REVISTA EMA
2005, VOL. 10, Nº 2, - VOL. 10, Nº 3, 413-439

# SIGNIFICADOS INSTITUCIONALES Y CONFLICTOS SEMIÓTICOS DEL LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ÁNGEL CONTRERAS, MANUEL GARCÍA Y
CARMEN SÁNCHEZ

*La enseñanza-aprendizaje de los objetos básicos del Análisis Matemático, en el nivel de Bachillerato y específicamente los fenómenos didácticos que emergen a lo largo del proceso de instrucción, ha constituido una problemática de investigación, en cuanto a los fenómenos didácticos que emergen a lo largo del proceso de instrucción, hoy vigente y en desarrollo. Tal y como indica Artigue (1998), para avanzar en la investigación han de efectuarse propuestas ligadas a enfoques de tipo ecológico y semiótico, donde las técnicas de reconstrucción del conocimiento matemático den explicaciones sólidas a tales problemas. En este trabajo, que se centra en el objeto: límite, tratamos de aportar una nueva visión del problema centrados en el objeto límite, por medio de un enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática (Godino, 2002).*

*The teaching-learning of the basic objects of Mathematical Analysis at upper secondary education and tertiary education levels has been a research issue, in addressing the didactic problems concerning the effective currently developing processes of instruction. As Artigue (1998) suggests, to advance in research we have to elaborate proposals bound to ecological and semiotic approaches, where the techniques of reconstruction of mathematical knowledge provide solid explanations concerning such problems. In this paper we intend to contribute with a new vision of the problem, centred in the limit object, by means of an ontological-semiotic approach (Godino, 2002).*

Palabras claves: análisis matemático, fenómenos didácticos.

## INTRODUCCIÓN

La enseñanza-aprendizaje del Análisis Matemático en los niveles del Bachillerato y primer año de Universidad presenta un desfase de tipo institucional, en cuanto a las diferencias de contrato didáctico (es decir, mientras en la universidad el estudiante sabe que ha de atenerse a la explicación teórica y formal del concepto, en el Bachillerato se utiliza un discurso más intuitivo y de aplicación práctica más que teórica), que contribuye en un alto porcentaje al fracaso académico en las asignaturas de Cálculo. Siendo éste un campo de problemas didácticos muy necesarios de resolver, la comunidad de investigadores de Didáctica de las Matemáticas ha abordado su solución desde muy distintas perspectivas teóricas. Por tanto, se considera necesario efectuar un breve recorrido por las teorías más relevante en el campo de la investigación en la enseñanza del Análisis Matemático, lo cual ayudará a centrar el problema de investigación. Se seguirán algunas de las ideas de Artigue (1998) y Contreras (2001).

En primer lugar, el pensamiento matemático avanzado (AMT)[1] —en Gascón (2000) puede verse una síntesis sobre ello— ha aportado a la didáctica del Análisis constructos como el 'concept image' y 'concept definition' (Tall y Vinner, 1981), 'el procept', 'concept' y los 'procesos de encapsulación' (Tall, 1991), y todos los elementos de la teoría APOS —acción, proceso, objeto y esquema— (Dubinsky, 1996), así como los últimos avances de Baker, Cooley y Trigueros (2000). Actualmente, en España, son varios los grupos que trabajan en esta línea de investigación, siendo las más estudiadas las ideas de Dubinsky —las cuales pueden verse en (Asiala, Brown, DeVries, Dubinsky, Mathews y Thomas, 1996)—, como lo muestra la actividad de grupos de investigación tales como los de la Universidad de Sevilla (Gavilán) y la Universidad de Alicante (Llinares) sobre el concepto de derivada de una función, la Universidad de Salamanca (González y Sierra) con el límite de una función y la Autónoma de Barcelona (Badillo y Azcárate en cuanto al concepto de derivada desarrollado por profesores en ejercicio.

Otra línea de interés está representada en lo que se denomina el pensamiento y el lenguaje variacional. En Cantoral (1997) se señala que, como parte del AMT, el pensamiento y lenguaje variacional trata de las relaciones entre la matemática de la variación y el cambio, por un lado, y de los procesos complejos del pensamiento, por otro. Estudia los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos propios de la variación y del cambio en el sistema educativo y en el medio social que le da cabida, buscando enriquecer las situaciones de enseñanza en la escuela.

El pensamiento y lenguaje variacional adopta una orientación múltiple que atiende a las distintas dimensiones humanas: cultural, individual y social, lo que se manifiesta por medio de lo epistemológico, lo cognitivo y lo didáctico. Como señalan Cantoral y Farfán (1998), se intenta dar a la investigación en Didáctica del Análisis Matemático una aproximación sistémica que incorpore las cuatro componentes fundamentales en la construcción del

1. Nota del Editor: Advanced Mathematics Think, las iniciales en inglés de "pensamiento matemático avanzado"

conocimiento: su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural, los planos de lo cognitivo y los modos de transmisión vía la enseñanza.

En su propuesta didáctica, buscan dar al estudiante que inicia un curso de Análisis, un lenguaje gráfico que le dote de los elementos necesarios para poder concebir a la función como un objeto (no sólo como herramienta) y para que tenga un dominio sobre el tránsito y los cambios entre los contextos algebraico, geométrico, numérico, icónico y verbal.

