo avance de la tecnología exige de los ciudadanos, cada vez más, que sean individuos competentes en álgebra. No obstante, y como ya se anotó, los estudiantes experimentan gran dificultad en el aprendizaje del álgebra, y aunque algunos logran pasar los exámenes 'requeridos por el sistema' y entrar a la universidad, muchos no tienen el mismo éxito. Los estudiantes que no tienen éxito muestran actitudes negativas hacia las matemáticas y tienen mayor probabilidad de marginarse (Agudelo-Valderrama, 1996), y formar parte de los grupos menos aventajados de la sociedad (Usiskin, 1999). Infortunadamente, mi experiencia de trabajo con profesores de matemáticas en Colombia ha mostrado que muchos de ellos no están interesados en cambiar sus esquemas de enseñanza del álgebra escolar, esto es, de las matemáticas escolares (ver Agudelo-Valderrama, 2000).

### **Breve información sobre los antecedentes y el contexto de este estudio**

De acuerdo con la Ley General de Educación expedida en 1994 y que actualmente rige, una de las metas básicas de la educación escolar es educar a los niños en los valores fundamentales necesarios para vivir en una sociedad democrática, participativa y pluralista (Artículo 21). Lo mismo que en reformas curriculares en el área de matemáticas, la Ley General de Educación enfatiza en el desarrollo de una *mente crítica, reflexiva y analítica* en el individuo, como uno de los *finés fundamentales* de la educación básica. La Ley también hace énfasis en la necesidad de flexibilizar el currí-

culo escolar, urgiendo a los profesores a participar en su construcción permanente para así poder atender las necesidades de las comunidades a las cuales dichas escuelas prestan sus servicios (Artículo 78). Los actuales lineamientos curriculares de matemáticas (ver, Ministerio Nacional de Educación, 1998) hacen hincapié en la necesidad de cambiar los patrones tradicionales de *transmisión* por un enfoque de trabajo en el aula en el que la *resolución de problemas* y el *aprendizaje significativo* sean el centro de la actividad matemática.

Antes de la emisión de la Ley General de Educación, el Currículo Nacional de Matemáticas, planteado como una prescripción, seguía exclusivamente los enfoques “del Modelo de la Matemática Pura<sup>4</sup>” (Robitaille y Dirks, 1982), el cual se centra en el aspecto formalista de una lista de temas organizados en forma jerárquica. Como consecuencia, el álgebra era vista como un curso prefabricado (i.e., perfectamente definido) para ser enseñado en los grados octavo y noveno. Las especificaciones curriculares fueron transformadas en libros de texto guía que se convirtieron en el único foco de la enseñanza y el aprendizaje en todo el país (Federici, 1985), y este tipo de texto continúa siendo hoy, en la mayoría de casos, el único material curricular al cual los profesores tienen acceso (Díaz, Solarte y Arce, 1997). El examen estándar del ICFES, al terminar Grado 11, se usa para controlar la admisión a la universidad y para clasificar a los colegios de acuerdo con su 'calidad académica'.

El proyecto PROMECA<sup>5</sup> desarrollado en Colombia estudió, en cuatro colegios, los patrones de enseñanza y aprendizaje que tenían lugar en lo que se llamó la transición del trabajo aritmético al algebraico. El estudio mostró que el álgebra carecía de significado tanto para alumnos como para profesores (ver Agudelo-Valderrama, 2000, 2001; González y Pedroza, 1999); también mostró que la iniciación del álgebra escolar seguía un enfoque “absolutista” (Lerman, 1990), “instrumentalista” (Ernest, 1989) y “de transmisión” (e.g., Brown, 2000; Heaton, 2000) de una lista de temas asignados para los Grados 8 y 9. Los profesores participantes en el estudio hicieron explícita su preocupación por la baja motivación de los alumnos por el aprendizaje del álgebra y sus dificultades en la enseñanza. Sin embargo, la gran mayoría mostró muy poco interés por participar en un programa de desarrollo enfocado en esta área, a pesar del apoyo que los directivos de sus colegios

4. Esta cita y todas las demás tomadas de publicaciones en inglés son mis propias traducciones al español.

5. PROMECA, que significa “Promoción de una enseñanza basada en la comprensión, en álgebra elemental”, estudió, en cuatro colegios, los patrones de enseñanza y aprendizaje que tenían lugar en lo que se llamó 'la transición del trabajo aritmético al algebraico', desde marzo de 1998 hasta julio de 2000.

ofrecieron para que pudieran participar en el programa. El énfasis que las reglamentaciones educativas y los lineamientos curriculares hacen sobre la necesidad de que el profesor se convierta en un “constructor permanente del currículo”, con el fin de promover la participación activa del alumno en su aprendizaje pareció no representarles un llamado al cambio en sus enfoques de enseñanza.

### **Qué significa 'el inicio del trabajo algebraico escolar' en este estudio**

Tradicionalmente las matemáticas escolares se han centrado en la enseñanza de procedimientos aritméticos y el dominio de cálculos, en la escuela primaria, y luego continúan con un énfasis netamente procedimental del álgebra a partir de la escuela media (Kaput y Blanton, 2001; Kieran, 1992). Este enfoque de la enseñanza de las matemáticas, que según Kaput y Blanton es seguido en los Estados Unidos, es consistente con los patrones de trabajo descritos por los profesores del estudio PROMECA: se presentan a los estudiantes una serie de expresiones simbólicas *prefabricadas* (Mason et al., 1999) y luego se centra el trabajo en la manipulación de dichas expresiones. Dentro de este enfoque 'el inicio del trabajo algebraico escolar' es asociado con la iniciación de un (nuevo) curso - en la escuela secundaria - basado en un trabajo separado de otros conceptos matemáticos y de las ideas y conocimientos con que los estudiantes cuentan. Los estudiantes que participaron en PROMECA sabían que “a las letras se les llama variables”, pero tenían gran dificultad para asignar significado a las expresiones simbólicas que manipulaban, mostrando así las mismas dificultades que Küchemann (1981) y Booth (1984) observaron en sus estudios con grandes grupos de estudiantes británicos.

Para que los estudiantes les encuentren sentido a las matemáticas, necesitan que el trabajo que se les propone les ofrezca oportunidades para “que creen conexiones entre dicho trabajo y sus contextos social, histórico y personal así como con otras áreas del conocimiento. Las matemáticas tienen conexiones prácticamente con todo” (Steen, 1999, p. 49); en consecuencia, el álgebra - que ha sido descrita como “el lenguaje a través del cual se comunican las matemáticas” (NCTM, 1989, p.150) - tiene conexiones prácticamente con todo. Por tanto, el álgebra no se puede considerar separada de otras áreas de las matemáticas como la aritmética y las nociones de geometría que, de acuerdo con Kaput y Blanton (2001) y Kieran (2004), conforman el foco del currículo tradicional de los niveles escolares primarios pues en estas matemáticas se encuentran las raíces del álgebra (Mason, 1999; Mason et al., 1999).

'El inicio del trabajo algebraico escolar' en el marco de una enseñanza basada en 'la comprensión y el significado' no se puede centrar en la presentación de simbolizaciones prefabricadas llamadas 'expresiones algebraicas' sino en la organización de actividades para el aula que involucren activamente a los estudiantes en procesos matemáticos de trabajo de donde el pensamiento algebraico puede surgir. Wheeler (1996) anota que "no hay consenso cuando se intenta diferenciar entre el pensamiento algebraico y el pensamiento matemático general, o cuando se intenta reducir el contenido esencial del pensamiento algebraico a un conjunto de operaciones elementales" (p. 322). De acuerdo con Kieran (2004), sin embargo, el pensamiento algebraico en las primeras etapas del álgebra escolar.

... incluye el desarrollo de formas de pensar [dentro del trabajo en actividades] ... como el análisis de relaciones entre cantidades, la identificación de estructuras, el estudio del cambio, la generalización, la resolución de problemas, la modelación, la justificación, la prueba y la predicción. (p. 149)

Las caracterizaciones de Kieran relativas al pensamiento algebraico se asemejan a los tipos de pensamiento que según Mason (1999) y Mason, Burton y Stacey (1982) están en el corazón del pensamiento matemático. 'El inicio del trabajo algebraico escolar' tiene que ver entonces con la creación de oportunidades (y el ser consciente de la existencia de oportunidades) para integrar y cultivar hábitos de pensamiento que presten atención a las estructuras fundamentales de las matemáticas (Kaput, 1999) en cada lección de matemáticas desde las primeras etapas de la escuela. Las diferentes caracterizaciones del álgebra (ver por ejemplo, Usiskin, 1988, 1999) y las diferentes aproximaciones al trabajo algebraico (i.e., la generalización, la resolución de problemas, la modelación y el estudio de funciones; ver Bednarz, Kieran y Lee, 1996) que durante los últimos doce años han sido centro de discusión y exploración dentro de la comunidad internacional de educación matemática señalan una variedad de actividades y énfasis que pueden promover en los estudiantes, lo que veo como las etapas iniciales en su construcción del concepto de *variable*. En otras palabras, 'el inicio del trabajo algebraico escolar' en el marco de una enseñanza basada en 'la comprensión y el significado' está relacionada con la provisión de ambientes de trabajo en el aula que ayuden a los niños a involucrarse activamente en los procesos generativos del concepto multifacético de *variable* que por naturaleza está en el corazón del pensamiento algebraico.

## Contexto investigativo

El estudio de la literatura muestra que muchos profesores que han participado en programas de desarrollo profesional encuentran difícil sobreponerse a lo que ven como barreras del cambio (cf. Raymond y Leinenbach, 2000; Wilson y Goldenberg, 1998; Schifter y Fosnot, 1993), y que la persistencia de los enfoques 'instrumentalista' y 'de transmisión' en la enseñanza de las matemáticas escolares no son típicos únicamente del contexto colombiano. Por ejemplo, Smith III (1996) destaca que en los Estados Unidos, en la enseñanza de las matemáticas predominan las prácticas transmisionistas, en contra del principio de enseñar promoviendo la participación activa del estudiante en la actividad matemática, promulgado en la reforma curricular. Gregg (1995) también resalta “la durabilidad y la estabilidad” de las prácticas tradicionales en la enseñanza de las matemáticas, y Price y Ball (1997) argumentan que en muchos lugares de los Estados Unidos, las prácticas del aula de clase de matemáticas continúan siendo “las convencionales de siempre”, a pesar del hecho de que “las reformas actuales en Estados Unidos recomiendan encarecidamente cambios profundos en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas” (p. 637). ¿Es posible que los puntos de vista de los profesores, sus maneras de ver sus propias situaciones en el contexto del aula escolar, nos enseñen algo sobre las razones por las cuales el cambio de su práctica de enseñanza se hace difícil?

La gran cantidad de estudios cuantitativos sobre las creencias de profesores de matemáticas (ver, por ejemplo, Andrews y Hatch, 1999; Philippou y Christou, 1999; Pehkonen, 1997) - que se han centrado en la identificación de *consistencia* entre “sus creencias de las matemáticas” y “sus creencias de la enseñanza de las matemáticas” - no nos dicen mucho sobre las dificultades del cambio en la enseñanza pues estos estudios han sido realizados, normalmente, fuera del contexto real del aula de clase. Los pocos estudios cualitativos que han dado importancia a las prácticas del aula (ver Frykholm, 1999; Raymond, 1997; Cooney, 1985; Thompson 1984) también han centrado la atención en la identificación de consistencia (o inconsistencia) entre las creencias que los profesores exponen y lo que realmente hacen en el aula. De estos estudios sabemos que los profesores identifican factores del contexto escolar para explicar las inconsistencias entre lo que dicen creer sobre las matemáticas escolares y lo que sucede en sus aulas de clase; sin embargo, no contamos con sus explicaciones sobre '*por qué*' esos factores afectan su práctica. Tampoco sabemos mucho sobre '*cómo*' dichos factores influyen sus concepciones' (i.e., su forma de ver) de sus *propia* práctica de enseñanza. ¿Qué relación ven los profesores entre sus concepciones de las matemáticas y sus concepciones de su propia práctica de enseñanza - en comparación con la que los investigadores, al parecer, ven?

