Orden y complejidad en las expresiones algebraicas: un estudio de la percepción estética de la matemática

por José María NÚÑEZ ESPALLARGAS
Universidad de Barcelona

Desde la antigüedad clásica se ha especulado sobre las conexiones entre matemática y estética. Es una cuestión bien conocida y documentada la impronta matemática que podemos descubrir en la estética de muchas creaciones humanas. Detectamos ya esta presencia en manifestaciones datadas en épocas muy lejanas de la historia e incluso de la prehistoria, como podemos observar en construcciones arquitectónicas o en diseños textiles y de alfarería. La relación entre matemática y arte pasa a convertirse en verdadero objeto de atención para el pensamiento griego, a partir del momento en que los matemáticos de la Escuela de Pitágoras descubrieron que ciertas proporciones aritméticas simples de las longitudes de las cuerdas determinaban las notas musicales. Las matemáticas están presentes no sólo en el campo de la música sino en el arte en general. Allí donde identificamos repeticiones, sucesiones, proporciones, simetrías, semejanzas, transformaciones, figuras o cuerpos geométricos encontramos la huella de la matemática (Ghyka, 1992). Se ha dicho que la preferencia demostrada por el ser humano hacia este tipo de regularidades y formas matemáticas, no es más que un reflejo de las que ve en sí mismo y en la naturaleza que le rodea (Thompson, 1980). Sea ése u otro el origen, lo cierto es que su presencia es evidente en la arquitectura pero también en la escultura y la pintura (Pedoe, 1979). Incluso en la literatura podemos rastrear su influencia, basta con fijarse, por ejemplo, en el ritmo de las composiciones de carácter poético (Kreuzer y Gunzenhäuser, 1965).

Las interpretaciones de lo que se entiende por “belleza” han sido muy diversas a través de las épocas y no vamos a entrar en ellas. Únicamente diremos que, a pesar de los evidentes ras-

revista española de pedagogía
año LXV, nº 236, enero-abril 2007, 109-124

gos individuales que este concepto manifiesta, lo que nos permite hablar de gustos o "modas" cambiantes con el tiempo o con los grupos humanos, hay una cierta unanimidad (sobre todo a partir de Kant) en considerar que la belleza deja de ser un mero "sentimiento" para convertirse en un tipo de "conocimiento". Pero, aceptado este extremo, es difícil establecer el tipo de dependencia de este conocimiento estético con factores objetivos como son el significado o la finalidad de la obra contemplada y también con otros subjetivos como las experiencias pretéritas externas o internas del observador.

Dejándose llevar, quizás, por la ubicuidad de las representaciones matemáticas que subyacen en los productos artísticos, el matemático norteamericano George Birkhoff intentó también cuantificar el conocimiento estético buscando una expresión matemática que lo midiera. En 1932 propuso la expresión $E = O / C$ para determinarlo. Según esta fórmula, el "valor estético" E de una producción artística es directamente proporcional al "grado de ordenación" O que ésta presenta e inversamente proporcional a su "complejidad" C. Evidentemente no podía concretar las constantes de proporcionalidad, pues ambos factores son apreciados de manera diferente por cada persona y, además, son susceptibles de sufrir modificaciones temporales y culturales. Tampoco precisó con detalle qué entendía ni por "orden" ni por "complejidad". Respecto al primer concepto, se limitó a decir que todos los objetos artísticos se caracterizan por tener "cierta armonía u orden, más o menos encubierto, que parece necesario al efecto estético". Sobre la "complejidad" se extiende más y la asocia "a la sensación de esfuerzo psicológico" invertido para asimilar el "orden" contenido en el objeto artístico y la supone una suma de índices de tensión parciales. Los ejemplos que presentó en favor de su teoría pertenecían mayoritariamente al campo de la geometría o de la música. Pronto surgieron defensores y detractores de una fórmula que cuantificaba el "conocimiento sensible". Aunque había unanimidad en considerar el "orden" (fuera cual fuera su concreción) como un elemento que ayuda a valorar positivamente un objeto artístico, no ocurría lo mismo con el factor "complejidad". Así, pocos años más tarde, Eysenck (1941), modificó la expresión, al observar en sus experiencias que la valoración estética dependía directamente de ambos factores, el orden y la complejidad: $E = O * C$. Estudios posteriores, realizados sobre diferentes grupos de sujetos relacionados todos ellos con el mundo del arte y que han sido recogidos por Martin Schuster y Horst Beisl (1982), muestran resultados muy diversos. En ocasiones, los individuos encuestados se decantan por la propuesta de Birkhoff y prefieren obras sencillas y bien ordenadas, mientras que en otros trabajos los sujetos de la muestra se inclinan por la fórmula de Eysenck y prefieren las realizaciones complejas. Schuster y Beisl suponen que las contradicciones observadas pueden deberse al comportamiento no lineal de la relación entre la valoración estética y el grado de complejidad, cuya representación gráfica se asemejaría a la silueta de una campana, como la que representa la relación entre rendimiento y ansiedad: en niveles bajos de ansiedad su incremento favorece el rendimiento, mientras que en situaciones de alta ansiedad su aumento repercute negativamente en el rendimiento. Del mismo modo, suponen Schuster y Beisl, en niveles bajos de complejidad su incremento produce una mayor valoración estética de la obra, mientras que cuando la complejidad es muy elevada se produce confusión y el consiguiente rechazo del valor estético de la obra.