Una tercera vía (conjunto de líneas de investigación) está asociada a la didáctica de la matemática de la escuela francesa, la cual postula que el contenido disciplinar es una variable determinante en el estudio de los fenómenos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, por tanto, hay que problematizar dicho contenido en la investigación. Como señala Artigue (1998), la didáctica francesa centra sus estudios en Didáctica del Análisis Matemático en tres marcos teóricos: la teoría de los campos conceptuales, la de situaciones didácticas y la transposición didáctica. Son trabajos de tipo sistémico —estudio epistemológico de los conceptos, de concepciones de los estudiantes y de concepciones de los profesores— y donde la metodología de la ingeniería didáctica (análisis a priori, experimentación y análisis a posteriori) adquiere un papel relevante.

Es interesante el trabajo de Legrand (1997) (citado en Artigue, 1998), en el que se investiga una situación fundamental para la integral de Riemann que permite introducir el procedimiento integral como un útil que posibilita resolver un problema que tiene sentido para los estudiantes, pero no accesible sin dicha situación. Pero, como señala Artigue, trabajos sobre situaciones relativas al limite muestran la aparición de una ruptura entre lo que es accesible vía proceptual y las necesidades matemáticas de un funcionamiento formal.

Como apunta Artigue:

> …es necesario reconocer que el impacto de estos trabajos es todavía débil. En particular, los productos de ingeniería construidos se han difundido muy poco por fuera de la comunidad de investigadores. Esto plantea problemas cruciales que no pueden abordarse con sólo el marco sistémico clásico y necesitan la integración de problemáticas institucionales y ecológicas. (p. 248)

Es decir, se requiere ir abordando trabajos de tipo antropológico (Chevallard, 1992) y ontosemiótico (Godino, 2002), en los que se profundice en las estrechas relaciones estudiante-profesor y estudiante-estudiante.

Son relevantes los trabajos del grupo AHA (Approach Heuristique de l'Analyse) de Nicolás Rouche en la Universidad de Lovaina en Bélgica, los cuales tal y como señala Artigue, 1998:

> buscan, vía análisis histórico, devolver su densidad epistemológica a las teorías actuales, el comprender las condiciones que presentan sobre la enseñanza y encontrar equilibrios mejor adaptados que los proporcionados por el cálculo clásico. (p. 239)

Las propuestas didácticas en Hauchart y Rouche (1992), ponen de manifiesto que los alumnos se enfrentan al Análisis Matemático sin una preparación previa de carácter experimental, con lo que han de asimilar al mismo tiempo los fenómenos asociados a la aparición del infinito y de los límites con las teorías formales que los expresan y desarrollan matemáticamente. Basándose en Freudenthal, sostienen que los alumnos que se inician en Análisis Matemático se apoyan sobre objetos mentales, nociones que recurren a lo cotidiano y que les sirven para organizar e interpretar los fenómenos relativos al infinito y a esbozar sus primeros razonamientos.

Proponen que en los cursos introductorios de Análisis se tenga en cuenta el siguiente principio: no teorizar más que lo necesario, pero conducir progresivamente a los alumnos a una teoría formalizada, desde cuestiones que les son más familiares hacia preocupaciones más abstractas.

El problema de investigación de este artículo se refleja en la hipótesis de trabajo que se formula (relacionada con la génesis histórica de los conceptos matemáticos): el marco teórico EOS[2] permite realizar un estudio epistemológico histórico del límite de una función, el cual pone en evidencia significados institucionales y conflictos semióticos, algunos de los cuales también afloran en los manuales de educación secundaria que tratan el concepto de límite. En el segundo apartado del trabajo, se expone una síntesis del enfoque semiótico de la cognición matemática, marco teórico en el que se desarrolla el artículo. En el tercer apartado, se realiza un estudio epistemológico-histórico de los significados institucionales del límite de una función, destacando en el mismo los conflictos semióticos potenciales. Posteriormente, en el apartado cuarto, se efectúa una análisis de manuales, en cuanto a los conflictos semióticos presentes en ellos, buscando mostrar la pertinencia del estudio epistemológico-histórico realizado. Por último, se extraen las conclusiones pertinentes.

## EL ENFOQUE ONTOLÓGICO SEMIÓTICO DE LA COGNICIÓN MATEMÁTICA

El enfoque ontosemiótico de la cognición matemática (EOS) (Godino, 2002) se configura en torno a los dos modelos teóricos siguientes:

2. Nota del Editor: Enfoque Ontológico Semiótico.

- Teoría de los significados institucionales y personales de los objetos matemáticos (Godino y Batanero, 1994: 1998), que es, al menos en parte, equivalente al componente epistemológico de la teoría antropológica desarrollada por Chevallard (1992; 1997), al partir ambas teorizaciones de los supuestos básicos de la filosofía de Wittgenstein (1953; 1978).
- Teoría de las funciones semióticas (Godino y Recio, 1998), que es el germen de una teoría semiótico-cognitiva basada en presupuestos lingüísticos (Hjemslev, 1943; Eco, 1979).

Esta línea de trabajo ha sido asumida por otros investigadores y recientemente se ha aplicado a la Didáctica del Análisis Matemático (Font 2000; Contreras, Font, Luque y Ordóñez 2005).