Sostengo que para poder entender el fenómeno de la *persistencia* de los enfoques tradicionales en las aulas de clase de matemáticas colombianas - o en cualquier otro contexto - lo realmente importante es conocer las concepciones que los profesores tienen de su propia práctica de enseñanza, y este conocimiento debe incluir lo que ellos ven como barreras del cambio en el contexto de su escuela o colegio. Necesitamos estudiar no simplemente las concepciones que los profesores tienen de las matemáticas y de su enseñanza, también necesitamos estudiar sus concepciones 'de su propia' práctica de enseñanza (e.g., sus concepciones de su rol como profesores y de las circunstancias contextuales de su enseñanza; sus explicaciones sobre 'por qué enseñan como enseñan'). Muy poco sabemos sobre 'cómo los profesores ven su práctica de enseñanza'; por esta razón el propósito general del estudio de donde este artículo emerge fue investigar la relación existente entre las concepciones que los profesores de matemáticas tienen del *inicio del trabajo algebraico escolar* y sus concepciones de su práctica de enseñanza, con miras a identificar sus formas de ver el *cambio* en su práctica de enseñanza. Cuando describían y explicaban su práctica de enseñanza 'del inicio del trabajo algebraico escolar', los profesores hicieron énfasis en los *factores determinantes cruciales de su enseñanza*, y por ello este artículo se enfoca en la relación entre sus concepciones 'del inicio del trabajo algebraico escolar' y sus concepciones de *los factores determinantes cruciales de su práctica de enseñanza*.

El término *concepciones*, en este estudio, incluye además del *conocimiento*, las *creencias* y las *actitudes*. Aunque el conocimiento y las creencias se entrelazan de alguna forma, el conocimiento requiere cierta evidencia que las creencias no requieren (Cooney, 2001). A diferencia del conocimiento, implícita en las creencias está 'la disputa' como connotación (Thompson, 1992) (i.e., la persona es consciente de que otros pueden pensar en forma diferente), y además en las creencias está presente el factor afectivo (Furinghetti y Pehkonen, 2002; McLeod, 1992). Las 'actitudes' son constructos afectivos de larga duración (McLeod, 1992) o predisposiciones estables a responder en ciertas formas frente a ciertas situaciones. Las creencias y las actitudes se han incluido dentro de las 'concepciones' en este estudio, pues se ha demostrado que las creencias y actitudes de los profesores "influyen poderosamente en su personalidad" (Ernest, 1989, p. 25). Los profesores participantes en el estudio PROMECA proporcionaron evidencia fuerte de que sus actitudes hacia su práctica de enseñanza representaban un componente clave de sus concepciones. Las actitudes, como componentes de la dimensión afectiva de las concepciones de los profesores, necesitan ser reconocidas y entendidas para poder ganar una mejor comprensión del fenómeno de su resistencia al cambio.



## El estudio

El estudio se llevó a cabo con la participación de trece profesores de matemáticas que enseñaban en los Grados 8 de seis colegios (unos del Estado y otros privados) de Bogotá durante el año 2002 cuando se hizo la recolección de información. Nueve profesores fueron seleccionados como estudios de caso, pero este artículo se centra en los casos de cinco profesores solamente. La experiencia profesional con que contaban los participantes variaba en alto grado; es decir, el grupo escogido de participantes estaba conformado para representar un grupo de *variación máxima* (Patton, 1990). Algunos profesores comenzaban su experiencia como docentes; otros, que contaban con suficiente experiencia en la enseñanza de las matemáticas en secundaria, habían iniciado su trabajo como docentes en la escuela primaria; y otros, además de su trabajo en secundaria, llevaban como mínimo cinco años enseñando matemáticas en la universidad. La decisión de trabajar con profesores del Grado 8 fue tomada porque de acuerdo con los profesores del proyecto PROMECA, “el álgebra empieza en Grado 8”. No obstante, el propósito principal de la recolección de información fue identificar las concepciones de los participantes sobre 'la iniciación del trabajo algebraico escolar'; esto es, sobre *cuándo* y *cómo* empieza el trabajo algebraico, y *por qué* se incluye el estudio del álgebra en el currículo de matemáticas del ciclo básico de educación.

## Metodología

Dado que los individuos construyen sus concepciones en el contexto de la vida real, este estudio usó una estrategia de investigación que presta atención al marco de referencia que el contexto de la vida real representa en las concepciones de los profesores sobre su propia práctica de enseñanza. Por esta razón escogí un estudio de (múltiples) casos como estrategia de investigación. Un estudio de casos es “una indagación empírica que investiga un fenómeno contemporáneo dentro de su contexto de la vida real, especialmente cuando las líneas divisorias entre fenómeno y contexto no se evidencian claramente” (Yin, 2003, p.13). Una vez recolectada y examinada la información sobre las concepciones de sus prácticas de enseñanza - del grupo inicial de los trece candidatos - se seleccionaron nueve casos (profesores) que representaran una variedad de concepciones. Esto quiere decir que la recolección de información, que se llevó a cabo en un período de seis meses, se hizo en dos fases: Durante la *Fase 1* se recogió información (desde abril hasta mayo de 2002) por medio de dos cuestionarios y una entrevista. Durante la *Fase 2* la información se recogió (desde junio hasta septiembre) a través de observaciones de clase, entrevistas, examen de materiales curriculares y un grupo focal. En la Tabla N° 1 se muestra la

secuencia completa de las actividades de recolección de información que se llevaron a cabo.

<b>Fase 1</b>		<b>Fase 2</b>	
<b>Instrumento/ actividad</b>	<b>Propósito</b>	<b>Instrumento/ actividad</b>	<b>Propósito</b>
<i>Cuestionario 1</i>	Recolectar información sobre el <i>por qué</i> y el <i>cómo</i> de la iniciación del trabajo algebraico escolar	Observación de 5 clases consecutivas (examen de materiales curriculares)	Recolectar información para entender mejor las prácticas de aula descritas por los profesores
<i>Entrevista 1 (de seguimiento al Cuestionario 1)</i>	Obtener explicaciones sobre sus respuestas al Cuestionario 1, y recolectar información sobre el qué de la iniciación del trabajo algebraico	<i>Entrevista 2 (Parte 1: Seguimiento de la observación Parte 2: Construcción de mapa conceptual inicial)</i>	Obtener puntos de vista sobre incidentes específicos observados en sus clases, y propiciar su participación activa en la construcción de un mapa conceptual de las determinantes de sus prácticas de enseñanza
<i>Cuestionario 2</i>	Investigar más profundamente sus concepciones de la iniciación del trabajo algebraico, y hacer una exploración de su interés en el enfoque de la resolución de problemas	<i>Grupo focal</i>	Investigar más profundamente las concepciones de los profesores sobre su propia práctica de enseñanza en la iniciación del trabajo algebraico escolar*
		<i>Entrevista 3 (Parte 1: Seguimiento del Grupo focal Parte 2: Construcción de mapa conceptual final)</i>	Clarificar ideas que no fueron sondeadas adecuadamente durante el Grupo focal y revisar el mapa conceptual inicial

\* Durante el Grupo focal se discutieron los enfoques de trabajo en el aula de tres profesores diferentes, quienes privilegiaban una orientación de resolución de problemas en la introducción del concepto de variable.

*Tabla N° 1. Secuencia completa de actividades de recolección de información*

En los cuestionarios se usaron descriptores y declaraciones que se desarrollaron con base en el supuesto de que las concepciones que los profesores tienen de las matemáticas - y específicamente del álgebra escolar - pueden ser muy diferentes y pueden variar desde la perspectiva de una colección de hechos, reglas y habilidades desconectadas como en las visiones “absolutista” (Lerman, 1990), “instrumentalista” Ernest (1989) y “tradicionalista” (Cooney, 2001; Gregg, 1995), hasta otra que hace énfasis en la resolución de problemas y la comprensión como aspectos centrales de la actividad matemática (e.g., Cockcroft, 1982; Ernest, 1989, 1991). En el Apéndice se presenta una de las preguntas incluidas en el 'Cuestionario 1'.

El 'Cuestionario 2' contenía las descripciones de los enfoques de clase seguidos por dos profesores - el Profesor A y el Profesor B - cuando traba-

jaban en la introducción del concepto de variable. En este cuestionario, los profesores fueron invitados a expresar sus opiniones sobre cada enfoque descrito y a justificar lo expresado. La descripción del trabajo del 'Profesor A' se construyó con base en la información recogida en PROMECA, mostrando una orientación tradicionalista, trasmisionista e instrumentalista. En la descripción del trabajo del 'Profesor B', cuya intención era promover la actividad de resolución de problemas, se usó parte de los recuentos que Kieran, Boileau y Garaçon (1996) hacen de su trabajo con niños en el trabajo algebraico. Una información más amplia sobre los instrumentos de recolección de información usados puede encontrarse en Agudelo-Valderrama (2004b).

### *Análisis de la información*

El diseño de investigación fue ideado para desarrollar una línea de indagación convergente; esto es, en cada instrumento o actividad de recolección de información se estaban haciendo prácticamente las mismas preguntas. La línea de indagación convergente se basó en un proceso de continua triangulación de 'las fuentes de información' y/o de las 'fuentes de recolección de información' (i.e., formas, métodos), que se consideró necesario para poder producir descripciones bien documentadas de los estudios de caso que sirvieran como lo que Patton (1990) y Yin (2003) llaman 'registros de información de los estudios de caso'. Estos registros fueron utilizados para hacer las comparaciones de las concepciones de los profesores que se presentan más adelante.

La información recogida a través de diferentes medios y en diferentes momentos se estudió y se clasificó con el propósito de identificar las concepciones de los profesores sobre: i) el inicio del trabajo algebraico y ii) su propia práctica de enseñanza. Para identificar las concepciones de los profesores sobre el inicio del trabajo algebraico, el análisis se enfocó en datos correspondientes a los componentes fundamentales de la enseñanza; esto es, en datos relacionados con 'el por qué', 'el qué' y 'el cómo' de la iniciación del trabajo algebraico. Para identificar las concepciones de los profesores sobre su propia práctica de enseñanza, el foco de atención, en un primer lugar, fue en sus explicaciones sobre *por qué enseñan en la forma en que lo hacen, y en un segundo lugar, sobre por qué querrían (o no querrían) considerar una forma u orientación de enseñanza diferente para la iniciación del trabajo algebraico.*

## Resultados

Los resultados que se presentan en este artículo se basan en los casos de Pablo, Clara, Leo, Alex y Pacho<sup>6</sup>, que fueron seleccionados de entre los nueve estudios de caso como representantes tanto de la variedad *identificada* de concepciones de su práctica de enseñanza en la iniciación del trabajo algebraico escolar como de una variedad de experiencias en la enseñanza de las matemáticas escolares. Tanto Pablo como Alex enseñaban en colegios privados y eran profesores principiantes.

### *Concepciones de los profesores sobre el inicio del trabajo algebraico escolar*

Pablo argumentó que la razón central por la que los alumnos necesitan aprender álgebra es que “el algebra es un conocimiento importante, necesario para entender situaciones de la vida real, y si los alumnos no la ven así, entonces no encuentran razón para estudiarla”. Clara, Leo, Alex y Pacho, en cambio, creían que los alumnos deben aprender álgebra porque 'es un conocimiento prerequisite para niveles de matemáticas más altos en el colegio y en la universidad'. A lo largo del proceso de recolección de información, los profesores proporcionaron descripciones de la forma como ellos inician el trabajo algebraico - en este caso en Grado 8 - y de cómo sus alumnos aprenden. Sus descripciones de cómo enseñan determinados temas al igual que sus justificaciones sobre 'por qué enseñar así' son evidencia de sus concepciones sobre el álgebra escolar. En la Tabla N° 2 se presentan declaraciones específicas de los profesores que se consideraron reveladoras en sus descripciones de cómo empiezan el trabajo algebraico, y de cómo enseñan “factorización” - tema que fue el centro de trabajo en las clases que fueron observadas a Pacho y Leo.