Si volvemos a la cuestión inicial que nos ocupa, las relaciones entre matemáticas y estética, y fijamos ahora brevemente nuestra atención en la relación inversa, es decir, la influencia de la estética en las matemáticas, observamos inmediatamente que es un aspecto mucho menos estudiado. Es cierto que, también desde el pensamiento griego, se ha hablado de la "belleza" de la matemática, aunque sin dar una definición o una concreción de esa apreciación. Además de Platón, numerosos autores a lo largo de la historia han subrayado el carácter "bello" de las creaciones matemáticas (Davis y Hersh, 1988). Poincaré incluso va más allá, al afirmar que la búsqueda de ese ideal es precisamente uno de los motores de la creatividad matemática (Hadamard, 1947). En los mismos currículums docentes podemos encontrar, entre los objetivos y valores propugnados en la enseñanza de las matemáticas, el "mostrar" a los alumnos las "cualidades estéticas" de las actividades y producciones matemáticas.

Con la intención de esclarecer las características esenciales de la componente estética de la matemática se han realizado diversas experiencias. Algunas, desde el campo de la psicología, han mostrado la preferencia de los alumnos por unas figuras geométricas sobre otras; por ejemplo, los polígonos regulares sobre los irregulares, las figuras convexas sobre las cóncavas, las figuras con mayor número de ejes de simetría sobre las que tienen menos, etc. Otras, desde la perspectiva de la educación matemática, han investigado la influencia que desempeña el factor estético en la resolución de problemas matemáticos. Recordemos un estudio pionero realizado por Krutetskii (1976) en los años setenta del pasado siglo con alumnos muy capacitados, en el cual se mostraba como los sentimientos estéticos desempeñaban un papel excepcionalmente importante en la actividad matemática desarrollada durante la resolución de problemas geométricos. Estos alumnos, en los comentarios a sus razonamientos, hablaban de "elegancia" de las soluciones obtenidas, un término habitualmente empleado en matemáticas para referirse al sentimiento estético y lo relacionaban con adjetivos como orden, claridad y parsimonia (en su acepción de economía de medios). Del mismo modo que este investigador halló una reacción estética positiva de los alumnos frente a una solución elegante, también detectó una reacción negativa frente a las soluciones poco elegantes o "triviales" (desordenadas, toscas, engorrosas o confusas). Más recientemente, Silver y Metzger (1989), han confirmado esta influencia del factor estético en la resolución de problemas geométricos realizados por alumnos universitarios aventajados en matemáticas. De éstas y otras experiencias parece deducirse que el elemento estético en matemáticas aparece ligado positivamente a adjetivos como: orden, elegancia, profundidad, claridad, parsimonia… y negativamente a sus antónimos: trivialidad, superficialidad, desorden, confusión, farragoso…

Aunque en estos estudios de marcado enfoque matemático no aparece la "complejidad" como otra componente de la apreciación estética, el hecho de que los problemas se plantearan precisamente a alumnos aventajados en matemáticas parece incluirla implícitamente. Además, si repasamos las construcciones matemáticas que los propios matemáticos consideran bellas, la complejidad aparece ligada a ellas de una u otra manera. Un ejemplo paradigmático sería el del denominado "último" teorema de Fermat, enunciado por este matemático a mediados del siglo XVII (la ecuación $x^n + y^n = z^n$ no tiene soluciones racionales cuando n es un número entero mayor que 2), que constituye un notable ejemplo de ecuación algebraica ordenada, simple y de absoluta economía de medios en su expresión, pero que, en cambio, oculta una demostración de extraordinaria complejidad, pues no fue alcanzada hasta 1995 por Taylor y Wiles.

El estudio que aquí vamos sucintamente a comentar trata, en líneas generales, de analizar la percepción estética que tienen los alumnos universitarios sobre algunos productos matemáticos. Comenzaremos por delimitar más el ámbito de la investigación, marcando las diferencias con otros trabajos de temática semejante. En primer lugar señalemos, que no se ocupa únicamente de alumnos aventajados en matemáticas o estudiantes de carreras científico-técnicas, como suele ser habitual en este tipo de estudios, sino que incide en estudiantes universitarios sin formación matemática específica. Por otra parte, no se busca tampoco estudiar el efecto que la estética produce en la resolución de problemas o en la realización de determinadas tareas matemáticas, sino en la mera percepción de los productos matemáticos, al igual que hacemos contemplando otras realizaciones humanas. Finalmente, el campo de las matemáticas investigado no es el habitual de la geometría (donde los efectos estéticos son más patentes), es el de las expresiones aritmético-algebraicas más reacias a la valoración estética.

El objetivo del trabajo es el investigar cómo afectan el "orden" y la "complejidad" en las preferencias estéticas que los alumnos sienten ante determinados productos matemáticos. Para ello se somete al alumno a una serie de situaciones donde debe elegir una opción entre varias matemáticamente equivalentes y que se han diseñado de manera que las variables que intervienen sean las mínimas posibles.

