Junio de 2009, Número 18, páginas150-155
ISSN: 1815-0640

Coordinado por
Martha Iglesias

Ideas para Enseñar

Estudio de la Elipse con Plegado de Papel

Fabiola Czwienczek

Resumen

En el presente artículo se plantea una actividad que cubre tres etapas: plegado de papel, elaboración de conjetura y formalización (demostración), en el cual el lugar geométrico estudiado es la elipse. Finalmente, se aprovecha la experiencia para construir con regla y compás la tangente a una elipse por uno de sus puntos.

Abstract

In the present article an activity considers that covers three stages: fold of paper, elaboration of conjecture and formalization (demonstration), in which the studied geometric place is the ellipse. Finally, the experience takes advantage of to construct with rule and compass the tangent to an ellipse by one of its points.

Resumo

No presente artigo expõe-se uma atividade que envolve três etapas: dobrado de papel, elaboração de conjetura e formalização (demonstração), no qual o lugar geométrico estudado é a elipse. Finalmente, se aproveita a experiência para construir com régua e compasso a tangente a uma elipse por um de seus pontos.

Introducción

Esta actividad puede ser presentada a estudiantes que ya conozcan el concepto y definición de lugar geométrico, es decir, que hayan trabajado con las cónicas como lugar geométrico, en particular con la elipse.

Recordemos que se llama *elipse* el lugar geométrico de todos los puntos del plano tal que la suma de sus distancias a dos puntos fijos F_1 y F_2, llamados focos de la elipse, es un valor constante mayor que la distancia entre los puntos F_1 y F_2.

A partir de la definición anterior se puede hallar la ecuación de la elipse de semiejes a y b, cuyo centro es el punto $C = (\alpha, \beta)$, la misma es la siguiente:

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$$

La actividad llevada a cabo se presenta en tres etapas, en la primera de ellas se trabaja solamente con el plegado del papel, en la segunda ya se promueve la elaboración de distintas conjeturas, paso previo a la demostración, que se presenta en la tercera etapa.

Etapa I: Plegado de papel

Recorte un círculo de papel de cualquier radio e indique el centro del mismo. Marque en el interior de dicho círculo un punto P que sea distinto de su centro O.

Doble el círculo de manera que la circunferencia pase por el punto P, como se indica en la figura 1.

Realice varios dobleces, siempre haciendo coincidir puntos de la circunferencia con el punto P, hacer esto en variadas direcciones.

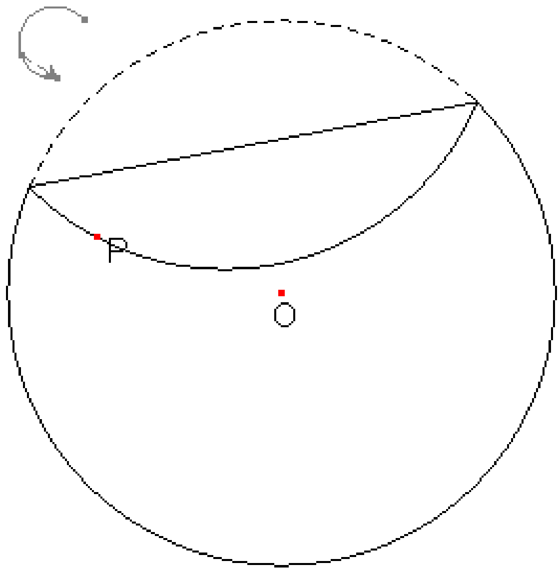

Figura 1

Etapa II: Elaboración de Conjetura.

Una vez realizados estos dobleces la pregunta es: ¿Qué figura queda delimitada por los mismos?, es decir ¿Qué figura se obtiene?.

Se podría establecer la siguiente conjetura: Los dobleces realizados parecen delimitar una elipse cuyos focos son, a simple vista, los puntos O y P, el centro del círculo y el punto fijado en su interior, respectivamente. Esto se muestra en la figura que se presenta a continuación.

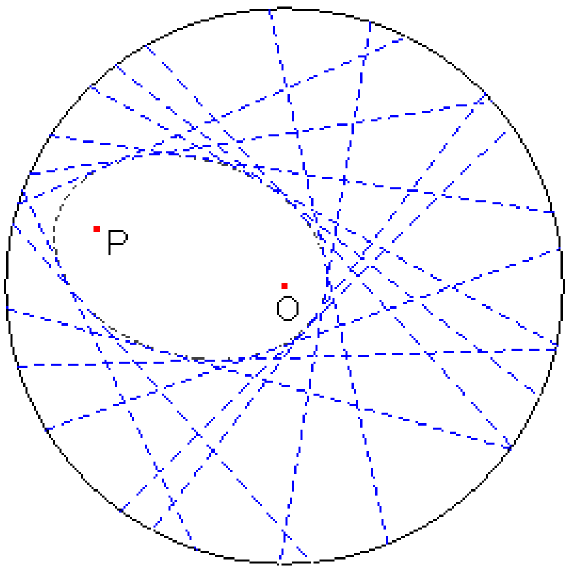

Figura 2

Etapa III: Formalización (demostración).