El resumen de la Tabla N° 2 evidencia una gran diferencia entre las concepciones de Pablo sobre la naturaleza del conocimiento algebraico, y las de los demás profesores. Aunque el producto del trabajo de clase —para los cinco profesores— estaba enfocado en los algoritmos para operar con expresiones (algebraicas), la diferencia entre las formas de pensar de Pablo y las de los demás profesores está en cómo los alumnos llegan a saber “las entidades matemáticas dadas . . . las verdades absolutas que los estudiantes tienen que adquirir... tal como se promulga en las estipulaciones curriculares” (Jaworski, 1999, p. 162).

---

6. Los nombres de Pablo, Clara, Leo, Alex y Pacho son seudónimos.

<i>Iniciación del trabajo algebraico</i>	<i>Enseñanza del tema 'factorización'</i>	
<p>Yo no le pongo atención a las definiciones de los libros, que una expresión algebraica es una combinación de . . . Cuando empezamos a usar letras o expresiones simples fue porque estábamos hablando de áreas y perímetros de rectángulos o de triángulos. . . Más tarde . . . lo que se hizo fue centrarnos en una actividad de salto largo que ellos estaban haciendo en Educación Física, donde el salto se hacía después de correr 13 pasos para coger impulso . . . Empezamos a hablar de las distancias que Martha y Juan hubieran recorrido durante sus 13 pasos de impulso y . . . (Ent. 1)</p>	<p>Si yo realmente sé cómo factorizar, por ejemplo, <math>a^2 - b^2</math>, y por qué lo factorizo de una forma específica, yo debería estar en capacidad de factorizar el otro tipo de polinomios o los otros casos. ¿Y por qué tengo que enseñar factorización como un tema separado si factorizar es una forma de saber si yo entiendo multiplicación? . . . Los alumnos necesitan preguntarse '¿por qué estoy haciendo esto?' Matemáticas para mí es análisis . . . (Ent. 2) . . . si los alumnos se aprenden las fórmulas de cada caso, de memoria, no están aprendiendo, están simplemente manipulando las expresiones. (Ent. 3)</p>	Pablo
<p>Vemos lo que es 'expresión algebraica' . . . Les doy expresiones como '<math>7 \cdot (b + 5) = 21</math>' para hallar el valor de b. . . difícil para ellos ver expresiones como ésta. . . Cuando tienen dificultades con términos semejantes los mando a ordenar la nevera. 'Usted no puede mezclar naranjas con peras' . . . (Ent. 1)</p>	<p>Para decidir lo que voy a hacer en una clase pienso en el contenido . . . y en cómo voy a evaluar a los alumnos en esa lección. . . ahora que estamos en 'factorización' cada día les hago lección escrita . . . porque factorización es algo mecánico, algo que aprenden durante la clase pero que olvidan muy fácilmente; entonces cada día les enseño un caso y luego les hago lección escrita. (Ent. 3)</p>	Clara
<p>El trabajo de álgebra empieza con expresiones algebraicas y todo lo que se relaciona con eso: coeficiente, parte literal, tipos de expresiones, etc., y luego pasamos a adición y el resto de operaciones con polinomios (Ent. 1). Ellos tienen dificultad para ver que 2a y b no se pueden adicionar; no importa cuántas veces una les explique . . . (Ent. 2)</p>	<p>Los alumnos aprenden cada caso de factorización poniendo atención a la explicación del profesor . . . Para aprender cada caso, ellos siguen como unos niveles. En el nivel 1 identifican o establecen la forma de la expresión [dada]. En el nivel 2 practican el encontrar los factores de expresiones dadas para mecanizar el procedimiento, y en el nivel 3 pueden aplicar este procedimiento a un problema artificial . . . (Ent. 2)</p>	Leo
<p>Empezamos por definir 'expresión algebraica', que es un conjunto de letras y . . . Les explico lo que es un término, un binomio . . . términos semejantes, etc. para luego poder empezar adición y sustracción con expresiones . . . (Ent. 1). Trabajar los temas en este sistema lógico es muy importante porque este orden les ayuda a entender álgebra. (Cuest. 2)</p>	<p>Vimos todos los casos de factorización poniendo mayor atención a los que más se necesitan para solucionar ecuaciones cuadráticas. . . cuando ellos necesitan factorizar un expresión dada, tienen que identificar a qué caso pertenece para poder decidir cómo factorizar. (Ent. 2)</p>	Alex
<p>Primero vemos 'expresión algebraica' y 'valor numérico', y luego 'operaciones con expresiones algebraicas' . . . mostrándoles que lo que uno hace en aritmética es lo mismo que hace en álgebra . . . (Ent. 1)</p>	<p>Primero vemos 'expresión algebraica' y 'valor numérico', y luego 'operaciones con expresiones algebraicas' . . . mostrándoles que lo que uno hace en aritmética es lo mismo que hace en álgebra . . . (Ent. 1)</p>	Pacho

*Tabla N° 2. Descripciones y explicaciones de los profesores sobre la forma como inician el trabajo algebraico en Grado 8 y como enseñan el tema de 'factorización'*

Las descripciones y explicaciones de los profesores sobre su forma de enseñar y la forma como los alumnos aprenden iniciaron con sus selecciones 'Número 1', en el Cuestionario 1, tanto de los estilos de enseñanza (*preferidos* y *reales*) como del trabajo asignado a los alumnos. La continua comparación de información obtenida a través de las diferentes actividades e instrumentos de recolección, mostró claramente que dentro de los cinco profesores — y efectivamente dentro de los nueve estudios de caso — Pablo y Pacho se distinguían por la consistencia en sus descripciones y justificaciones sobre sus estilos de enseñanza a lo largo de todo el proceso recolección de información. Esto se puede ver en la Tabla N° 3, donde se presenta un resumen de la información acerca de sus enfoques de enseñanza, recogida a través del Cuestionario 1, la Entrevista 1, el Cuestionario 2 y las Entrevistas 2 y 3.

Mientras que la intención de Pablo era involucrar activamente a sus alumnos en la generación de expresiones algebraicas y sus reglas de operación, los otros cuatro profesores seguían el enfoque instrumentalista y formalista del texto guía: presentar expresiones simbólicas *prefabricadas*, definiciones y algoritmos de procedimiento, haciendo énfasis en un modelo transmisivo y promoviendo una visión “externa” (Dossey, 1992) de la naturaleza del conocimiento algebraico. Para Clara, Leo, Alex y Pacho los alumnos aprenden diciéndoles cómo seguir cada paso de un procedimiento determinado, y el éxito de una clase para ellos está representado en la motivación que los alumnos muestren por la práctica repetitiva que ellos les exponen. Para Pablo, los alumnos necesitan encontrar sentido a los algoritmos mediante su participación activa en las actividades que él les diseña, y el éxito de su clase depende de la actividad misma.

Hay que resaltar que de entre los profesores con una orientación instrumentalista, Pacho defendía una posición extremista pues hacía más énfasis en la necesidad de seguir minuciosamente la secuencia planteada en un texto guía específico, y de explicar a los alumnos, los procedimientos a seguir, paso por paso. Sobre la base de estos hallazgos se hizo un primer intento de categorizar las concepciones sobre 'el inicio del trabajo algebraico escolar' de los profesores, teniendo como referente la 'visión instrumentalista' versus la de 'resolución de problemas' de Ernest (1989, 1991). Pablo y Pacho quedaron ubicados en los lados opuestos de un 'continuo', y Clara, Leo y Alex en la mitad.

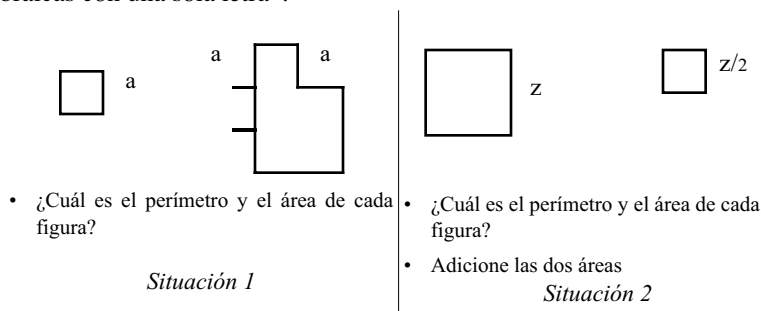
### *Concepciones de los profesores sobre los factores determinantes cruciales de su práctica de enseñanza*

Durante la Entrevista 1, fuera de describir lo que hacían en la enseñanza de temas específicos, los profesores dieron razones para justificar diferencias en la asignación de números para indicar prácticas de enseñanza *preferidas*

	Pablo	Clara	Leo	Alex	Pacho
Em. 3	Promover la creación de conexiones entre conceptos.	Organizar actividades basadas en situaciones problemáticas	Promover la creación de conexiones entre conceptos	Trabajar en el desarrollo de las capacidades de comunicación	Dar explicaciones claras de los procedimientos a seguir ...
Em. 2	Los alumnos necesitan ver de dónde salen las expresiones, las razones por las cuales están sumando polinomios, entonces yo inicio con situaciones simples de área y perímetro ... El enfoque del profesor B es el de resolución de problemas. Yo no creo que él siga un texto guía, dado el tipo de trabajo y los métodos que él o ella usa. Los alumnos convierten expresiones como $2a + b$ en $3ab$ , por ejemplo. ... [por esta razón] estoy diseñando una actividad ... la llamo 'vender y comprar' ... Diseño las actividades sobre la base de lo que conecta para mí, pero lo importante es que conecte para los alumnos ... Los tres profesores que discutimos en el Grupo focal siguen un enfoque de resolución de problemas. Ellos diseñan actividades de acuerdo a sus propósitos, que son muy claros.	Dar explicaciones claras de los procedimientos a seguir ... Antes de que trabajen en problemas necesitan aprender a operar con expresiones algebraicas, y de eso se trata el álgebra de Grado 8. Son las rutinas. Es necesario ponerle atención al tipo de trabajo del profesor A [i.e., sea, siga el patrón: algoritmo, ejercicios repetitivos] porque a muchos alumnos les cuesta ... y termina uno dándoles las ideas. Para empezar a prepararlos para la solución de problemas yo les doy ejercicios 'de traducción' donde ellos tienen que escribir en matemáticas lo que se les da en español, y que mecanizaran ... En esas [3] clases [consecutivas, centradas en la solución de 20 ejercicios de un caso de factorización] yo quería que ellos identificarán la estructura de la expresión y que mecanizaran ... Con frecuencia, antes de dárles los ejercicios, yo les explico los procedimientos a seguir para que cometan errores. ...	Promover la creación de conexiones entre conceptos	Trabajar en el desarrollo de las capacidades de comunicación	Dar explicaciones claras de los procedimientos a seguir ...
Em. 1	Los alumnos necesitan ver de dónde salen las expresiones, las razones por las cuales están sumando polinomios, entonces yo inicio con situaciones simples de área y perímetro ... El enfoque del profesor B es el de resolución de problemas. Yo no creo que él siga un texto guía, dado el tipo de trabajo y los métodos que él o ella usa. Los alumnos convierten expresiones como $2a + b$ en $3ab$ , por ejemplo. ... [por esta razón] estoy diseñando una actividad ... la llamo 'vender y comprar' ... Diseño las actividades sobre la base de lo que conecta para mí, pero lo importante es que conecte para los alumnos ... Los tres profesores que discutimos en el Grupo focal siguen un enfoque de resolución de problemas. Ellos diseñan actividades de acuerdo a sus propósitos, que son muy claros.	Dar explicaciones claras de los procedimientos a seguir ... Antes de que trabajen en problemas necesitan aprender a operar con expresiones algebraicas, y de eso se trata el álgebra de Grado 8. Son las rutinas. Es necesario ponerle atención al tipo de trabajo del profesor A [i.e., sea, siga el patrón: algoritmo, ejercicios repetitivos] porque a muchos alumnos les cuesta ... y termina uno dándoles las ideas. Para empezar a prepararlos para la solución de problemas yo les doy ejercicios 'de traducción' donde ellos tienen que escribir en matemáticas lo que se les da en español, y que mecanizaran ... En esas [3] clases [consecutivas, centradas en la solución de 20 ejercicios de un caso de factorización] yo quería que ellos identificarán la estructura de la expresión y que mecanizaran ... Con frecuencia, antes de dárles los ejercicios, yo les explico los procedimientos a seguir para que cometan errores. ...	Promover la creación de conexiones entre conceptos	Trabajar en el desarrollo de las capacidades de comunicación	Dar explicaciones claras de los procedimientos a seguir ...