La prueba consta de tres partes y ha sido concebida de manera que, en la primera, se presenta una situación en la que las opciones más "elegante" y más "compleja" coinciden; en la segunda, se plantea precisamente lo contrario, que no coincidan, y, en la tercera, se proponen alternativas en las que ninguna destaca claramente sobre las restantes por su "belleza" matemática y donde el grado de complejidad es semejante para todas.

La muestra elegida estuvo formada por el centenar de alumnos de los estudios de formación del profesorado que asistieron a un curso de carácter optativo sobre matemática recreativa y enseñanza de las matemáticas, impartido a lo largo de cuatro cursos académicos consecutivos. Dichos alumnos provenían de distintas especialidades y ninguno de ellos había cursado las modalidades científica o técnica durante la enseñanza secundaria; si bien hay que reconocerles, por el hecho de haber elegido una asignatura del área de matemáticas, una simpatía hacia esta materia. Los cuatro grupos de 30 asistentes se completaban con una docena de alumnos de los últimos cursos de la Facultad de Matemáticas que habían elegido también este curso como opcional en su currículum (el 10% de la matrícula se ofrecía a estudiantes de estas enseñanzas). La realización de la prueba fue totalmente voluntaria, antes y durante su desarrollo, además de anónima y, por lo tanto, no influía en la evaluación del curso. Con todo ello, obviamente, se intentaba garantizar la máxima sinceridad en las respuestas, así como liberar a los alumnos de las tensiones que provocan la realización de ejercicios obligatorios.

La experiencia, como ya se ha indicado, constaba de tres partes, en cada una de las cuales se mostraba al sujeto un problema resuelto con diversas soluciones, todas ellas matemáticamente correctas, y se le proponía que eligiera una de ellas: "la que más le gustara". Se empleó deliberadamente el ambiguo verbo "gustar" para no condicionar las preferencias. El encuestado no debía realizar ningún cálculo, sólo justificar por escrito el o los criterios que habían motivado su opción. A continuación y para intentar constatar la coherencia de los argumentos se le proponía, también al sujeto, elegir la solución que le resultara de menor agrado y que justificara igualmente su decisión. Insistimos en varias ocasiones, durante el desarrollo del protocolo, en que no se pedía en ningún momento la resolución del problema, sólo que se eligiera una de entre varias soluciones del mismo, todas ellas igualmente correctas.

La primera parte de la experiencia reunía las diferentes soluciones que existen al llamado "problema de Einstein" y que consiste en obtener 100 intercalando los signos de + o de - entre las nueve cifras ordenadas correlativamente de menos a más (sin el cero). Se presentaban las únicas 12 soluciones posibles, colocadas de una manera aleatoria y expandida de modo que la longitud fuera aparentemente igual para todas ellas:

$$-1+2-3+4+5+6+78+9=100$$
$$123+45-67+8-9=100$$
$$12+3-4+5+67+8+9=100$$
$$1+23-4+5+6+78-9=100$$
$$12-3-4+5-6+7+89=100$$
$$123+4-5+67-89=100$$
$$1+23-4+56+7+8+9=100$$
$$1+2+3-4+5+6+78+9=100$$
$$123-45-67+89=100$$
$$1+2+34-5+67-8+9=100$$
$$123-4-5-6-7+8-9=100$$
$$12+3+4+5-6-7+89=100$$

Inmediatamente se aprecia que las únicas variables que intervienen en este ejercicio son los tipos de agrupamientos y la cantidad de signos + o - que aparecen en las distintas soluciones. Tras el recuento de las respuestas recogidas observamos que un 45% (A) de los encuestados eligió la solución: 123 - 4 - 5 - 6 - 7 + 8 - 9 = 100. Un 30% (B) se inclinó por: 1 + 2 + 3 - 4 + 5 + 6 + 78 + 9 = 100. Y un 25% (C) optó por: 123 - 45 - 67 + 89 = 100. Ninguna otra solución fue señalada.

Los que se inclinaron por la solución A dieron distintos tipos de argumentos. Unos basaban su elección en que la solución reflejaba el procedimiento resolutivo que ellos hubieran seguido de tener que resolver el problema: "empezar con un número de tres cifras, el 123, y a continuación, combinando las restantes cifras, conseguir restar 23 para alcanzar el 100". Otros argumentos incluían la palabra "fácil" en distintos contextos: "porque me parece la más fácil"; "es más fácil sumar y restar números pequeños" o "es más fácil sumar y restar partiendo de un número más grande".

Defienden la elección de la solución B argumentos semejantes a los que hemos visto para la posibilidad A. Por una parte están los que reflejan la estrategia resolutiva que el sujeto hubiera empleado: "vas sumando cifras y al final, como ves que te falta, juntas el 7 y el 8". Y por otra los que muestran también su opción por lo más fácil: "es la más sencilla ya que sólo hay un número de dos cifras"; "hay muchas sumas y sólo una resta" o "la agrupación no es compleja".

Las justificaciones ofrecidas por los que se inclinan por la solución C hacían referencia a la economía de medios que mostraba: "sólo se utilizan cuatro números"; "hay menos operaciones que hacer" o "mirando el conjunto se ven menos números y operaciones". Aunque también algunos valoraban, indirectamente, la dificultad de su obtención: "se suman o se restan los números de mayor tamaño posible".