Los elementos teóricos de este enfoque, que son utilizados en este trabajo tales como: entidades primarias, significados institucionales y conflictos semióticos, se describen a continuación:

## Entidades primarias

La relación entre los signos usados para codificar el conocimiento y los contextos que sirven para establecer el significado del mismo ha sido modelada por diversos autores mediante esquemas de tipo triangular. Entre estos esquemas se destacan los propuestos por Frege, Peirce, Ogden y Richards, así como la interpretación que hace Steinbring de ellos y que denomina el triángulo epistemológico. Los elementos que incluye Steinbring son concepto, signo / símbolo y objeto / contexto de referencia. Inspirados en esta tríada, así como en la tripleta conceptual de Vergnaud (1982), se esboza un modelo teórico que incluye los siguientes tipos de entidades primarias:

1) Lenguaje (términos, expresiones, notaciones, gráficos). En un texto vienen dados en forma escrita o gráfica pero en el trabajo matemático pueden usarse otros registros (oral, gestual). Mediante el lenguaje (ordinario y específico matemático) se describen otros objetos no lingüísticos.

2) Situaciones (problemas más o menos abiertos, aplicaciones extramatemáticas o intramatemáticas, ejercicios, ...); son las tareas que inducen la actividad matemática.

3) Acciones del sujeto ante las tareas matemáticas (operaciones, algoritmos, técnicas de cálculo, procedimientos).

4) Conceptos, dados mediante definiciones o descripciones (número, punto, recta, media, función, ...)

5) Propiedades o atributos de los objetos mencionados, que suelen darse como enunciados o proposiciones.

6) Argumentaciones que se usan para validar y explicar las proposiciones (sean deductivas o de otro tipo).

Estos seis tipos de objetos, que podemos calificar de matemáticos porque se ponen en juego en la actividad matemática, son los constituyentes primarios de otros objetos más complejos u organizaciones matemáticas, como los sistemas conceptuales, teorías, etc.

Las entidades lingüísticas tienen un papel representacional (se ponen en lugar de las restantes) y también instrumental, o sea deben contemplarse además como instrumentos de la actividad matemática. Aunque mucha actividad matemática es mental, poco podríamos avanzar en el trabajo matemático si no tuviéramos el recurso de la escritura, la palabra y los restantes registros materiales.

## Significados institucionales

Una característica que presentan los significados y los objetos personales es que son fenómenos individuales, pero al estar inmerso el sujeto en instituciones donde necesariamente se dan interacciones, tienen también un carácter colectivo, por tanto, cualquier análisis que los abordara desde uno solo de estos aspectos resultaría reduccionista.

Los objetos matemáticos se pueden considerar como entes abstractos que emergen progresivamente de sistemas de prácticas socialmente compartidas en una institución, ligadas a la resolución de cierto campo de problemas matemáticos. Puesto que las prácticas pueden variar en las distintas instituciones, hemos de conceder al objeto una relatividad respecto a las mismas. Esta emergencia es progresiva a lo largo del tiempo.

Para explicar la dialéctica institucional-personal en Godino y Batanero (1994, p. 342), se propone el constructo "significado de un objeto institucional para un sujeto desde la perspectiva de la institución" de la manera siguiente:

> Significado de un objeto $O_I$ para un sujeto p desde el punto de vista de la institución I: Es el subsistema de prácticas personales asociadas a un campo de problemas que son consideradas en I como adecuadas y características para resolver dichos problemas.

## Función semiótica

La noción de función semiótica se puede concebir, al menos metafóricamente, como "una correspondencia entre conjuntos", poniendo en juego tres componentes:

- un plano de expresión (objeto inicial, considerado como significante);
- un plano de contenido (objeto final, considerado como el significado del signo, esto es, lo representado, lo que se quiere decir, a lo que se refiere un interlocutor);
- un criterio o regla de correspondencia, esto es, un código interpretativo que regula la correlación entre los planos de expresión y contenido, estableciendo el aspecto o carácter del contenido referido por la expresión.

Tanto el objeto inicial como final pueden estar constituidos por uno, o varios, de los tipos de entidades primarias consideradas. Es decir, los tipos de entidades primarias consideradas pueden desempeñar el papel de expresión o de contenido en las funciones semióticas resultando, por tanto, diferentes tipos de tales funciones.

## Conflicto semiótico

Según Godino (2002, p. 258), se entiende por conflicto semiótico:

> La disparidad o desajuste entre los significados atribuidos a una misma expresión por dos sujetos (personas o instituciones) en interacción comunicativa y pueden explicar las dificultades y limitaciones de los aprendizajes y las enseñanzas implementadas.

# SIGNIFICADOS INSTITUCIONALES DE REFERENCIA DEL LÍMITE

## Significado geométrico del límite

Las entidades primarias que se tienen en cuenta a lo largo del estudio serán las situacionales además de aquellas otras que estén relacionadas con los conflictos semióticos. La ventaja de esta tipología es que permite el análisis de la actividad matemática desde una perspectiva operativa que facilita la explicitación del significado institucional, así como los conflictos semióticos potenciales asociados.