Tabla N° 3. Enfoques de enseñanza expuestos y defendidos por los cinco profesores a lo largo del proceso de recolección de información

y reales y, por iniciativa propia, evaluaron los resultados de su trabajo en el aula. En la Entrevista 2, volvieron a ofrecer evaluaciones de los resultados de su trabajo, que se basaban en el logro de su objetivo de enseñanza. Por ejemplo, cuando se les formularon preguntas acerca de incidentes observados en sus aulas (con el propósito de clarificar y/o comparar con la información ya recogida), Clara, Leo, Alex y Pacho continuaron expresando su insatisfacción con el comportamiento de los alumnos y a este factor atribuyeron “los bajos resultados” de su trabajo. Pablo, al contrario, hablaba de las limitaciones del tipo de trabajo que él diseñaba “para que todos [pudieran] entender”, y atribuyó las dificultades mostradas por algunos de los alumnos a “[su] limitado conocimiento de la enseñanza de las matemáticas”. La Figura N° 1 muestra dos ejemplos de las “preguntas simples” que Pablo diseñaba<sup>7</sup> “para ayudar a los alumnos a construir expresiones algebraicas con una sola letra”.



*Figura N° 1. Ejemplos de las “preguntas simples” que Pablo diseñaba para la introducción de expresiones algebraicas*

Después de dibujar las figuras en el tablero, les pidió a los alumnos que las dibujaran en sus cuadernos y midieran los lados de sus figuras, porque:

Quiero que los alumnos vean que  $a$  puede representar un número diferente para cada uno, y que las áreas de las figuras dependen del valor de  $a$ . . . . y luego que expliquen y discutan los métodos usados para hallar los perímetros y las áreas . . . (Notas de campo)

Con relación a mis preguntas sobre las dificultades que unos pocos de sus treinta alumnos - que durante toda la clase mostraron gran atención y motivación por el trabajo propuesto - tuvieron al identificar el coeficiente de  $Z^2$ , para sumar las áreas, Pablo dijo: “Yo sé que algunos alumnos no entienden.

7. Mayor información sobre el trabajo de clase que Pablo organizaba se puede encontrar en Agudelo-Valderrama (2004b).



Tengo que mejorar las preguntas y las actividades pero es difícil diseñar actividades que funcionen para todos ellos. . . . mi mayor preocupación ha sido darles más trabajo a los más rápidos . . . (Ent. 2). La meta central de Pablo, de “ayudar a los alumnos a que vean la funcionalidad de lo que están aprendiendo no se puede alcanzar siguiendo el enfoque del texto guía” porque

los libros traen una lista de ejercicios después de haber presentado una definición o un algoritmo. Si uno presenta las matemáticas como una lista de ejercicios que 'usted tiene que hacer así porque el libro lo dice', sin poder ver de dónde pueden salir las cosas, los alumnos no le encuentran sentido. . . . Darles a los alumnos una lista de ejercicios para que 'apliquen la regla' es enseñar las matemáticas como unas matemáticas muertas . . . (Ent. 1)

Clara, Leo, Alex y Pacho, quienes en sus argumentos y en su práctica del aula favorecían la aplicación repetitiva de un algoritmo de procedimiento dado, señalaron “la falta de motivación de los alumnos” o “su inadecuado conocimiento prerequisite” como las causas de “los bajos resultados” de su enseñanza. A excepción de Pablo, todos los demás participantes del estudio coincidieron en la identificación de estos factores como determinantes de lo que sucedía en sus aulas de clase. Clara, por ejemplo, no creía que los alumnos pudieran crear sus propias ideas matemáticas. La siguiente transcripción muestra las ampliaciones que Clara hizo, durante la Entrevista 1, de su respuesta a la Pregunta C3 del Cuestionario 1(ver la Figura N° 2):

---

C3. Hacia finales del año escolar, usted les pide a sus alumnos de Grado octavo que hallen el área de un rectángulo cuyos lados son  $5$  y  $2 + e$ . Muchos de los alumnos (de un grupo de 30) contestan lo siguiente:

$$A = 5(2 + e) = 10 + 5e = 15e$$

$$A = 15e$$

a) ¿Qué piensa de la respuesta de estos alumnos?

.....

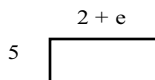
b) ¿Qué les diría a estos alumnos?

---

*Figura N° 2. Pregunta C3 - Sección C del Cuestionario 1*

Entrevistadora: . . . ¿Cree que los alumnos pensaron en un rectángulo cuya área estaba representada por la expresión  $5(2 + e)$ ?

Clara: No. Yo no creo que ellos pensaron en el diagrama [pausa]. Tal vez, si uno les pide que dibujen el rectángulo, ellos lo dibujarían y pondrían las expresiones a los lados así:



Entrevistadora: Pero si se les diera oportunidades para que ellos conectaran sus ideas de área con preguntas como ésta, ¿podrían resultar con alguna idea, por ejemplo, sobre cómo establecer un procedimiento a seguir cuando se adicionan expresiones como éstas [señala la expresión ' $10 + 5e$ ']?

Clara: De observar el diagrama ellos hacen  $5(2 + e)$  y este pedacito: ' $10 + 5e$ '. El resto lo hacen sólo con su conocimiento de la ley distributiva, pro no mirando el diagrama. A ellos les cuesta esto. ¡Les cuesta mucho! No les vendría a la mente pensar en el diagrama del área para esta pregunta; por eso es que yo termino diciéndoles para ayudarles a salir del apuro.

Pacho quien alegó con orgullo que él se sabía “de memoria el texto guía” que usaba, explicó en la Entrevista 2 que la poca participación de los alumnos en las competencias<sup>8</sup> de “los cinco primeros” que tuvieron lugar en sus clases (observadas), y “los malos resultados” de su enseñanza se debían a la falta de motivación de los alumnos por el aprendizaje del álgebra:

Entrevistadora: Cuando les dio el primer ejercicio, les dijo: 'este ejercicio es para los que ya entendieron'. ¿Por qué dijo 'para los que ya entendieron'?

Clara: Con eso yo me refería a los de más habilidad. Los que entienden primero, que obviamente son los que siempre están poniendo atención . . .

En varias ocasiones Pacho argumentó que como profesor él siempre hacía lo que tenía que hacer (e.g., “explicarles a los alumnos los procedimientos a seguir como si ellos fueran bebés . . .”) pero que los bajos resultados de su trabajo se debían a la falta de interés de los alumnos, y que esta situación se agravaba “con la nueva regulación que no permite que más del 5% del número de alumnos del curso pierdan la materia”. Declaró, además, que estaba “muy insatisfecho con la situación” y que “la ley del 5% necesita[ba] ser abolida”.

¡Ya expliqué que el problema son los resultados de los alumnos! . . .  
 . su falta de interés en el trabajo: no hacen la tarea y tienen muy malas notas en las evaluaciones. Se les da otra oportunidad al final del pe-

8. Después de haber explicado cómo aplicar un algoritmo a un(os) ejercicio(s) dado(s), Pacho ofrecía una buena calificación a los 5 primeros alumnos del curso que terminaran un ejercicio similar dado.

ríodo, pero tampoco hacen nada ¡y así tengo que pasarlos por la regulación del 5%! ¡Como ellos y sus padres saben que toca pasarlos!  
(Ent. 2)

Para Leo, “la falta de éxito” de su trabajo de enseñanza [durante las tres clases consecutivas que dedicó a la solución de 20 ejercicios del “Caso 1 de factorización (factor común)” se debía al “estrato socioeconómico de los alumnos y a su deficiente conocimiento prerequisite”. Enseñarles a esos niños era “una tarea altamente complicada:”

Ellos pertenecen a un estrato social donde los padres no se interesan por los logros académicos de sus hijos. . . . No me gusta enseñar álgebra cuando los alumnos tienen dificultades para seguir las instrucciones que se les dan. Me gusta enseñar álgebra pero cuando los alumnos ya han sobrepasado ciertas deficiencias; cuando el alumno no tiene problema . . . (Ent. 2). . . ¡El comportamiento de los alumnos me hace perder el ritmo de mi práctica! (Ent. 3)

Y Alex alegó en repetidas ocasiones que la raíz del problema estaba en “la fobia de los estudiantes hacia las matemáticas . . .”. En la Tabla N° 4 se presenta un resumen representativo de los estilos de enseñanza que los cinco profesores defendieron como centrales en su trabajo en Grado 8 y de las evaluaciones que hicieron de su práctica de enseñanza, durante todo el proceso de recolección de información.

	<b>Pablo</b>	<b>Clara</b>	<b>Leo</b>	<b>Alex</b>	<b>Pacho</b>
<b>Principal estilo de enseñanza</b>	Promover la identificación de conexiones entre conceptos mediante la organización de situaciones problemáticas contextualizadas	Dar explicaciones claras de las reglas de manipulación de expresiones algebraicas	Explicar los pasos a seguir en la solución de una lista de ejercicios, que representan preguntas del estilo tradicional	Explicar las reglas de procedimiento necesarias para solucionar los ejercicios del texto guías	Dar explicaciones claras, y con el mayor detalle posible, de los procedimientos a seguir en la manipulación de expresiones algebraicas
<b>Evaluación de resultados</b>	Mis actividades funcionan para la mayoría de los alumnos, pero no para todos . . . tengo que mejorar las actividades	Los resultados del trabajo del aula no son buenos por la falta de motivación de los estudiantes	El desempeño de los alumnos no es bueno debido a que no tienen el conocimiento prerequisite, y a sus problemas familiares	Los resultados son simplemente satisfactorios . . . debido a la fobia que los estudiantes tienen a las matemáticas	Los estudiantes están fascinados con mi forma de enseñar, pero los resultados no son buenos debido a su falta de conocimiento prerequisite

Tabla N° 4. Resumen representativo de los estilos de enseñanza defendidos por los profesores, y de sus evaluaciones de los resultados de su trabajo

*La relación existente entre las concepciones de los profesores sobre el inicio del trabajo algebraico escolar y sus concepciones de los factores determinantes de su práctica de enseñanza*

Como se observa en las Tablas N° 2, 3 y 4, los profesores proporcionaron evidencias fuertes no solamente de sus concepciones del inicio del trabajo algebraico escolar sino, además, de sus roles como profesores y de los factores determinantes de su práctica.