Probemos que, en efecto, estos pliegues forman una familia de rectas tangentes que envuelven a dicha elipse.

Para ello, demostremos que cada uno de estos dobleces contiene exactamente un punto T tal que OT + PT = k, siendo k un valor constante, pues, como ya fue mencionado, una elipse es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de las distancias a dos puntos fijos, del mismo plano, es una constante.

Sea Q un punto cualquiera de la circunferencia y denotemos por r al radio del círculo. La pregunta es: ¿Qué relación existe entre la distancia del punto Q al centro O y la distancia entre los puntos P y O?. Podemos contestar que:

$$r = OQ > OP$$

Esta relación es válida debido a que el punto P es un punto interior de la circunferencia.

Por otra parte, al hacer coincidir los puntos Q y P en el doblez correspondiente, la línea que queda determinada por este plegado está contenida en la mediatriz M del segmento cuyos extremos son Q y P, podemos observar esto en la figura siguiente:

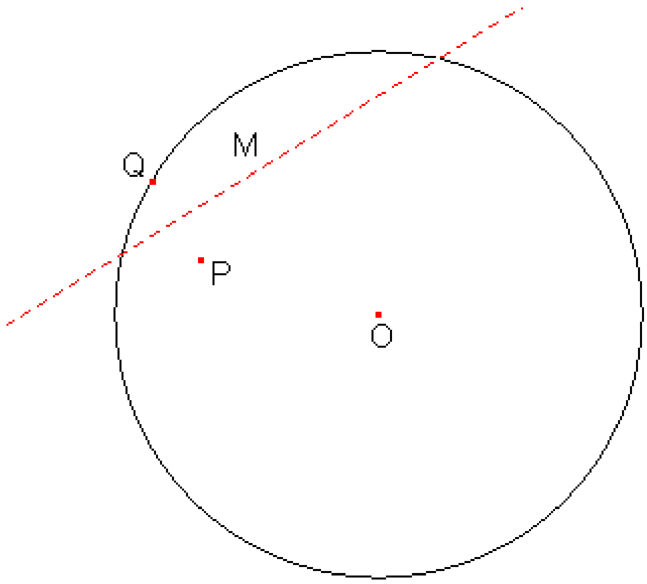

Figura 3

En consecuencia, es directo comprobar que los puntos P y Q están en lados opuestos de la mediatriz M. Pero, en este caso la pregunta es: "¿Qué ocurre con el punto O?" Pues bien, "*se ve*", en todos los dobleces realizados, que el centro O está en el mismo semiplano, con respecto a M, que el punto P. Sin embargo, en una demostración formal no podemos fundamentar argumento alguno en una percepción visual. Nótese que dada la recta M y los puntos coplanarios O, P y Q, estando los dos últimos en lados opuestos de M, se cumple una y solamente una de las siguientes proposiciones:

1) O pertenece a M
2) O está del mismo lado de M que Q.
3) O está del mismo lado de M que P.

Vamos a demostrar que las dos primeras situaciones conducen a contradicciones y que, por consiguiente, se verifica la tercera.

Si el punto O pertenece a la mediatriz M, entonces, por ser esta recta mediatriz del segmento $\overline{PQ}$, el punto O equidista de los puntos P y Q. Entonces, se tiene que OP = OQ, lo cual contradice la desigualdad OQ > OP.

Si los puntos O y Q están del mismo lado de la recta M, entonces el segmento $\overline{OP}$ debe intersectar a dicha recta en algún punto, porque P y Q están en lados opuestos de M. Consideremos que R es el punto de intersección de la recta M y el segmento $\overline{OP}$. Luego, R pertenece a M y R está entre O y P. En consecuencia, se tiene que:

$$RP = RQ \quad y \quad OR + RP = OP.$$

Por la desigualdad triangular, sabemos que: $OQ \leq OR + RQ$.

Así, $OQ \leq OR + RQ = OR + RP = OP$, los puntos O, R y P estarían alineados. Esto es, $OQ \leq OP$, lo cual contradice que $OQ > OP$.

A partir de las contradicciones halladas para los dos puntos anteriores, se puede afirmar que, para cualquier punto Q de la circunferencia, O y P están en el mismo semiplano con respecto a la recta M, siendo M la mediatriz del segmento cuyos extremos son P y Q.