La idea de límite está asociada en el mundo griego a la Geometría y a la noción de infinito. Los filósofos pitagóricos con su idea de que el número constituye la esencia de todas las cosas, sufrieron un contratiempo al descubrir las cantidades inconmensurables. Con el hallazgo de la magnitud irracional se eliminaba la posibilidad de poder medirlo todo de manera exacta, creencia muy arraigada en los matemáticos griegos.

Como señala González (1992):

> Se había descubierto la magnitud irracional, el *alogon* (lo inexpresable), provocando una crisis sin precedentes en la historia de la Matemática. (p. 20)

Surgen, por tanto, los problemas que se derivan del tratamiento del infinito, "los cuales —como puntualiza Bessot et al. (1999)— están íntimamente ligados a la propia constitución de la matemática griega y descansan sobre la divisibilidad infinita de las magnitudes y sobre la posibilidad de considerar un razonamiento que comporta un número infinito de etapas." (p. 11). El paso siguiente fue la construcción de una teoría que soslayara los problemas señalados, aunque incapaz de dar una explicación a los mismos. Esta teoría apareció en los Elementos de Euclides, en la que —además de los axiomas, postulados y proposiciones— afloró un tipo de razonamiento (por reducción al absurdo) que permitía eludir las demostraciones de carácter infinito. Sin embargo, la genialidad griega no podía dejar escapar una fundamentación teórica que no abordaba la cuestión del infinito, sino que lo obviaba, y aparecieron las aporías de Zenon como muestra de la profundidad del pensamiento de esa civilización, cuya continuidad hay buscarla en el siglo XVII con el nacimiento del Cálculo Infinitesimal.

En la noción geométrica del límite correspondiente a la etapa griega, aparecen los siguientes elementos de significado, que se reflejan en las Tablas Nº 1 a 4:

| **Entidades situacionales** |
|---|
| Medición de la diagonal del cuadrado con relación al lado y obtención de la relación entre la medida de las diagonales del pentágono regular (Hipasos) |
| Realización de la cuadratura de una figura comprendida entre dos arcos de círculo de una configuración muy simple —lúnulas— mostrando que es que igual a un triángulo de lados dados (Hipócrates) |
| Cálculo de los volúmenes de la pirámide y del cono como la tercera parte de los del prisma y del cilindro, utilizando ideas metafísicas precursoras de la Geometría de los indivisibles (Demócrito) |
| Intento de resolver los problemas de la irracionalidad establecidos por Zenón, por medio de las razones entre magnitudes inconmensurables (Eudoxio) |

*Tabla Nº 1.*

| |
|---|
| En la proposición tercera de su obra Medida del Círculo, que dice: "el perímetro de todo círculo es igual al triple del diámetro, aumentado en un segmento comprendido entre los diez setenta y un avos y el séptimo del diámetro", acota la relación $\frac{P}{D}$ —la notación $\pi$ data de comienzos del siglo XVIII— con $\frac{P_{96}}{D}$ y $\frac{Q_{96}}{D}$, donde $P_{96}$ es el perímetro de un polígono de 96 lados inscrito y $Q_{96}$ el del circunscrito (Arquímedes) |

*Tabla Nº 1.*

| **Entidades argumentativas** | **Conflictos semióticos** |
|---|---|
| Aporías de Zenón | Creencia de que el límite no es alcanzable |
| Reducción al absurdo (Hipócrates) | Se elude el infinito actual |
| Método de exhausción (Eudoxio) | Se elude el infinito actual |
| Método mecánico de descubrimiento (Arquímedes) | |

*Tabla Nº 2.*

| **Entidades conceptuales** | **Conflictos semióticos** |
|---|---|
| Cantidades inconmensurables | Imposibilidad de medir |

*Tabla Nº 3.*

| **Entidades proposicionales** | **Conflictos semióticos** |
|---|---|
| Axioma de continuidad | Se elude el infinito actual |
| Principio de Eudoxio | Se elude el número irracional |

*Tabla Nº 4.*

Quedaron planteados problemas —asociados al límite— que fueron abordados posteriormente a partir del siglo XVII, bifurcándose en su desarrollo, por una parte, con la teoría de los indivisibles de Cavalieri y, por otra, con el método de Fermat.

## Significado pre-infinitesimal del límite

La Humanidad, desde el año 400 hasta el 1100 que corresponde a la Alta Edad Media, se desinteresa por el mundo físico y centra sus fines en la espiritualidad. De esta forma, las cuestiones relativas a la naturaleza —siempre que estuvieran ligadas a razones pragmáticas o, incluso, a mera curiosidad— carecían de valor alguno. Como señala Kline (1994):

> La Cristiandad, e incluso los últimos filósofos griegos, estoicos, epicúreos y neoplatónicos, resaltaron la elevación de la mente sobre la carne y la materia y la preparación del alma para una vida futura en el cielo. La realidad era la vida eterna del alma; y la salud del alma se reforzaba mediante el aprendizaje de verdades morales espirituales... Puesto que el estudio de la naturaleza no contribuía a alcanzar tales fines o a prepararse para la vida futura, era rechazado como algo sin valor e incluso herético. (p. 276)

Fue alrededor de 1100 cuando nuevas influencias van creando un clima intelectual, de tal forma que en Europa se comienzan a conocer los trabajos griegos de Euclides y Arquímedes fundamentalmente. En este entorno la Matemática infinitesimal se abre camino entre los escolásticos. Se pueden citar dos científicos que, en esta época medieval ya alumbraron ciertas ideas que pueden considerarse de matiz infinitesimal. Primeramente Brawardine (1290-1349), que distinguió dos tipos de magnitud infinita; primero, aquella que no tiene fin; segundo, aquella tal que dada cualquier magnitud finita siempre puede encontrase otra mayor. En segundo lugar, Oresme (1323-1382) introdujo una serie de ideas innovadoras: la de la constancia de la disminución de la variación en las proximidades de un extremo y la de una sumación continua para calcular la distancia como el área bajo el grafo velocidad-tiempo, de repercusión posterior en el Cálculo del siglo XVII.