La comparación y la corroboración de esta información condujeron a la identificación de conexiones entre las concepciones que los profesores tenían de su principal rol como profesores y los factores a los que *atribuían* lo que sucedía en sus aulas de clase. Las atribuciones *internas* y *externas* de la teoría de Weiner (1980) en la dimensión de la “localización del control” se usaron en la Tabla N° 5 para categorizar los factores que los profesores identificaron como *cruciales* en su práctica de enseñanza, durante las Entrevista 1 y la primera parte de la Entrevista 2. Los profesores con un estilo de enseñanza basado en 'dar explicaciones claras de los procedimientos a seguir para manipular expresiones simbólicas dadas', atribuían los resultados insatisfactorios de su enseñanza a factores *externos* (a ellos), a aspectos relacionados primordialmente con los alumnos. En cambio Pablo, quien estaba preocupado por lograr que sus alumnos asumieran seriamente su responsabilidad de crear sus propias ideas matemáticas, y de “no darles unas reglas para aplicar a una lista de ejercicios del texto guía”, atribuyó la falta de éxito de algunos alumnos “para establecer las conexiones” (que él quería que identificaran) a su inadecuado conocimiento de la enseñanza de las matemáticas.

	<b>Pablo</b>	<b>Clara</b>	<b>Leo</b>	<b>Alex</b>	<b>Pacho</b>
<b>Rol principal</b>	No ser trasmisor	Trasmisor	Trasmisor	Trasmisor	Trasmisor
<b>Justificaciones de los resultados insatisfactorios</b>	Mi limitado conocimiento de la enseñanza	El comportamiento de los alumnos	El comportamiento y el bajo conocimiento de los alumnos	El comportamiento de los alumnos	El bajo interés de los alumnos
<b>Localización del control</b>	Interno	Externo	Externo	Externo	Externo

*Tabla N° 5. Concepciones de los profesores sobre su principal rol, y sus justificaciones de “los resultados insatisfactorios”*

Como se planteó en la Tabla N° 1, un propósito específico de la construcción del mapa conceptual 'de los factores que influyen en sus práctica de enseñan-

za' era explorar, una vez más, las maneras como los profesores veían su práctica de enseñanza del álgebra en el contexto específico de la institución donde trabajaban. Esta exploración adicional se llevó a cabo durante la segunda parte de la Entrevista 2, cuando se habló de sus prácticas de enseñanza actual, y durante la Entrevista 3, cuando se consideraron las posibilidades de incorporar un enfoque de resolución de problemas en la enseñanza del álgebra en Grado 8. La actividad de construcción del mapa conceptual tuvo lugar en tres etapas. Durante las dos primeras etapas que se desarrollaron en la segunda parte de la Entrevista 2, los profesores construyeron el mapa conceptual *inicial*. La tercera etapa, que tuvo lugar después de que los profesores habían tenido la oportunidad de discutir (en el Grupo focal) enfoques de enseñanza alternativos, fue la revisión del mapa conceptual 'inicial', de donde salió el mapa *final*.

Durante la construcción del mapa 'inicial' Pablo continuó manteniendo una posición que contrastaba con las de Clara, Leo, Alex y Pacho, y en general con las de los otros ocho profesores seleccionados para los estudios de caso. En tanto que Pablo hacía énfasis en el rol de factores *internos*, como su “conocimiento y disposición” como profesor en su práctica de enseñanza, Pacho atribuía “los bajos resultados” exclusivamente a factores *externos*. Para Pablo:

Todo depende del conocimiento y la *disposición* del profesor. . . . Con la 'disposición' del profesor' me refiero a algo así como la *filosofía* que el profesor tiene de la enseñanza de las matemáticas: [i] El tiempo que dedica para la preparación del trabajo de clase. Por ejemplo, puede haber algunos [profesores], que simplemente repiten la misma lista de preguntas cada año. [ii] El deseo de mejorar lo que uno hace y el interés por aprender y saber más. Algunos compañeros solo quieren enseñar en Grados 6 y 7 todo el tiempo. '¡Ah no! Yo no quiero coger los Grados 10 y 11 porque no he enseñado en esos cursos desde hace mucho tiempo . . .' [iii] El agrado con que uno hace su trabajo. ¿Hago esto porque tengo que hacerlo o porque es lo que quiero? Algunos profesores no quieren ser sino los *repetidores* de unas rutinas. En una palabra, es la filosofía de la enseñanza de las matemáticas. (Pablo, Ent. 2 - Parte 2)

Para Pacho, quien parecía sentirse orgulloso de su estilo de enseñanza, “el conocimiento del profesor es clave para su práctica de enseñanza”, pero esta afirmación era aplicable, por ejemplo, para “un profesor de la escuela primaria que estuviera enseñando en la secundaria” y no para él porque él era Licenciado en Matemáticas y tenía mucha experiencia como profesor:

¿Qué matemáticas puede enseñar un profesor que no sabe matemáticas? Si un profesor tiene una Licenciatura en matemáticas y un puesto con el Estado [como en el caso suyo] es porque ese profesor es competente en su profesión. El conocimiento pedagógico se construye solamente con la experiencia. Mi conocimiento matemático no tiene nada que ver con el aprendizaje de los alumnos. Yo puedo ser un genio, pero si los alumnos no quieren aprender, ¡no aprenden! ¡Estos alumnos no aprenden ni porque Newton viniera a enseñarles! (Pacho, Ent. 2 - Parte 2)

Pacho no aceptó considerar 'el conocimiento del profesor' como uno de los factores a incluir en su lista de los que influían en su propia práctica. Clara, Leo y Alex, a pesar de reconocer “la importancia del conocimiento del profesor”, durante la segunda etapa de la construcción del mapa conceptual cuando se les planteó el tema, continuaron identificando factores externos a ellos para justificar lo que sucedía en sus aulas de clase (ver la Tabla N° 6).

Como hallazgo sorprendente de este estudio, Pablo - uno de los profesores principiantes que mostró gran rechazo por los enfoques del texto guía y alta creatividad en el diseño y organización de actividades del aula, y que durante los cinco primeros meses del período de recolección de información explicitó su gran consciencia del impacto que su “conocimiento y disposición” tenían sobre su práctica de enseñanza - empezó a dar gran prioridad a factores específicos contextuales de su enseñanza<sup>9</sup>. Pablo empezó a preocuparse por “las expectativas de los alumnos y su padres, de cubrir totalmente la lista de temas establecidos para el Grado 8”, ya que él tenía que cumplir con las exigencias de los padres, “porque ellos tienen gran poder en el colegio . . .”; entonces él tenía que reestructurar su enseñanza para poder cumplir con los deberes exigidos:

Las actividades que discutimos en el Grupo focal, me parece que son excelentes para ayudarles a los alumnos a encontrar sentido en su trabajo matemático, pero éstas requieren dedicar un tiempo considerable en el aula de clase. . . . debido al factor tiempo, algunas veces he tenido que hacer cosas como el profesor A [i.e., actuar como un trasmisor y presentador de reglas . . .]. Si yo fuera a enseñar en Grado 8 el próximo año, ahora que ya sé cómo funciona este colegio, tendría que trabajar con actividades mucho más cortas que las que he trabajado este año porque el tiempo no alcanza ¡y uno tiene que cubrir el programa! (Ent. 3)

9. Un breve resumen del estudio de caso de Pablo se encuentra en Agudelo-Valderrama (2004a) y la descripción completa se puede ver en Agudelo-Valderrama (2004b).

La Tabla N° 6 contiene un resumen de los factores identificados por los profesores como *cruciales* en su enseñanza de Grado 8 tanto en sus mapas conceptuales como en sus argumentos ofrecidos durante el Grupo focal y la Entrevista 3, cuando se consideraron y discutieron las posibilidades de incorporar un enfoque de resolución de problemas en el inicio del trabajo algebraico escolar.

	<i>Pablo</i>	<i>Clara</i>	<i>Leo</i>	<i>Alex</i>	<i>Pacho</i>	
<i>Mapa conceptual inicial</i>	Etapa 1: Identificando los factores cruciales de su práctica	• Mi conocimiento y disposición	• Las actitudes de los alumnos	• El comportam. y conocimiento de los alumnos	• La motivación de los estudiantes	<ul style="list-style-type: none"> <li>• La legislación permisiva</li> <li>• La falta de interés de los alumnos por aprender, y su deficiente conocimiento prerequisite</li> <li>• La falta de cooperación de los padres</li> </ul>
<i>(Ent. 2 -Parte 2)</i>	Etapa 2: Discutiendo el rol del conocimiento del profesor	• Mi conocimiento y disposición	• El conocimiento y la visión del profesor	• El comportam. y conocimiento de los alumnos	• La motivación y conocimiento de los estudiantes	
<i>Mapa conceptual final</i>	Etapa 3: Revisando el mapa conceptual inicial	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Tiempo para la enseñanza</li> <li>• Mi conocimiento y disposición</li> </ul>	• Tiempo para la enseñanza	• El conocimiento del profesor	• La motivación en la relación estudiante-profesor	N/A [Ver nota al respecto en la Tabla N° 3]
<i>Grupo focal y discusión en Ent.</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Tiempo para la enseñanza</li> <li>• Mi conocimiento y disposición</li> </ul>	• El tiempo	• El contexto social de los alumnos y su forma de aprender	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Los textos guía</li> <li>• El tiempo</li> <li>• El programa</li> </ul>		

*Tabla N° 6. Concepciones de los profesores sobre su principal rol, y sus justificaciones de “los resultados insatisfactorios”*

A medida que Pablo iba ganando conocimiento de aspectos específicos del funcionamiento del colegio, su seguridad sobre la posibilidad de seguir enseñando de acuerdo a su estilo 'preferido' fue disminuyendo; por esta razón sus concepciones de las determinantes cruciales de su enseñanza se categorizaron como 'principalmente internas', en cambio de 'internas'. En la Tabla N° 7 se presentan las categorizaciones de los factores (listados en la Tabla N° 6) identificados por los profesores como cruciales en su práctica de enseñanza.

<i>Pablo</i>	<i>Clara</i>	<i>Leo</i>	<i>Alex</i>	<i>Pacho</i>
<i>Principalmente internos</i>	<i>Principalmente externos</i>	<i>Principalmente externos</i>	<i>Principalmente externos</i>	<i>Principalmente externos</i>

*Tabla N° 7. Categorizaciones de los factores que los profesores identificaron como determinantes cruciales de su enseñanza del inicio del trabajo algebraico escolar*

*Las percepciones de los profesores de su 'eficacia personal'*. Bandura (1997) define la 'percepción de la eficacia propia' (“*perceived self-efficacy*”) de las personas como “las creencias que la gente tiene acerca de sus propias capacidades para producir determinados efectos por medio de sus acciones” (p. vii) o como “las creencias sobre las capacidades que uno (una) tiene para organizar y ejecutar el conjunto de acciones necesarias para alcanzar determinados logros” (p. 3). Bandura argumenta que la gente vive su vida de acuerdo con las creencias que tiene de su propia eficacia, y Jerusalem y Mittag (1995) aseguran que “las personas con una percepción alta de su propia eficacia confían en sus capacidades para responder positivamente a las demandas de su trabajo o de su entorno, demandas que toman más como retos que como amenazas” (p. 177).

Reconociendo el hecho de que la percepción que los profesores tienen de su propia eficacia se está convirtiendo en centro de atención en la investigación educativa, Philoppou y Christou (2002) tomaron de Bandura (1986, 1997) el constructo de la 'percepción de la eficacia propia' para definir eficacia con respecto a la enseñanza de cualquier materia como “la seguridad que un(a) profesor(a) tiene en sus capacidades para organizar y orquestar ambientes de aprendizaje efectivos” (p. 216), constructo al que, de aquí en adelante, me referiré como la *percepción de la eficacia personal*.