La elección de la posibilidad que más desagradaba, así como la justificación de esa decisión, resultaron ser coherentes con los datos de la opción preferida. No se observó, en cambio, una concentración de respuestas como en la primera parte del ejercicio, de modo que prácticamente todas las opciones fueron citadas por unos u otros motivos. Los que inicialmente eligieron la opción A (123 - 4 - 5 - 6 - 7 + 8 - 9 = 100) se inclinan, casi unánimemente, por rechazar soluciones como: - 1 + 2 - 3 + 4 + 5 + 6 + 78 + 9 = 100 utilizando el argumento "nunca hubiera empezado por -1" ; 123 + 45 - 67 + 8 - 9 = 100 , 123 + 4 - 5 + 67 - 89 = 100 y 123 - 45 - 67 + 89 = 100 arguyendo que "se incluyen muchos números de dos o tres cifras", "los cálculos son más complicados" o "el proceso de cálculo mental es más difícil de realizar".

Los alumnos que eligieron la opción B rechazan aquellas soluciones que implican un agrupamiento inicial de tres cifras. Las razones esgrimidas son diversas: "intervienen números muy grandes", "los cálculos son más complicados por intervenir números mayores", "demasiadas restas y además en las primeras posiciones", "las elevadas sumas y los cambios constantes de signos dificultan la deducción del resultado final" o "porque no se me ocurriría empezar con un número de más de una cifra". Concretamente de la solución 123 - 45 - 67 + 89 = 100 se dice repetidamente que "es poco intuitiva".

Aquellos que inicialmente optaron por la expresión 123 - 45 - 67 + 89 = 100 a la hora de rechazar soluciones se inclinan por soluciones como: 1 + 23 - 4 + 5 + 6 + 78 - 9 = 100, 1 + 23 - 4 + 56 + 7 + 8 + 9 = 100 o 1 + 2 + 34 - 5 + 67 - 8 + 9 = 100 dando como razón que "los agrupamientos son muy aleatorios"; - 1 + 2 - 3 + 4 + 5 + 6 + 78 + 9 = 100, 1 + 2 + 3 - 4 + 5 + 6 + 78 + 9 = 100 diciendo que "son más largas y sencillas"; 12 - 3 - 4 + 5 - 6 + 7 + 89 = 100, 123 - 4 - 5 - 6 - 7 + 8 - 9 = 100, 12 + 3 + 4 + 5 - 6 - 7 + 89 = 100 son rechazadas por que eran demasiados fáciles de obtener al "sumar el 89 y el 12 y combinar el resto de cifras para conseguir restar el 1 que sobra" o "simplemente consiste en irle restando al 123 cifras sueltas".

De todas estas respuestas ¿qué comentarios de carácter general pueden extraerse? En primer lugar, ante la pregunta de cuál de las expresiones equivalentes "gustaba" más, la mayoría no ha podido evitar, al contemplar el aspecto general de cada expresión, el comparar la estrategia resolutiva aparentemente implicada en esa solución con la que el sujeto hubiera seguido de tener que resolver el problema por sí mismo. De ahí que las opciones con las frecuencias más altas (A y B) se corresponden precisamente con las soluciones típicas que se siguen de la aplicación de las dos estrategias básicas con las que habitualmente se acomete la resolución del problema de Einstein: la de comenzar por 123, una cantidad que supera 100 y, mediante sucesivas restas, conseguir eliminar el exceso o bien, la de partir de un agrupamiento con las dos últimas cifras, 89, y combinar las restantes para conseguir alcanzar la centena (Núñez, 1989).

Detecto, así mismo, la presencia de factores afectivos en los criterios de elección. Así, entre alumnos que se inclinan por las opciones A y B, algunos rechazan la solución que supone una mayor condensación de información (C) utilizando expresiones como "a mí no se me hubiera ocurrido" o "yo no hubiera sido capaz de hallarla", comentarios que reflejan un desasosiego, que probablemente no encontraríamos, si planteáramos una situación de elección semejante ante un conjunto de dibujos, de canciones o de poesías. Algún autor (Nimier, 1976) ha insistido en la importancia del papel ejercido por la afectividad profunda en el rechazo de las matemáticas por parte de algunos alumnos, fenómeno que no se presenta o al menos este investigador no ha observado con la misma intensidad ante otras materias del currículum escolar. Sea debido o no a estos factores afectivos, lo cierto es que, un buen número de encuestados, rechaza soluciones no por su aspecto, sino por el hecho de creerlas derivadas de estrategias o procedimientos difíciles o que no comprende.

En tercer lugar destaca un hecho notable: una cuarta parte de la población encuestada no se dejó, aparentemente, condicionar por la mayor o menor complejidad de la solución y eligió una (C) que no se obtiene fácilmente, pero que reúne las características de "bella" en el contexto del problema. Es decir, representa la mayor economía de medios al emplear la menor cantidad de números y de signos aritméticos posible. Indudablemente no es la primera solución que la mayoría de personas obtendría y probablemente es la más difícil de hallar, pero a pesar de ello fue elegida. Por su parte, el grupo que podríamos calificar de "expertos", los alumnos de matemáticas que participaron en la encuesta, se decantaron unánimemente por ella. Esto parece mostrarnos un hecho de relevancia didáctica: una parte de la población no especialmente dotada o interesada por la matemática, pero aparentemente también sin "conflictos afectivos" pendientes con ella, es capaz de apreciar atributos que los expertos califican como de "belleza" en las expresiones matemáticas. Es decir, ocurre lo que es habitual encontrar en el ámbito del arte, muchos profanos, y no solamente los artistas o profesionales de ese mundo, son capaces de apreciar las cualidades estéticas de los productos artísticos.