Los aportes anteriores, así como la disposición de traducciones de las obras matemáticas griegas, facilitaron la emergencia y coexistencia de varios planteamientos de tipo preinfinitesimal a finales del siglo XVI y principios del XVII. Así, Stevin, resta importancia al doble razonamiento por reducción al absurdo y se desplaza hacia razonamientos infinitesimales; Kepler aborda aspectos relacionados con los infinitamente pequeños, aunque muy imbricados con la metafísica; por último, Cavalieri aporta su teoría de los indivisibles. Todos ellos, aunque con diferentes planteamientos en cuanto a las nociones que utilizan, comparten el uso de métodos infinitesimales que es lo que va a caracterizar la concepción.

La etapa que corresponde a este significado va desde el siglo XVI hasta la primera mitad del siglo XVII. En el significado pre-infinitesimal del límite, correspondiente a esta etapa, aparecen los siguientes elementos de significado, que se reflejan en las Tablas Nº 5 a 7:

| Entidades situacionales |
|---|
| Cálculo del centro de gravedad de una figura plana, desarrollado en su obra "De la estática". (Stevin) |
| Identifica una curva con una suma de segmentos infinitamente pequeños, un círculo con un conjunto de triángulos infinitamente pequeños. Enunció sus leyes en la obra "Astronomía Nova". Se planteó el problema de la búsqueda de los valores máximos y mínimos de una magnitud variable, al estudiar el aforo de toneles (Método de los infinitésimos). (Kepler) |
| En su obra "Discursos que se refieren a las ciencias nuevas", recompone las magnitudes continuas por medio de los indivisibles (la línea está formada por puntos, la superficie por líneas, ...). (Galileo) |
| En su obra "De la Dimensión de la Parábola" utilizó indivisibles curvilíneos, cilíndricos cuando estudió un sólido hiperbólico infinito. (Torricelli) |
| Desarrolla el método cinemático de las tangentes al considerar todas las curvas como trayectorias engendradas por la composición de dos movimientos de los que se conocen las velocidades ("Tratado de los indivisibles"). (Roberval) |
| Compara las superficies planas confrontando las líneas en que se pueden dividir y los sólidos, al confrontar las superficies en que se puede descomponer, en su obra "Geometría por medio de los indivisibles" (Método de los indivisibles). (Cavalieri) |

*Tabla Nº 5.*

| Entidades argumentativas | Conflictos semióticos |
|---|---|
| Las argumentaciones pre-inifinitesimales de Stevin y Kepler. | Se elude el razonamiento infinitesimal se argumenta de modo metafísico. |
| La aportación de los indivisibles de Cavalieri y Torricelli. | Se elude el razonamiento infinitesimal. |

*Tabla Nº 6.*

| Entidades conceptuales | Conflictos semióticos |
|---|---|
| La noción de lo infinitamente pequeño de Kepler. | Se elude el razonamiento infinitesimal. |
| Utilización de los indivisibles de distinta dimensión (Cavalieri) y de igual dimensión (Torricelli). | Se elude el razonamiento infinitesimal. |
| Uso, casi estricto, del marco geométrico. | No permite el uso de herramientas de carácter numérico que faciliten el razonamiento infinitesimal. Esto conduce a: Uso exclusivo de la aproximación gráfica sin acompañarse de los correspondientes valores de las aproximaciones numéricas de las variables independiente y dependiente. |

*Tabla Nº 7.*

El significado pre-infinitesimal resuelve ciertos problemas en los que se utilizan razonamientos infinitesimales y de indivisibles de carácter geométrico. Sin embargo, no pudo resolver problemas en los que era necesario haber usado los infinitamente pequeños numéricos.

Quedaron, por tanto, planteados problemas que posteriormente retomarón Fermat y luego Newton y Leibniz.

## Significado infinitesimal del límite

Este significado está asociado a la noción de infinitésimo y, por tanto, se usan métodos y razonamientos infinitesimales, aunque desde distintas interpretaciones respecto al infinitésimo.

Se considera por primera vez la idea de los infinitamente pequeños numéricos y no únicamente geométricos, como los indivisibles de la época anterior. “Las cuestiones de convergencia y aproximación quedan para estos matemáticos muy ligadas al cálculo numérico” (Robinet, 1983).

La etapa que corresponde a este significado va desde la segunda mitad del siglo XVII hasta los inicios del siglo XIX.