A lo largo de todo el proceso de recolección de información los profesores proporcionaron evidencias claras y suficientes de sus 'percepciones de su eficacia personal'; esto es, de sus creencias en sus capacidades de producir efectos y situaciones deseadas en el aula, por medio de sus acciones. Cuando explicaban su práctica real y las razones de “los resultados insatisfactorios” expusieron sus creencias acerca de sus capacidades para producir, por medio de sus acciones, los resultados que deseaban de parte de sus alumnos, en términos de su motivación por el aprendizaje del álgebra. Así mismo, sus declaraciones acerca de las posibilidades (o imposibilidades) de introducir un enfoque de resolución de problemas en su enseñanza proporcionaron evidencia de su percepción de su 'eficacia personal' y de sus concepciones sobre los factores determinantes cruciales de sus práctica de enseñanza. Clara, Leo, Alex y Pacho culpaban a los alumnos (aunque en diferentes grados) por los resultados insatisfactorios de su práctica de enseñanza. Mientras que para Clara, Leo y Alex los enfoques de enseñanza discutidos durante el Grupo focal eran “muy buenos . . . para motivar a los alumnos . . . y ayudarles a ver las aplicaciones de las matemáticas”, la incorporación de esos enfoques en sus aulas era “difícil” (ver la Tabla N° 6) por:

La falta de tiempo . . . y los alumnos necesitan aprender las formaciones . . . (Clara)



El contexto social de los alumnos . . . ellos no aprenden las formalizaciones que van a necesitar en la universidad . . . - ni siquiera cuando se les explica todo, paso por paso. (Leo)

. . . el hecho de que en los textos todo [i.e., cada tema] viene descontextualizado. (Alex)

Mientras que Clara, Leo y Alex identificaron (durante la Entrevista 3) la incorporación de algún cambio en su enseñanza como algo necesario - porque querían buscar una forma de motivar a los alumnos - pero *difícil*, por razones principalmente externas a ellos, Pacho no vio ninguna necesidad de cambiar su bien establecida rutina de enseñanza porque “los malos resultados” de su trabajo eran debidos a factores que nada tenían que ver con su enseñanza. Esto nos evidencia una interrelación entre las concepciones de los profesores sobre los factores determinantes cruciales de su enseñanza, su percepción de su eficacia personal y su actitud hacia el cambio.

*Interrelaciones entre las concepciones de los profesores sobre la naturaleza del inicio del trabajo algebraico escolar y los factores determinantes de su enseñanza, su percepción de su eficacia personal y sus actitudes hacia el cambio* . La razón por la cual Clara, Leo, Alex y Pacho culpaban a sus alumnos por la situación de su enseñanza estaba en sus creencias sobre la naturaleza del conocimiento algebraico - o sea en sus *formas de saber* (Bishop, 1988; Cooney, 1999) - y, por ende, sobre cómo se aprende el álgebra. Hay interrelaciones entre las concepciones de los profesores sobre la naturaleza del conocimiento algebraico, los factores determinantes cruciales de su práctica de enseñanza (localización del control), su percepción de su eficacia personal y su actitud hacia el cambio. Como la forma de saber los conceptos algebraicos de Pablo contrastaba con las de los demás profesores participantes, él no culpaba a los alumnos. Pablo tenía consciencia de las limitaciones de su conocimiento de la enseñanza de las matemáticas, pero tenía una percepción alta de su capacidad de aprender y mejorar sus actividades de clase. En otras palabras, él consideraba el *cambio* como un parte integral de su práctica de enseñanza, pues hacía énfasis en la necesidad de mejorar continuamente el trabajo que organizaba para el aula de clase, mostrando así una actitud *positiva* hacia el cambio, al contrario de Pacho quien se oponía a cualquier cambio en su práctica. Se puede decir que la percepción de la eficacia personal de Pacho era más baja que la de Clara, Leo y Alex, pues Pacho no quería desviarse de su ruta de enseñanza, que sabía “de memoria”, en el inicio del trabajo algebraico porque “los alumnos se pueden confundir y perder”. En la Tabla N° 8 se presenta un resumen de las categorizaciones de las concepciones de los cinco profesores.

	<b>Pablo</b>	<b>Alex</b>	<b>Leo</b>	<b>Clara</b>	<b>Pacho</b>
<i>Concepción de la naturaleza del conocimiento algebraico</i>	Interno	Externo	Externo	Externo	Externo
<i>Concepción de los factores determinantes cruciales de su práctica</i>	Principalmente internos	Principalmente externos	Principalmente externos	Principalmente externos	Principalmente externos
<i>Percepción de su 'eficacia personal'</i>	Alta	Baja	Baja	Baja	Baja*
<i>Actitud hacia el cambio</i>	Positiva	Negativa	Negativa	Negativa	Totalmente Negativa

*Tabla N° 8. Categorización de las concepciones de los profesores sobre la naturaleza del conocimiento algebraico, los factores determinantes cruciales de su enseñanza, su percepción de su 'eficacia personal' y sus actitudes hacia el cambio*

\*. La percepción que Pacho tenía de su eficacia personal era más baja que la del resto de profesores

### *Explicaciones de las actitudes de los profesores hacia el cambio: Un modelo*

El resumen de categorizaciones de las concepciones de los profesores muestra que de sus concepciones de la naturaleza del conocimiento algebraico se desprendían sus concepciones de las determinantes cruciales de su práctica de enseñanza, señalando dos grupos básicos de profesores: los cuatro profesores para quienes el conocimiento algebraico es producido externamente y Pablo para quien el conocimiento algebraico es producido internamente. Para Clara, Leo, Alex y Pacho el conocimiento es pasado de los libros o los profesores a los alumnos. El hecho de que los alumnos no aprenden se explica por su falta de motivación o de conocimiento prerrequisito, y ante estas circunstancias estos profesores no pueden hacer nada (esto es, baja percepción de su eficacia personal); por tanto los factores determinantes cruciales de su enseñanza están representados en aspectos del comportamiento de los alumnos (i.e., atribuciones externas o localización externa del control). En cambio, para Pablo los alumnos necesitaban construir o asignar significado a su trabajo algebraico, y él se sentía capacitado para diseñar y organizar actividades de clase con este propósito (i.e., alta eficacia personal). Él creía que su conocimiento y disposición eran factores determinantes cruciales del enfoque de enseñanza que estaba tratando

de poner en acción (i.e., atribuciones internas o localización interna del control, aunque, como ya se explicó, su conocimiento, sus creencias y actitudes sociales lo caracterizan como profesor de 'atribuciones principalmente internas', ver la Tabla N° 7). Se evidencia una asociación directa entre las *formas de saber* (el álgebra escolar) de los profesores y su actitud hacia el cambio, pues sus formas de saber determinaban la consideración (o no consideración) de introducción de cambios en el *qué* y en el *cómo* de su enseñanza en el inicio del trabajo algebraico escolar. En la Figura N° 3 se presenta un modelo básico que intenta ilustrar las relaciones identificadas entre las concepciones de un profesor sobre la naturaleza del conocimiento algebraico, las determinantes cruciales de su práctica de enseñanza, su percepción de su eficacia personal y su actitud hacia el cambio. Estas interrelaciones fueron identificadas no sólo mediante el estudio de las concepciones de estos cinco profesores, sino también de los otros cuatro estudios de caso (recuérdese que eran nueve). El análisis de la información recogida de los trece profesores, en la Fase 1, mostró los mismos patrones de interacción entre sus concepciones de la naturaleza del conocimiento algebraico y sus concepciones de las determinantes cruciales de su enseñanza, como se puede ver en Agudelo-Valderrama (2004b).

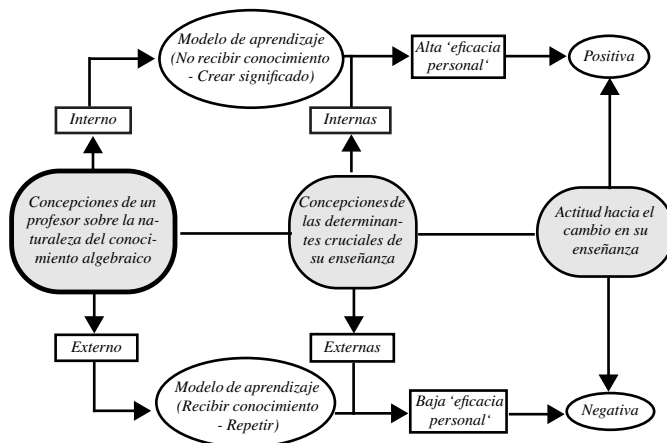


Figura N° 3. Un modelo básico que explica interrelaciones entre las concepciones de un profesor sobre la naturaleza del conocimiento algebraico, las determinantes cruciales de su práctica de enseñanza, su percepción de su eficacia personal y su actitud hacia el cambio

El resumen de categorizaciones de las concepciones presentado en la Tabla N° 8 también muestra que mientras hay una dicotomía entre las concepciones de los profesores sobre la naturaleza del conocimiento algebraico (Externo vs. Interno), sus concepciones de los factores determinantes cruciales de su enseñanza varían de acuerdo con la primacía que asignaban al rol de factores externos a ellos. Se puede identificar una *dimensión* en sus concepciones de las determinantes más importantes de su práctica de enseñanza. Esta dimensión está definida por las concepciones de Pablo y Pacho a los lados opuestos, y las de Clara, Leo y Alex en la mitad (ver, también, la Tabla N° 7). Los hallazgos muestran que ninguno de los profesores participantes conceptualizaba el inicio del trabajo algebraico escolar como una actividad de enseñanza y aprendizaje a través de la cual se desarrolla el *pensamiento crítico* del individuo, como lo abogan las disposiciones educativas; ninguno veía su rol como el de 'constructor permanente de un currículo escolar' que promueva la formación de ciudadanos críticos; en lugar de ello, veían su rol como el de ejecutores de las decisiones de autoridades externas. En otras palabras, el profesor que promueve un enfoque de *resolución de problemas*, quien por inferencia —de los patrones de interacción identificados entre las concepciones de los profesores del inicio del trabajo algebraico y de los factores determinantes de su práctica— tendría 'atribuciones internas' no se encontró, y hay poca posibilidad de encontrar este tipo de profesor en Colombia, dado el contexto que se describió.

## Conclusiones e implicaciones

Los estudios de caso de estos cinco profesores nos han enseñado que la *forma de saber* el álgebra escolar de un profesor representa la base de los propósitos pedagógicos que sustentan su práctica de enseñanza preferida. La 'forma de saber' de un profesor llevaba consigo unas actitudes hacia (en este caso) la iniciación del trabajo algebraico, hacia sus estudiantes y hacia la introducción de cambio en su enseñanza, y una percepción específica de su 'eficacia personal'. Como se vio en la 'dimensión' identificada de concepciones de las determinantes de sus prácticas, entre más la forma de saber de un profesor se centraba en un secuencia fija de tareas fraccionadas para la manipulación de expresiones simbólicas dadas, más baja era su percepción de su 'eficacia personal', y menos posibilidad de considerar enfoques alternativos en su enseñanza.

Los profesores de este estudio quienes fueron seleccionados para representar a grupos de profesores con una variedad tanto de concepciones como de trayectorias y experiencias profesionales —esto es, conformaban un grupo escogido para representar un grupo de *variación máxima* (Patton, 1990)— nos mostraron que ellos no ven sus concepciones de las matemáti-

cas escolares como el factor determinante crucial de su práctica de enseñanza. En lugar de esto, los factores que ellos ven como cruciales en la determinación de lo que sucede en sus aulas de clase pertenecen al contexto social e institucional. Ni siquiera Pablo, el profesor que durante los cinco primeros meses del trabajo de campo mostró una alta consciencia del impacto que su conocimiento y disposición tenía sobre su práctica, se apartó definitivamente del grupo, pues él también se unió a los demás participantes para enfatizar la influencia de factores sociales e institucionales cuando justificó la imposibilidad de continuar implementando un enfoque de enseñanza que favorecía el aprendizaje con significado. Más allá de la observación de Wilson y Lloyd (2000) de que a los profesores les es difícil lograr cambios en la enseñanza, a pesar de su compromiso y de su sólido conocimiento matemático, el caso de Pablo muestra que sus concepciones de factores sociales e institucionales tuvieron más influencia en su decisión de reestructurar su enseñanza (para alinear con la institución) que sus fuertes concepciones (conocimiento, creencias y actitudes) de las matemáticas escolares. Las evidencias, en general, muestran que mientras las concepciones de 'la iniciación del trabajo algebraico' que tenían los profesores influían fuertemente, sus concepciones de factores sociales e institucionales influían aun con mayor poder en sus concepciones de sus prácticas de enseñanza.