La segunda parte de la prueba consistía en elegir también la opción que "más gustaba" de entre las distintas igualdades que se proponían como soluciones del llamado "problema de los cuatro 4". El juego consiste en escribir 10 utilizando única y necesariamente cuatro 4 y las operaciones aritméticas conocidas que se deseen. Hay que advertir que no se presentaban todas las soluciones posibles, sólo quince de ellas, colocadas también de una manera aleatoria:

Obviamente sólo existen como variables el número y el tipo de operaciones implicadas. Realizado el cómputo de las respuestas se obtuvo que una solución fue elegida por casi un 80% (A) de los encuestados: $10 = (44 - 4) / 4$. Con frecuencias muy inferiores se señalaron otras tres opciones. Un 10% (B) de los alumnos optó por la solución: $10 = 4 + 4 + 4 - \sqrt{4}$. Mientras que sendos 5% (C y D) se inclinaron, respectivamente, por las dos alternativas siguientes: $10 = (4! * \sqrt{4}) / 4 - \sqrt{4}$ y $10 = 4! - 4 * 4 + \sqrt{4}$.

Observemos que en esta parte de la prueba, a diferencia de lo que ocurrió en la primera, la opción que podríamos calificar como de más elegante, A, es también una de las más fáciles de obtener y probablemente por ello obtuvo un índice tan alto de preferencias. Las razones que se adujeron para elegirla fueron del tipo: "intervienen pocas operaciones", "aparecen las operaciones más simples, sin recurrir ni a raíces ni a factoriales" o "es la de aspecto más sencillo".

Los alumnos que se decantaban por la solución B lo hacían porque la creían la más fácil de obtener. Justificaban su decisión con argumentos como: "parece la más sencilla" o "el cálculo es rápido".

Los que eligieron las opciones C y D utilizaron argumentos radicalmente opuestos a los anteriores: "se emplean las

$$10 = \frac{4 * 4 + 4}{\sqrt{4}} \qquad 10 = 4 * \sqrt{4} + \frac{4}{\sqrt{4}} \qquad 10 = \frac{4 * 4}{\sqrt{4}} + \sqrt{4}$$

$$10 = \sqrt{4} * \sqrt{4} * \sqrt{4} + \sqrt{4} \qquad 10 = 4 * 4 - 4 - \sqrt{4} \qquad 10 = 4! - 4 * 4 + \sqrt{4}$$

$$10 = \sqrt{4} * \left(4 + \frac{4}{4}\right) \qquad 10 = 4 * 4 - \frac{4!}{4} \qquad 10 = \frac{4!}{4} + \sqrt{4} + \sqrt{4}$$

$$10 = 4 + 4 + 4 - \sqrt{4} \qquad 10 = 4 + \sqrt{4} + \sqrt{4} + \sqrt{4} \qquad 10 = 4 * \sqrt{4} + 4 - \sqrt{4}$$

$$10 = \frac{4! + 4 * 4}{4} \qquad 10 = \frac{4! * \sqrt{4}}{4} - \sqrt{4} \qquad 10 = \frac{44 - 4}{4}$$

operaciones más diversas" y "parece la más difícil de obtener".

Si ahora nos fijamos en las soluciones que menos gustan se aprecia una total coherencia con las tendencias observadas. Así, los que inicialmente se inclinaron por las opciones A y B les desagradan las soluciones con muchas operaciones y además diferentes, especialmente las elegidas por C y D. Se emplearon los argumentos siguientes: "demasiadas operaciones", "se trabaja con números grandes", "no se me hubiera ocurrido tener en cuenta el factorial" o "a primera vista no parece que proporcione el resultado buscado".

Por su parte, en las opciones C y D, a la hora de descartar posibilidades, se observó un rechazo casi unánime hacia la expresión: 10 = (44 – 4) / 4. Las razones esgrimidas por los alumnos fueron rotundas: "es una solución muy sencilla" o "es trivial". Precisamente la "trivialidad" que manifiesta esta solución, provocó que los alumnos de matemáticas que la habían marcado como la preferida argumentaran ahora, como queriéndose excusar por el hecho de haberla elegido, que tenía la importante peculiaridad, además de su simplicidad, de ser la única generalizable: "serviría para representar 10 con cualquier otra cifra distinta de cuatro".