En el significado infinitesimal del límite, correspondiente a esta etapa, aparecen los siguientes elementos de significado, que se reflejan en las Tablas Nº 8 y 9:

| **Entidades situacionales** |
|---|
| Halla los puntos en los que una función polinómica toma un valor máximo o mínimo. (Fermat) (“Méthode pour la recherche du maximun et du minimun”, 1638, in Euvres, tome III, pp. 121.123 en Gaud, 1998, pp. 97-98). |
| Plantea un método para calcular tangentes en un punto cualquiera de una curva, aunque él sólo lo hace en la parábola. (Fermat) |
| Plantea un método para calcular tangentes en un punto de una curva, utilizando dos incrementos. (Barrow). |
| Plantea un método de naturaleza geométrico-mecánica para tratar de forma general los problemas del análisis infinitesimal (Método de las fluxiones). (Newton) (“La méthode des fluxions”, en Babault, 1985, pp. 75-76) |
| La aproximación de $\sqrt{20}$ (Euler) (Elémens d’Algébre”, en Bühler, 1990, pp. 163-167) |
| Cálculo de la tangente a una parábola (D'Alembert) (“Différentiel. En Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences”, en Babault et al., 1985, pp. 39-42 |

*Tabla Nº 8.*

| **Entidades argumentativas** | |
|---|---|
| El procedimiento de "adegalisation" (Fermat) | - Enmascara el infinitésimo y asocia el límite con el valor de la función. Esto conduce a considerar que el límite de una función en un punto es el valor de la función en ese punto. |
| El método de las fluxiones (Newton). | Los propios de la transposición numérica:<br>- considerar que la existencia de límite de una función en un punto significa que los valores de la variable dependiente se acercan a algo y no "tanto como queramos";<br>- centrarse en la forma de las aproximaciones de los valores de las variables independiente y dependiente más que en las propias aproximaciones. |
| Uso de la aproximación gráfica para establecer razonamientos. | Uso exclusivo de la aproximación gráfica sin acompañarse de los correspondientes valores de las aproximaciones numéricas de las variables independiente y dependiente. |
| Se considera la idea de los números infinitamente pequeños. | No se distingue entre aproximación y distancia. |

*Tabla Nº 9.*

El significado infinitesimal del límite resuelve algunos problemas relacionados con los infinitésimos en cuanto al cálculo de los mismos. Sin embargo, quedan planteados problemas de clarificación teórica del infinitamente pequeño que serán abordados posteriormente.

## Significado numérico del límite

Se define el infinitésimo como una variable cuyo valor decrece indefinidamente, en un esfuerzo de dotar de rigor a la fundamentación del Análisis Matemático, lo cual se explica por el desarrollo de su enseñanza:

> El hecho de tener que enseñanzarlo obliga a los matemáticos a fundamentar el Análisis sobre bases rigurosas. (Robinet, 1983)

Se aplican las reglas de los infinitamente pequeños como variables a conceptos del Análisis Matemático como el límite, la continuidad y la discontinuidad de funciones. La etapa que corresponde a este significado es la primera mitad del siglo XIX. En el significado numérico del límite, correspondiente a esta etapa, aparecen los siguientes elementos de significado, que se reflejan en las Tablas Nº 10 a 12:

| Entidades situacionales |
|---|
| Resolución de las formas indeterminadas $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}$ y $(1+\alpha)^{1/\alpha}$ cuando $\alpha$ converge hacia cero (Cauchy) ("Leçons sur le calcul différentiel", Cauchy, M.A-L., 1829) |
| Determinación de la reglas sobre el orden de una cantidad infinitamente pequeña (Moigno) ("Leçons de Calcul Différentiel et de Calcul Intégral", tome I, Moigno, M., 1840, Paris. Bachelier, imprimeur-libraire). |
| Demostración del teorema de los valores intermedios utilizando el concepto de continuidad (Bolzano) (citado por El Bouazzoui, 1988). |

*Tabla Nº 10.*

| Entidades argumentativas | Conflictos semióticos |
|---|---|
| Resolución de las formas indeterminadas $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}$ y $(1+\alpha)^{1/\alpha}$ cuando a converge hacia cero (Cauchy). | Creer que las variables independiente o dependiente toman el valor de $\infty$. |
| Determinación de la reglas sobre el orden de una cantidad infinitamente pequeña (Moigno). | |
| Demostración del teorema de los valores intermedios utilizando el concepto de continuidad (Bolzano). | |

*Tabla Nº 11.*

| Entidades conceptuales | Conflictos semióticos |
|---|---|
| Aplicación de las reglas de los infinitamente pequeños como variables a conceptos del Análisis Matemático, como la continuidad y discontinuidad de funciones. | - Considerar que existe el límite de una función en un punto cuando el número de valores de la variable dependiente que se acercan a él es infinito (o muy grande) y no casi todos ellos.<br>- Considerar que existe límite de una función en un punto porque la diferencia entre los sucesivos valores de la variable dependiente va disminuyendo. |

*Tabla Nº 12.*

Con el significado numérico del límite queda definido el infinitésimo por Cauchy como una variable que tiende a cero. Además, se fundamentan numerosos teoremas del cálculo.

Sin embargo, aún no hay una ruptura con la metafísica del cálculo. Expresiones tales como "tan pequeño como queramos" carecen de una adecuada precisión. Dicha precisión fue abordada con posterioridad.