Las tres categorías de las concepciones de los profesores sobre los factores determinantes cruciales de su enseñanza proporcionan importantes explicaciones sobre 'por qué muchos profesores no están interesados en el cambio, no están dispuestos a aprender de sus colegas, y se resisten a participar en programas de desarrollo profesional, a pesar de ser conscientes de la gran desmotivación y altas tasas de mortalidad de sus estudiantes. Mientras que el profesor con 'atribuciones externas' no ve necesidad de introducir cambios en su enseñanza, para el profesor con 'atribuciones principalmente externas' el cambio es muy difícil, y el profesor de 'atribuciones principalmente internas' se siente sin ningún poder debido a sus concepciones de los factores sociales e institucionales que enmarcan su enseñanza.

Las implicaciones de estos resultados para la creación de posibilidades de cambio en la enseñanza del álgebra y, en general, de las matemáticas escolares en Colombia son inmensamente grandes, y han sido ampliamente discutidas en Agudelo-Valderrama (2004b). La provisión de oportunidades de aprendizaje profesional para los profesores de matemáticas se ubicó como el componente fundamental de una estrategia de cambio en el sistema educativo, requerida con gran urgencia. En lo que sigue se presentan apartes relacionados con las implicaciones identificadas para el desarrollo de la investigación sobre las concepciones de los profesores acerca de las matemáticas escolares, y para los programas de formación de profesores.

### *Implicaciones para el desarrollo de la investigación sobre las concepciones de los profesores acerca de las matemáticas escolares*

Wilson y Cooney (2002) señalan que para poder ganar una mejor comprensión de la naturaleza del pensamiento del profesor y de qué proporciona la base de su cambio, es importante que los investigadores presten atención tanto a su conocimiento como a sus creencias. Sostengo, sin embargo, que para poder identificar posibilidades de cambio en el profesor es necesario centrar la atención no solamente en su conocimiento y sus creencias sino, además, en “las actitudes que están asociadas con [sus] creencias” (Ernest, 1989). Los estudios que se encuentran bajo las categorías de 'concepciones' o 'creencias' de los profesores acerca de las matemáticas y su enseñanza generalmente se han enfocado solamente en uno de los componentes de las estructuras de pensamiento de los profesores. Esto es, dichos estudios se han centrado ya sea en componentes cognitivos o en componentes afectivos, limitando así la posibilidad de ganar una mejor comprensión de la interrelación que hay entre los componentes cognitivos y los afectivos, y de su relevancia para el mejoramiento de programas de desarrollo profesional. Es más, una premisa de este estudio era que para poder profundizar sobre las posibilidades de cambio del profesor se necesitaba centrar la atención en las perspectivas que el profesor tiene de *su propia práctica* de enseñanza. Aplicar el entendiendo a las formas como los profesores ven sus propias situaciones y prácticas de enseñanza abrió espacios en donde se puso de manifiesto el poderoso rol que sus concepciones de factores sociales e institucionales específicos jugaban en sus concepciones de sus prácticas.

Este estudio mostró que las concepciones de los profesores sobre factores específicos del contexto escolar representan un componente crucial de sus estructuras de pensamiento. Su conocimiento de dichos factores, sus creencias y actitudes hacia éstos influenciaban sus decisiones pedagógicas, hecho que apoya la afirmación de McEwan y Bull (1991) de que todo conocimiento es pedagógico, de alguna forma. Como se argumentó en otro escrito (Agudelo Valderrama, 2004a), investigar las concepciones que tienen los profesores de su propia enseñanza de las matemáticas nos exige considerar sus concepciones del aspecto social de su quehacer o “sus perspectivas sociales” (Gates, 2001), para así poder obtener un mejor entendimiento de las barreras y las posibilidades de su cambio. En otras palabras, necesitamos empezar a prestar atención a “la dimensión ausente” Gates (2001) en la investigación de las creencias y concepciones de los profesores de matemáticas.

### *Implicaciones para la formación de profesores*

El entendimiento ganado a través de este estudio, y especialmente del caso de Pablo - que era principiante y mostró 'atribuciones principalmente inter-

nas' - contiene importantes lecciones para ser tenidas en cuenta en los programas de formación de profesores. De acuerdo con la información recogida, el enfoque progresista que Pablo estaba tratando de poner en acción lo había ganado durante sus estudios de Licenciatura, especialmente durante el período de su práctica docente. No obstante, Pablo mostró que estaba dispuesto a dejar de lado su estilo de enseñanza 'preferido' a medida que iba aprendiendo sobre las realidades de la organización del colegio y lo que, de esas realidades, percibía eran sus deberes como profesor (i.e., llenar las expectativas de los “poderosos” padres de familia o adaptar sus formas preferidas de evaluar los alumnos a los esquemas de los reportes del colegio<sup>10</sup>). Estos hallazgos plantean implicaciones claras para los programas de formación de profesores de matemáticas y, en general, para las facultades de educación en Colombia. Los programas de formación de profesores deben ofrecer a los futuros profesores, experiencias significativas de aprendizaje que los lleven a cuestionar no solamente sus creencias acerca de la naturaleza del conocimiento matemático - y por tanto de su rol como profesores en los niveles del aula de clase y de la escuela - sino, además, de su rol social a nivel de la comunidad a la que la escuela sirve, y a nivel del sistema educativo. Esto quiere decir que las facultades de educación necesitan trabajar activamente en la creación y el sostenimiento de estrechas asociaciones con las escuelas para así crear los ambientes de aprendizaje necesarios, de donde los 'futuros' profesores aprendan sobre su rol social. Hay una necesidad urgente de desarrollar programas de *educación matemática crítica* para los futuros profesores en donde se integren tanto los estudiantes de Licenciatura como los formadores de profesores y las comunidades escolares como *comunidades de aprendizaje*, trabajando unidos por el *cam-bio* de la cultura de la escuela.

Profesores principiantes, como Pablo, pueden haber aprendido (de sus programas de formación) a propender por un enfoque de enseñanza progresista, pero no han aprendido cómo sobrepasar “el poder de las prácticas instituidas en las escuelas” (Agudelo-Valderrama y Clarke, 2005) cuando se vinculan a ellas. Esta es una gran dificultad para los profesores principiantes que también ha sido señalada en Richardson y Placier (2001) y Manouchehri (1998), y sería poco razonable esperar que los profesores principiantes emprendieran la tarea de cambiar la cultura de las escuelas sin contar con ningún apoyo. Una vez más, un programa de formación de profesores desarrollado en un contexto en donde los formadores de profesores, los estudian-

10. Ver, también, Agudelo-Valderrama (2006) (en prensa). The growing gap between Colombian education policy, official claims and classroom realities: Insights from mathematics teachers' conceptions of beginning algebra and its teaching purpose. *International Journal of Science and Mathematics Education*.

tes de Licenciatura, las escuelas y su comunidad de padres de familia trabajan unidos por la *renovación continua* de las prácticas escolares proporcionaría el medio de aprendizaje requerido para que los profesores aprendan acerca de su rol social, tanto durante su programa inicial de formación como durante sus (primeros) años de trabajo. La pregunta que se hace necesario plantear aquí es ¿hasta qué punto están dispuestos los formadores de profesores de nuestro país a enfrentar este reto?

## APÉNDICE

### *Una pregunta perteneciente a la Sección A del Cuestionario 1*

#### **Sección A**

Para cada ítem de esta sección se presentan algunas expresiones con las cuales se puede completar la frase introductoria dada, construyéndose así una declaración completa. Clasifique las diferentes declaraciones escribiendo, en la casilla que aparece a la derecha, un número que indique sus preferencias, así: escriba “1” para indicar su primera escogencia; “2” para la segunda; “3” para la tercera, etc. Por favor llene todas las casillas. Tenga presente que el mismo número o valor clasificatorio puede ser asignado a más de una de las declaraciones.

Si usted tiene otras ideas o enfoques personales puede expresarlos en los espacios que se han dejado al final de cada pregunta. Por favor, no olvide dar un número que clasifique los enfoques que usted haya adicionado.

**A2.** Mi estilo de enseñanza **preferido** en grado octavo, en este colegio, incluye:

- |   | <i>Número</i>        |
|---|----------------------|
| • Dar explicaciones claras, a todo el grupo de alumnos, de las definiciones y procedimientos a seguir en los ejercicios y problemas de aplicación de los diferentes temas estudiados. | <input type="text"/> |
| • Organizar actividades para que durante la clase los alumnos trabajen en grupos pequeños, y luego presenten sus ideas a todo el grupo para su discusión                              | <input type="text"/> |
| • Hacer evaluaciones a los alumnos, al final de cada actividad o de cada tema, y así poder tener suficientes notas para la calificación final de cada logro                           | <input type="text"/> |
| • Dejar como tarea un número de ejercicios en donde se aplique un algoritmo dado  | <input type="text"/> |
| • Diseñar actividades que dejen espacio para que los alumnos trabajen de acuerdo a su capacidad de logro  | <input type="text"/> |
| • Crear oportunidades para que los alumnos desarrollen sus capacidades para comunicarse, y así puedan sentirse seguros al expresar sus ideas matemáticas                              | <input type="text"/> |
| • Diseñar actividades de clase que promuevan el establecimiento de conexiones entre los diferentes temas estudiados   | <input type="text"/> |
| • -----   | <input type="text"/> |

**A3.** El estilo de enseñanza que tiene lugar **en forma real** en “mi” grado octavo, en este colegio, incluye:

*[Como en la pregunta A2, la misma lista de descriptores, va aquí]*

Si su clasificación en la pregunta A2 es diferente de la de la pregunta A3, por favor, explique el por qué de las diferencias.



## Reconocimientos

Ésta es una de las publicaciones que surgen de mi *PhD* en Educación Matemática, estudio realizado en la Universidad de *Monash*, Australia, bajo la dirección de Alan J. Bishop y Barbara Clarke. El proyecto de investigación fue financiado por *Monash University*, y *Monash Research Graduate School* me otorgó el '*Postgraduate Publication Award - 2004*'.

## REFERENCIAS

- Agudelo-Valderrama, C. (1996). Improving mathematics education in Colombian schools: Mathematics for all. *International Journal of Educational Development*, 16(1), 15-26.
- Agudelo-Valderrama, C. (2000). *Una innovación curricular que enfoca el proceso de transición entre el trabajo aritmético y el algebraico*. Tunja: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.
- Agudelo-Valderrama, C. (2001). Challenging the teaching-learning patterns in elementary algebra. Paper presented at the 12th ICMI Study: *The Future of the Teaching and Learning of Algebra*. Melbourne, Australia: University of Melbourne.
- Agudelo-Valderrama, C. (2004a). A Novice Teacher's Conception of the Crucial Determinants of his Teaching of Beginning Algebra. En I. Putt, R. Faragher y M. McLean (Eds.), *Proceedings of the 27th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, Vol. 1, pp. 31-38. Townsville, Australia: MERGA.
- Agudelo-Valderrama, C. (2004b). Explanations of Attitudes to Change: Colombian Mathematics Teachers' Conceptions of their Own Teaching Practices of Beginning Algebra. Unpublished Ph.D. thesis, Monash University, Melbourne, Australia.
- Agudelo-Valderrama, C. y Clarke, B. (2005). The challenges of mathematics teacher change in the Colombian context: The power of institutional practices. Paper presented at the 15th ICMI Study: *The Education and Professional Development of Teachers of Mathematics*. Águas de Lindóia. Brazil.
- Bandura, A. (1986). *Social foundations of thought and action: A social cognitive theory*. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice Hall, Inc.
- Bandura, A. (1997). *Self-efficacy: The exercise of control*. New York: W. H. Freeman y Co.
- Bednarz, N., Kieran, C. y Lee, L. (1996). Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching. En N. Bednarz, C. Kieran, y L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Press.