¿Qué nos sugieren estos resultados? La respuesta que parece más fácil de obtener, pues basta sumar tres cuatros y luego restar la raíz cuadrada de cuatro cuenta con un bajo porcentaje de elecciones. En cambio, la respuesta más simple (contiene el menor número de operaciones y además las de menor rango) y también una de las más fáciles de obtener, convoca la mayoría de preferencias. Decimos una de las más fáciles y no la más fácil porque requiere descubrir que los cuatros pueden unirse, hecho que las investigaciones sobre este problema muestran que no es una solución inmediatamente sugerida por aquellos que intentan resolverlo. No obstante, esta dificultad no parece ser tenida como extraordinaria, pues ningún encuestado manifiesta que "esto no se le hubiera ocurrido" al mencionarla entre las soluciones rechazadas. Así pues, parece que en esta situación, donde el grado de dificultad no es excesivo, la mayoría de alumnos se decanta por la opción más "elegante".

Curiosamente hay un pequeño porcentaje de alumnos que se inclina por preferir alguna de las dos soluciones que no se cuentan entre las consideradas "fáciles", al contrario, son más complejas, pues intervienen en ellas muchas operaciones, todas diferentes y entre las que, además, se incluye el factorial, una operación poco utilizada habitualmente. Observamos, por consiguiente, que estos encuestados, a los que se une también una parte de los alumnos de matemáticas, estimando que la solución más simple es aparentemente trivial, renuncian a elegirla y optan claramente por las soluciones más complejas. Ante la tesitura de tener que elegir entre lo "elegante" y lo "complejo", los gustos se dividen. Conviene matizar que el término "complejo", en matemáticas, no debe entenderse exclusivamente bajo la acepción negativa de lo que es difícil de obtener, sino que incluye también un sentido positivo como es el de recoger mayor información significativa, si bien, en ocasiones, ésta sólo es reconocible por los “expertos”. En el caso que nos ocupa, las respuestas C y D son ciertamente las más difíciles de obtener, pero también contienen un hecho matemáticamente relevante, como es el de hacer intervenir el mayor número de operaciones distintas, hecho que destacan los que las eligen. Ya hemos señalado, que algunos alumnos que se habían decantado por la opción A, conscientes de su excesiva “trivialidad”, justificaron su elección subrayando la propiedad que la caracteriza de ser la única generalizable para cualquier cifra (distinta de cero), es decir, han visto en ella una información que la hace más “compleja” de lo que aparenta la sencillez de su aspecto formal.

Pasemos ahora a comentar, también brevemente, la tercera parte del cuestionario. Se mostraron a los alumnos varias fracciones descompuestas, cada una de ellas, en suma de fracciones unitarias (fracciones con el numerador igual a 1). Se presentaban unas pocas posibilidades entre las infinitas existentes y se les pedía, como en los casos anteriores, que señalaran la que era de su mayor agrado y justificaran convenientemente su elección. En esta ocasión se prescinde totalmente de las operaciones (excepto de la suma) y el interés se centra exclusivamente en los números que, a diferencia de las situaciones anteriores, no están prefijados. La situación planteada se aproxima, más que las anteriores, a la realidad del cálculo cotidiano en donde aparecen expresiones matemáticas que raramente destacan por sus cualidades estéticas. Se trata, por consiguiente, de intentar descubrir la existencia de pequeñas características en los números y/o en su disposición que los hagan atractivos a los ojos de los alumnos encuestados.

Esta prueba provocó perplejidad en algunos alumnos y, a diferencia de lo que había ocurrido en las dos pruebas anteriores que habían sido contestadas por todos los encuestados, en esta última, un 10% no contesta o dice no saber. Recordemos, una vez más, que no se les pedía realizar ningún cálculo, sólo tenían que decidir por su aspecto. Algunos justificaron su indecisión con comentarios como: “no sé decidirme por ser demasiado difícil la relación entre la fracción inicial y las fracciones unitarias de la descomposición”. Otro pequeño grupo, de aproximadamente un 5%, puestos en la tesitura de elegir, opta por contestar, pero se deciden siempre por la primera de las opciones propuesta para cada fracción y así lo hacen constar explícitamente. En estos casos, de nuevo interfiere en la toma de decisiones la capacidad que el propio encuestado tiene para resolver el problema al que imaginariamente cree enfrentarse.

Excluiremos ambos grupos y centraremos nuestra atención en las respuestas del resto del alumnado. Para la fracción 2/75 las preferencias se dividen prácticamente por igual en dos únicas opciones: un 50% elige 1/50 + 1/150 y un 45 % opta por 1/60 + 1/100. Las razones que se

$$\frac{2}{75} = \frac{1}{38} + \frac{1}{2850} = \frac{1}{40} + \frac{1}{600} = \frac{1}{39} + \frac{1}{975} = \frac{1}{42} + \frac{1}{350} =$$

$$= \frac{1}{45} + \frac{1}{225} = \frac{1}{50} + \frac{1}{150} = \frac{1}{60} + \frac{1}{100}$$

$$\frac{2}{63} = \frac{1}{56} + \frac{1}{72} = \frac{1}{35} + \frac{1}{315} = \frac{1}{36} + \frac{1}{252} = \frac{1}{42} + \frac{1}{126} =$$

$$= \frac{1}{33} + \frac{1}{693} = \frac{1}{45} + \frac{1}{105} = \frac{1}{32} + \frac{1}{2016}$$

$$\frac{2}{51} = \frac{1}{30} + \frac{1}{102} + \frac{1}{510} = \frac{1}{30} + \frac{1}{170} = \frac{1}{26} + \frac{1}{1326} =$$