## SIGNIFICADO MÉTRICO-ANALÍTICO DEL LÍMITE

La preocupación por la naturaleza del número, como paso previo a la consideración del límite, conduce a que, en el hacer matemático, sea antes el sistema que el objeto individual. Se rompe definitivamente con la "metafísica del cálculo".

Se define el concepto de entorno y las variables lógicas ε y δ, algebrizando el Análisis y, por tanto, suprimiendo todos los elementos trascendentes y geométricos en el mismo.

La etapa que corresponde a este significado es el tercer cuarto del siglo XIX. En el significado métrico-analítico del límite, correspondiente a esta etapa, aparecen los siguientes elementos de significado, que se reflejan en las Tablas Nº 13 y 14:

| Matemáticos | Entidades situacionales |
|---|---|
| Weiertrass | Desarrollo de una función continua sobre un intervalo cerrado del eje real como una serie de polinomios uniformemente convergente. |
| Darboux | Demostración correcta y rigurosa del teorema de Bolzano (teorema de Darboux) al demostrar la existencia de una cota superior mínima para un conjunto acotado de números reales. |
| Weiertrass | Cauchy había utilizado, sin probar, la existencia de un mínimo de una función continua definida sobre un intervalo cerrado, Weiertrass lo demuestra tanto para el mínimo como para el máximo. |

*Tabla Nº 13.*

| Entidades conceptuales | Conflictos semióticos |
|---|---|
| Preocupación por la naturaleza del número, como paso previo a la consideración del límite. En el hacer matemático es antes el sistema que el objeto individual. Se rompe definitivamente con la "metafísica del cálculo". | |
| Se define el concepto de entorno y las variables lógicas ε y δ., algebrizando el Análisis y, por tanto, suprimiendo todos los elementos trascendentes y geométricos en el mismo. | - Considerar que las letras ε y δ, que aparecen en la definición formal de límite de una función en un punto, representan magnitudes constantes o variables y no operadores lógicos.<br>- Considerar que el entorno ha de ser siempre simétrico. |

*Tabla Nº 14.*

El significado métrico analítico deja zanjado el problema de la precisión de la distancia con el $\varepsilon$ y el $\delta$. Posteriores ampliaciones basadas en la teoría de conjuntos dotaron al objeto límite de una generalización por medio del concepto de entorno topológico. Sin embargo, no se entrará en una nueva configuración dado que los objetivos de esta investigación se centran en estudiantes de primero de bachillerato.

## EL ESTUDIO DE MANUALES

Una vez estudiado los significados institucionales de referencia, se pretende analizar el significado institucional pretendido en primer y segundo curso de Bachillerato en Jaén provincia (España), en cuanto a la noción de límite de una función. Entendiéndose por significado pretendido como el sistema de prácticas que se planifica para un determinado objeto matemático de cara al desarrollo de un proceso instruccional en dicha institución.

El análisis de manuales permite extraer información sobre la evolución de los conceptos matemáticos, lo cual facilita la comprensión y situación de los diferentes obstáculos y concepciones inducidas por los textos. Además, como afirma Laborde (1988): "El estudio de los contenidos de enseñanza de un manual a otro, permite poner en evidencia fenómenos didácticos vinculados a la transposición de los saberes", siendo precisamente el manual uno de los elementos que determina la práctica docente, manifestando no sólo las concepciones de los autores y el sentir didáctico de una determinada época, sino también las distintas concepciones que se transmiten en el proceso de enseñanza a los estudiantes, una vez que se ha optado por un determinado texto.

Se describe el proceso seguido para el estudio de manuales indicándose cómo se inserta éste en todo el mecanismo de la transposición didáctica (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997), así como cuál ha sido el diseño del análisis y de qué manera se realizó la selección de los textos estudiados. Se analizan comparativamente manuales de enseñanza media y universitaria; donde se consideran variables como: enlace con ideas previas, conocimientos previos, objetivos, referencias históricas, introducción, definición, situaciones que según las aportes de diversos investigadores como: (Weber, 1986; Schubring, 1985, 1987 y 1997; Sánchez, 1997; Sánchez y Contreras, 1998; Contreras y Sánchez, 1998; Contreras et al., 1999 y Contreras, 2000) dan sentido al concepto, ejercicios, concepciones, obstáculos, actos de comprensión y relación con otros conceptos.

Otros investigadores, en diferentes contextos, también han señalado la importancia de los manuales en la enseñanza, tal es el caso de Radford

(1997), Sierra, González y López (1999) y González (2002). Incluso en épocas anteriores, científicos como García de Galdeano (1877), ya señalaba:

> Los textos se escriben para presentar la ciencia ordenada; pero esto no exige que la enseñanza los siga rigurosamente. Cada tratado presenta la ciencia en un estado definitivo, como traducción más perfecta del plan concebido por cada autor.

En estas ideas se puede apreciar una concepción sobre el manual como un mero transmisor del saber científico. Sin embargo, investigadores actuales resaltan la relevancia del manual, en cuanto al proceso de transposición didáctica (Chevallard y Joshua, 1991), como mediador del paso del "saber a enseñar" (conjunto de conocimientos, en los que se traducen los objetos a enseñar, destinados a que el alumno los pueda adquirir), al "saber escolar" (saber que aparece en los manuales).