- Bishop, A. J. (1988). *Mathematical enculturation*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Bonilla, S. (1994). Categorías de la interpretación de las letras en álgebra escolar por los estudiantes de noveno grado. Unpublished MA dissertation, Universidad Externado de Colombia, Bogotá.
- Booth, L. (1984). *Algebra: children's strategies and errors*. Windsor, Berkshire: NFER-Nelson Publishers Company Ltd.
- Brown, M. (2000). Effective teaching of numeracy. En V. Koshy, P. Ernest y R. Casey (Eds.), *Mathematics for primary teachers* (pp. 149-181). London: Routledge.
- Cockcroft, W. H. (1982). *Mathematics counts*. London: HMSO.
- Cooney, T. J. (1985). A beginning teacher's view of problem solving. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16, 324-336.
- Cooney, T. J. (1999). Conceptualizing teachers' ways of knowing. *Educational Studies in Mathematics*, 38, 167-187.
- Cooney, T. J. (2001). Considering the paradoxes, perils and purposes of conceptualizing teacher development. En F. Lin, T. J. Cooney (Eds.), *Making sense of Mathematics Teacher Education* (pp. 9-31). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Díaz, C., Solarte, E. y Arce, J. (1997). Colombia. En D. F. Robitaille (Ed.), *Third International Mathematics and Science Study (TIMSS)* (pp. 82-90). Vancouver: Pacific Educational Press.
- Dossey, J. (1992). The nature of mathematics: Its role and its influence. En D. A. Grows (Ed.), *Handbook of mathematics teaching and learning* (pp. 39- 48). NY: McMillan Publishers Co.
- Ernest, P. (1989). The knowledge, Beliefs and Attitudes of the Mathematics Teacher: a model. *Journal of Education for Teaching*, 15(1), 13-33.
- Ernest, P. (1991). *The philosophy of Mathematics Education*. London: The Falmer Press.
- Federici, C. (1985). La reforma curricular y el magisterio. *Educación y Cultura*, 4(1), 65-68.
- Freire, P. (1976). *Pedagogy of the oppressed*. New York: The Continuum Publishing Company.
- Frykholm, J. A.: 1999, 'The impact of reform: Challenges for mathematics teacher preparation, *Journal of Mathematics Teacher education*, 1, 79-105.
- Furinghetti, F. y Pehkonen, E. (2002). Rethinking characterizations of beliefs. En G. Leder, E. Pehkonen y G. Törner (Eds.), *Beliefs; A hidden variable in mathematics education?* (pp. 39-57). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

- Gates, P. (2001). Mathematics teachers' beliefs systems: Exploring the social foundations. En M. van den Heuvel-Panuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th International Conference of Psychology of Mathematics Education*, Vol 3, pp 17-24. Utrecht, The Netherlands.
- Ley General de la Educación* (1994). Catelblanco, B. (Ed.). Bogotá: Editorial Publicitaria.
- González, M. y Pedroza, G. (1999). Reflexiones sobre aspectos claves del algebra escolar. *Revista EMA - Investigación e innovación en educación matemática*, 5(1), 87-91.
- Gregg, J. (1995). The tensions and contradictions of the school mathematics tradition. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(5), 442-466.
- Heaton, R. M. (2000). *Teaching mathematics to the new standards*. New York: Teachers College Press.
- Jaworski, B. (1999). Tensions in Teachers' Conceptualizations of Mathematics and of Teaching. En L. Burton (Ed.), *Learning Mathematics: From Hierarchies to Networks* (pp. 153-172). London: Falmer Press.
- Jerusalem, M. y Mittag, W. (1995). Self-efficacy in stressful life situations. En A. Bandura (Ed.), *Self-efficacy in changing societies* (pp. 177-201). New York: Cambridge University Press.
- Kaput, J. J. y Blanton, M. (2001). Algebrafying the Elementary Mathematics Experience. Part I: Transforming Tasks Structures. En H. Chick, K. Stacey, J. Vincent y J. Vincent (Eds.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra (Proceedings of the 12th ICMI Study*, Vol. 1, pp. 344-351). Melbourne: University of Melbourne.
- Kaput, J. J. (1999). Teaching and learning a new algebra. En E. Fennema y T. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Mahwah, N.J: L. Erlbaum Associates, Publishers.
- Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. En D. A. Grows (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). N Y: McMillan Publishers Co.
- Kieran, C., Boileau, A. y Garaçon, M. (1996). Introducing algebra by means of a technology-supported, functional approach. En N. Bednarz, c. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching* (pp. 257-294). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Kieran, C. (2004). Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It? *The Mathematics Educator*, 18(1), 139-151.
- Küchemann, D. E. (1981). Algebra. En K. M. Hart (Ed.), *Children's understanding of mathematics: 11- 16*. London: John Murray.

- Lerman, S. (1990). Alternative Perspectives of the Nature of Mathematics and their Influence on the Teaching of Mathematics. *British Educational Research Journal*, 16(1), 53-62
- Lokan, J., Ford, P. y Greenwood, L. (1996). Maths y Science on the line: Australian junior secondary students' performance in the Third International Mathematics and Science Study. Victoria, Australia: ACER.
- MacGregor, M. y Stacey, K. (1994). Progress in Learning Algebra: Temporary and Persistent Difficulties. En G. Bell, B. Wright, N. Leeson y J. Geake (Eds.), *Challenges in mathematics education: constraints on construction* (Proceedings of the 17th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Vol. 2, pp. 403-410). Lismore: MERGA
- Manouchehri, A. (1998). Mathematics Curriculum Reform and Teachers: What Are the Dilemmas? *Journal of Teacher Education*, 49(4), 276-286.
- McEwan, H., y Bull, B. (1991). The pedagogic nature of subject matter knowledge. *American Educational Research Journal*, 28(2), 316-334.
- McLeod, D. B. (1992). Research in affect in mathematics education: a reconceptualization. En D. A. Grows (Ed.), *Handbook of research in mathematics teaching and learning* (pp. 575-596). New York: MacMillan.
- Mason, J. H. (1999). Incitación al Estudiante para que Use su Capacidad Natural de Expresar Generalidad: Las Secuencias de Tunja. *Revista EMA - Investigación e innovación en educación matemática*, 4(3), 232-246.
- Mason, J. H., Burton, L. y Stacey, K. (1982). *Mathematical thinking*. London: Addison-Wesley.
- Mason, J. H., Graham, A., Pimm, D. y Gowar, N. (1999). *Raíces del álgebra/Rutas hacia el álgebra*. Tunja: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.
- Ministerio Nacional de Educación (1998). *Matemáticas - Lineamientos curriculares*. Bogotá.
- NCTM 'National Council of Teachers of Mathematics' (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Patton, M. Q. (1990). *Qualitative evaluation and research methods*. Newbury Park, California: Sage Publications.
- Pehkonen, E. (1997). *Teachers' conceptions of mathematics teaching*. Paper presented at the Current State of Research on Mathematical Beliefs, Helsinki.
- Philippou, G. y Christou, C. (1999). Teachers' conceptions of mathematics and students' achievement: A cross-cultural study based on results from TIMSS. *Studies in Educational Evaluation*, 25, 379-398.
- Philippou, G. y Christou, C. (2002). A Study of the Mathematics Teaching Efficacy Beliefs of Primary Teachers. En G. Leder, E. Pehkonen y G. Torner (Eds.),

- Beliefs; a hidden variable in mathematics education?* (pp. 211-232). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Price, N. J. y Ball, D. (1997). 'There's always another agenda': marshalling resources for mathematics reform. *Journal of Curriculum Studies*, 29(6), 637-666.
- Raymond, A. (1997). Inconsistency between a Beginning Elementary School Teacher's Mathematics Beliefs and Teaching Practice. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(5), 550-576.
- Raymond, A. y Leinenbach, M. (2000). Collaborative Action Research on the Learning and Teaching of Algebra; A Story of One. *Educational Studies in Mathematics*, 41(3), 283-307.
- Richardson, V. y Placier, P. (2001). Teacher Change. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 905-947). Washington, D. C.: American Educational Research Association.
- Roberts, R. E. (2002). A Study of the Cognitive and Affective Characteristics of High and Low achievers in Year 10 Algebra. Unpublished PhD thesis, Queensland University of Technology.
- Robitaille, D. y Dirks, M. (1982). Models for the Mathematics Curriculum. *For the learning of mathematics*, 2(3), 3-19.
- Schifter, D. y Fosnot, C. (1993). Reconstructing mathematics education. Stories of teachers meeting the challenge of reform. New York: Teachers College Press.
- Smith III, D. (1996). Efficacy and teaching mathematics by telling: a challenge for reform. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 387-402.
- Steen, L. A. (1999). Does everybody need to study algebra? En B. Moses (Ed.), *Algebraic thinking Grades K-12: Readings from NCTM's school journal and other publications* (pp. 49-51). Reston, VA: NCTM Inc.
- Sutherland, R. (1991). Some unanswered questions on the teaching and learning of algebra. *For the learning of mathematics*, 11(3), 40-46.
- Thompson, A. (1984). The relationship of teachers' conceptions of mathematics and mathematics teaching to instructional practice. *Educational Studies in Mathematics*, 15(2), 105-127.
- Thompson, A. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research. En D. A. Grows (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 127-146). New York: McMillan.
- Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variable. En A. F. Coxford y A. P. Shulte (Eds.), *The ideas of algebra, K-12 (1988 Year book of the National Council of Teachers of Mathematics)* (pp. 8-19). Reston, VA: NCTM.
- Usiskin, Z. (1999). Why Is Algebra Important to Learn (Teachers, this one's for your students!). En B. Moses (Ed.), *Algebraic Thinking Grades K-12: Readings*

- from NCTM's school-based journals and other publications* (pp. 22-30). Reston VA: NCTM.
- Weiner, B. (1980). *Human motivation*. New York: Holt, Rinehart, and Winston.
- Wheeler, D. (1996). Backwards and forwards: reflections on different approaches to algebra. En N. Bednarz, c. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching* (pp. 317-326). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Wilson, M. y Goldenberg, M. P. (1998). Some conceptions are difficult to change: One middle school mathematics teacher struggle. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 3(1), 269-293.
- Wilson, M. y Lloyd, G. M. (2000). The challenge to share authority with students: High school teachers reforming classroom roles and activities through curriculum implementation. *Journal of Curriculum and Supervision*, 15(2), 146-169.
- Wilson, M. y Cooney, T. J. (2002). Mathematics Teacher Change and Development. The role of beliefs. En G. Leder, E. Pehkonen y G. Torner (Eds.), *Belief: a hidden variable in mathematics education?* (pp. 127-148). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Yin, R. K. (2003). *Case study research: design and methods*. Thousand Oaks, CA: Sage Publications, Inc.
- Zazkis, R. (2001). From Arithmetic to Algebra via Big Numbers. En H. Chick, K. Stacey, J. Vincent y J. Vincent (Eds.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra* (Proceedings of the 12th ICMI Study:, Vol. 2, pp 676-681). Melbourne: University of Melbourne.

Cecilia Agudelo Valderrama  
Posgrados en Educación Matemática  
Universidad Distrital F. J. C.  
acagudelo@colomsat.net.co