El haber demostrado esto, nos permite afirmar que, dado un punto Q de la circunferencia, $\overline{OQ}$ tiene un único punto en común con M. Denotemos por T a dicho punto de intersección.

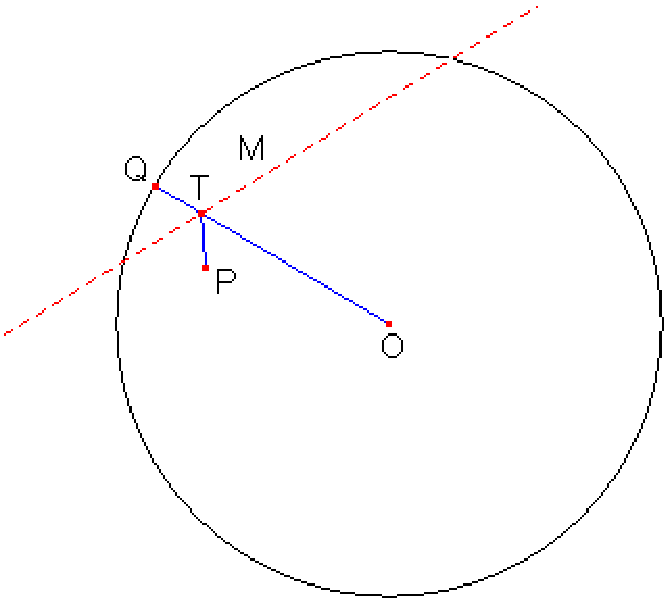

Figura 4

Como el punto T pertenece al segmento $\overline{OQ}$, se tiene que $OT + TQ = OQ = r$. Por ser T un punto de la mediatriz del segmento $\overline{PQ}$, se tiene que $TP = TQ$. Así, $OT + TP = r$. Nótese que r es una constante que no depende de la elección del punto Q.

Se ha probado que cada doblez contiene exactamente un punto T tal que la suma de sus distancias a los puntos O y P es una constante igual a r, lo cual significa que cada doblez contiene exactamente un punto de la elipse cuyos focos son O y P y cuyo eje mayor es de longitud r.

Además…

Una consecuencia de la actividad realizada es que podemos deducir una construcción de la tangente a una elipse por un punto dado de ésta con regla y compás.

En efecto, supongamos que tenemos una elipse de focos F_1 y F_2. Sea T un punto de esta elipse. Se traza la recta que pasa por T y uno de los focos, por ejemplo F_1 (figura 5). Haciendo centro en T y con abertura TF_2, se marca el punto Q sobre la recta que contiene a los puntos T y F_1, esto de manera que el punto T esté entre F_1 y Q. La mediatriz del segmento $\overline{QF_2}$ es la recta tangente a la elipse por el punto T.

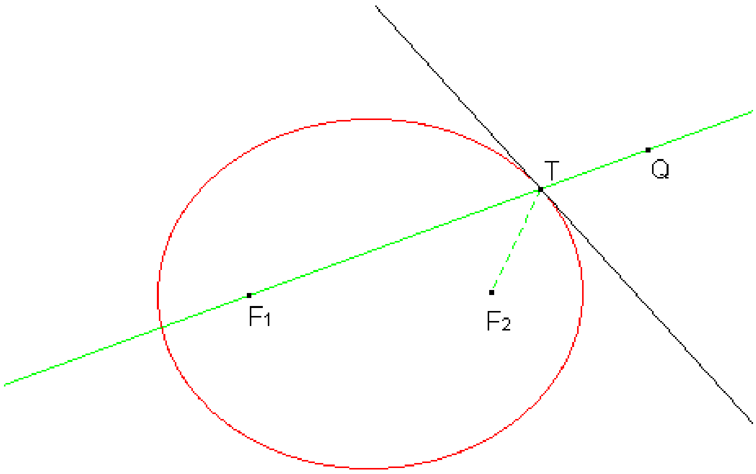

Figura 5

Reflexión final

Esta actividad tan sencilla que comienza plegando papel (actividad lúdica y manipulativa), puede generar una discusión en clase que permita establecer distintas conjeturas, evaluar la comprobación de las mismas (formalización) y también la deducción de construcciones con regla y compás.

Bibliografía

Ledesma, A. (1994). *Estudio de cónicas con papel*. *Educación Matemática* 6 (2). Grupo Editorial Iberoamérica.

Fabiola Czwienczek, profesora de Matemática egresada del Instituto Pedagógico "Rafael Alberto Escobar Lara" de Maracay, Venezuela (1985). Magíster en Educación Superior, mención Matemática (Universidad Pedagógica Experimental Libertador, 1991).