$$= \frac{1}{40} + \frac{1}{102} + \frac{1}{408} + \frac{1}{510} = \frac{1}{34} + \frac{1}{102} = \frac{1}{27} + \frac{1}{459}$$

$$\frac{2}{53} = \frac{1}{30} + \frac{1}{265} + \frac{1}{1590} = \frac{1}{42} + \frac{1}{106} + \frac{1}{318} + \frac{1}{689} =$$

$$= \frac{1}{36} + \frac{1}{212} + \frac{1}{318} + \frac{1}{477} = \frac{1}{27} + \frac{1}{742} + \frac{1}{1484} = \frac{1}{30} + \frac{1}{318} + \frac{1}{795}$$

esgrimen son diversas, pero aplicables a ambas respuestas: "números (denominadores) no muy rebuscados", "parecen las fracciones unitarias más fáciles de obtener", "el número mínimo de fracciones unitarias", "denominadores con números acabados en 0" o "denominadores formados por un menor número de cifras". Un muy pequeño grupo (5%) se inclina por la expresión: 1/38 + 1/2850 dando para ello un argumento razonable: "son las fracciones que tienen los denominadores con valores numéricos más distanciados".

La fracción 2/63 dio lugar a un 50% de respuestas en favor de 1/56 + 1/72 que argumentan, como motivo principal, el ser la única expresión que tiene como denominadores sendos números de sólo dos cifras. Un 20% de los encuestados prefirió, por tratarse de "denominadores múltiplos de cinco", la solución 1/45 + 1/105. Con porcentajes menores y por motivos muy diferentes se eligieron también otras tres expresiones: 1/42 + 1/126 "además de ser valores bajos, un denominador es múltiplo del otro"; 1/33 + 1/693 "por los números (múltiplos de 3) que aparecen en los dos denominadores" y 1/32 + 1/2016 "por ser los denominadores que más distan en valor absoluto".

Con la fracción 2/51 un 75% de los encuestados opta por la expresión 1/30 + 1/170 porque, además de poseer "sólo dos sumandos", "ambos son potencias de diez". Curiosamente la solución 1/34 + 1/102 que tiene, entre ambos, los valores más bajos de los denominadores sólo es elegida por el 20% de los alumnos. Finalmente, y en completa coherencia con respuestas anteriores, un 5% se inclina por la expresión que presenta las dos fracciones unitarias con denominadores más numéricamente distanciados entre sí: 1/26 + 1/1326.

Para la última fracción propuesta 2/53 existe unanimidad en las respuestas, todas ellas eligen la misma combinación de fracciones unitarias: 1/30 + 1/318 + 1/795, pues dentro de las que contienen el "menor número de sumandos" tiene "los denominadores menores". Observemos que, en esta ocasión, al tratarse de expresiones de tres o más sumandos, la opción de elegir aquellos con denominadores más distanciados numéricamente no puede aplicarse y, en consecuencia, los partidarios de este criterio se unen al general.

De nuevo, al contemplar las soluciones más rechazadas con sus respectivas justificaciones se observa una completa coherencia con los criterios expuestos al marcar las opciones preferidas. En la fracción 2/75 el rechazo mayoritario (80%) es hacia la expresión 1/38 + 1/2850 por incluir "el denominador de mayor valor absoluto". Los restantes alumnos, entre los que se encontraban lógicamente los que habían elegido precisamente esa fracción en primera opción, descartan la combinación que contiene el segundo denominador de mayor valor: 1/39 + 1/975.

La fracción 2/63 también recoge un amplio rechazo (80%) hacia la solución que incluye el denominador de mayor valor: 1/32 + 1/2016. De igual modo, el 20% restante se inclina por desechar la que contiene el segundo mayor denominador: 1/33 + 1/693.

Con la fracción 2/51 observamos también un predominio (60%) de las respuestas en contra de la combinación que posee el denominador mayor: 1/26 + 1/1326. Las otras dos expresiones rechazadas, ambas con la misma frecuencia (15%), son las que tienen más de dos sumandos: 1/30 + 1/102 + 1/510 y 1/40 + 1/102 + 1/408 + 1/510.

Para la última fracción propuesta 2/53 los rechazos se reparten prácticamente en porcentajes iguales (en torno al 25%) entre las cuatro expresiones restantes, después de descartar la que unánimemente había sido elegida en primera opción. Todas ellas contienen mayor número de sumandos o denominadores con valores más altos que la combinación en cuestión.

En esta prueba no hay diferencias significativas entre el grupo de alumnos de formación de profesorado y de matemáticas. La inmensa mayoría tiende, una vez superada la extrañeza inicial de no detectar soluciones "bellas" o "sencillas", por las alternativas en las que aparecen menos fracciones y con denominadores menores.

Hay que señalar también la preferencia por los denominadores múltiplos de cinco o de diez. Una manifestación de la impronta cultural impuesta por la base del sistema de numeración que empleamos. El lector habrá observado, sin duda, que también el autor de este trabajo se deja llevar por esa tendencia y ha redondeado los datos estadísticos que cita al múltiplo de cinco más próximo.

Otro aspecto a señalar es el agrado manifestado por algunos encuestados por números que presentan alguna determinada regularidad, ser múltiplos de 3, ser uno múltiplo de otro, etc.

Finalmente encontramos la curiosa preferencia mostrada por una pequeña parte de la muestra hacia dos fracciones unitarias formadas por denominadores con los valores más numéricamente distantes uno de otro. Aunque los alumnos no explican el motivo, dado que también esta respuesta se encuentra entre las del grupo de "expertos", cabe deducir que podría estar en su aplicabilidad en un contexto práctico, cuando nos encontramos ante la necesidad de redondear el valor de la fracción inicial mediante una sola fracción unitaria: si disponemos de una descomposición en sólo dos sumandos de las características indicadas podemos utilizar la de denominador menor y prescindir de la otra.

Finalmente, al compendiar las diferentes observaciones obtenidas en las tres partes de la prueba nos aparecen unas reflexiones, que creo pueden ser de utilidad tanto al interesado en cuestiones concretas de la práctica docente como al teórico de la educación matemática.

En primer lugar y quizás como consecuencia del propio papel y contexto educativo en el que se encuentra inserta la enseñanza de la matemática, en esta disciplina, a diferencia de lo que ocurre en otras, a los sujetos les resulta difícil separar un determinado producto de los procesos implicados en su obtención. Este hecho provoca que la habilidad de los sujetos en la materia condicione sus valoraciones. También interfieren en sus apreciaciones estéticas las relaciones afectivas que cada individuo ha establecido con la matemática, que son más intensas que las que se crean con otras materias que requieren menor implicación personal. Todo ello provoca una tendencia a sobrevalorar los productos derivados de procedimientos de ejecución fácil. Pero cuando se presentan situaciones en las que el grado de dificultad no es excesivo, la mayoría de los encuestados se inclina por preferir soluciones "bellas", aunque esto implique dejar de lado otras más sencillas de obtener. Lo cual nos muestra que las valoraciones estéticas se pueden "democratizar", siempre y cuando no intervengan procesos resolutivos complejos o desconocidos para el alumno.

A las cualidades de orden, simplicidad, claridad y parsimonia que se encuentran en las apreciaciones estéticas generales, en el caso de las matemáticas y más concretamente de la aritmética, se deben incluir otras, más específicas, referidas a cuestiones de muy variada índole: culturales (preferencia por la base 10), referidas al tamaño de los números (los valores menores son más apreciados), relacionadas con las propiedades aritméticas y especialmente con la teoría de la divisibilidad (múltiplos y divisores), posibilidad de extenderse a otras situaciones numéricas o su utilidad en ciertos contextos prácticos. Es evidente, que la apreciación y la valoración de estas cualidades no es igual para todos: depende de los conocimientos y preparación previos de cada individuo en el campo de las matemáticas.

Si nos situamos en el planteamiento teórico propuesto por Birkhoff, que comentábamos al principio de este trabajo, y aceptamos que la valoración estética en matemáticas también se sustenta en los factores englobados bajo los términos genéricos de "orden" y "complejidad", su propuesta no parece directamente aplicable al conjunto de los datos de nuestro estudio. Pero si separamos la población entre "expertos" y "no expertos" podemos obtener una visión más esclarecedora de la cuestión. De las respuestas obtenidas en la prueba parece deducirse que la expresión $E = O / C$ de Birkhoff se adapta bien a la población "no experta" en matemáticas, pues, en general, estos alumnos, valoran positivamente los factores asociados al término "orden" y la "complejidad" resulta ser, por el contrario, un claro freno a la consideración estética de los productos matemáticos. En cambio, para la población "experta" constituida por los alumnos de la licenciatura de matemáticas, que también aprecian positivamente los factores abarcados bajo la denominación genérica de "orden", la "complejidad" resulta ser un acicate para considerar "bella" una expresión matemática, por lo que sus respuestas están más próximas a adaptarse a la fórmula propuesta por Eysenck para la valoración estética: $E = O * C$.

Dirección del autor: José Mª Núñez Espallargas, Universidad de Barcelona, Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales y de la Matemática, Passeig de la Vall d'Hebron 171, 08035 Barcelona. E-Mail: jmnunez@ub.edu

Fecha de recepción de la versión definitiva de este artículo: 27.VII.2006

Bibliografía

BIRKHOFF, G. D. (1933) *Aesthetic Measure* (Cambridge, Harvard University Press) (Existe una edición facsimilar publicada por Kessinger Publishing en 2003).

DAVIS, P. y HERSH, R. (1988) *Experiencia matemática* (Barcelona, Labor).

DREYFUS, T. y EISENBERG, T. (1986) On the Aesthetics of Mathematical Thought, *For the Learning of Mathematics*, 6, pp. 2-10.

EYSENCK, H. J. (1941) The Empirical Determination of an Aesthetic Formula, *Psychological Review*, 42, pp. 83-92.

GHYKA, M. (1992) *Estética de las proporciones en la naturaleza y en las artes* (Buenos Aires, Poseidón).

HADAMARD, J. (1947) *Psicología de la invención en el campo matemático* (Madrid, Espasa Calpe).

KREUZER, H. y GUNZENHÄUSER, R. (1965) *Mathematik und Dichtung* (München, Nymphenburger).

KRUTETSKII, V. A. (1976) *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren* (Chicago, Chicago University Press).