Por último, hay que señalar que al tratarse de textos escolares, se podrán extraer conclusiones sobre la evolución de la propia estructura escolar, tratando de responder a preguntas relacionadas con la enseñanza de los conceptos de límite y continuidad de una función, tales como: ¿qué concepciones trasmiten los textos a los lectores? ¿qué obstáculos inducen? ¿cómo se puede facilitar la realización de actos de comprensión en el lector? ¿es necesario estudiar estas nociones como objeto de enseñanza y no como un mero instrumento para el aprendizaje de otros conceptos?

Como consecuencia de lo anterior, el trabajo hará posible aproximarse a una pregunta clave en el proceso de enseñanza-aprendizaje ¿cómo debe ser la enseñanza de estos dos conceptos para que sea eficaz? La respuesta que pueda darse podrá ser útil para la enseñanza de los conceptos elementales del Análisis Matemático.

El análisis de los manuales se ha efectuado teniendo en cuenta, el concepto de límite de una función con relación a dos variables: significados institucionales y conflictos semióticos.

## Manuales analizados

Los niveles académicos tratados han sido 1º y 2º grado del Bachillerato español y se han analizado siete manuales, de diversos autores, tres de primero y cuatro de segundo, pertenecientes a los años 1996, 1997 y 1998, que corresponden al periodo de implantación del Bachillerato según las directrices de la Ley de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE, España, 1990).

Para la elección de los libros de Bachillerato, se consultó directamente con los Departamentos de los Centros de Educación Secundaria. Una vez analizados los datos de la utilización de los textos de las diversas editoriales, se tomaron aquellos manuales más representativos en cuanto a la frecuencia de su uso.

## Cuadros correspondientes a los manuales

En este apartado figuran los resultados del estudio de manuales, según las variables indicadas anteriormente. En el caso de estos manuales, se ha especificado la discusión de los resultados como muestra del análisis efectuado.

### *Análisis del manual 1*

El Cuadro Nº 1 expresa los resultados del análisis efectuado sobre el límite de una función para el manual 1 (Negro et al., 1996).

| **Cuadro Nº 1. Análisis del manual 1. Límite<br>1º de bachillerato** | |
|---|---|
| **Significados Institucionales** | - Significado numérico del límite. |
| **Conflictos semióticos potenciales** | - Uso exclusivo de la aproximación gráfica sin acompañarse de los correspondientes valores de las aproximaciones numéricas de las variables independiente y dependiente<br>- Considerar que la existencia de límite de una función en un punto significa que los valores de la variable dependiente se acercan a algo y no "tanto como queramos".<br>- Considerar que existe el límite de una función en un punto cuando el número de valores de la variable dependiente que se acercan a él es infinito (o muy grande) y no casi todos ellos. |

Puede observarse que el manual conduce a tres conflictos semióticos al no haberse detectado la realización de argumentaciones que puedan facilitar la por parte del lector, la superación de dichos conflictos.

### *Análisis del manual 2*

Se ha elaborado el Cuadro Nº 2 para el estudio del límite de una función en el manual 2 (Negro et al., 1997).

| **Cuadro Nº 2. Análisis del manual 2. Límite<br>2º de bachillerato** | |
|---|---|
| **Significados institucionales** | - Significado numérico del límite.<br>- Significado infinitesimal del límite.<br>- Significado métrico-analítico. |

| | |
|---|---|
| **Conflictos semióticos potenciales** | - Uso exclusivo de la aproximación gráfica sin acompañarse de los correspondientes valores de las aproximaciones numéricas de las variables independiente y dependiente.<br>- Considerar que la existencia de límite de una función en un punto significa que los valores de la variable dependiente se acercan a algo y no "tanto como queramos".<br>- Considerar que existe el límite de una función en un punto cuando el número de valores de la variable dependiente que se acercan a él es infinito (o muy grande) y no casi todos ellos.<br>- Considerar que el entorno ha de ser siempre simétrico.<br>- Creer que las variables independiente o dependiente toman el valor de $\infty$ .<br>- Considerar que las letras ε y δ. que aparecen en la definición formal de límite de una función en un punto, representan magnitudes constantes o variables y no operadores lógicos.<br>- Considerar que el límite de una función en un punto es el valor de la función en ese punto. |

Es de destacar que se induce al lector a siete conflictos semióticos y, únicamente en el último caso, se den argumentos para facilitar su superación.

*Análisis del manual 3*

En el Cuadro Nº 3 aparece el estudio del límite de una función para el manual 3 (Anzola y Vizmanos, 1998a).

| **Cuadro Nº 3. Análisis del manual 3. Límite 1º de bachillerato** | |
|---|---|
| **Significados institucionales** | - Significado infinitesimal del límite. |
| **Conflictos semióticos potenciales** | - Considerar que la existencia de límite de una función en un punto significa que los valores de la variable dependiente se acercan a algo y no "tanto como queramos"<br>- Considerar que existe el límite de una función en un punto cuando el número de valores de la variable dependiente que se acercan a él es infinito (o muy grande) y no casi todos ellos.<br>- Creer que las variables independiente o dependiente toman el valor de $\infty$ .<br>- Considerar que el límite de una función en un punto es el valor de la función en ese punto. |

De los cuatro conflictos semióticos que induce el manual, en ninguno de ellos se facilitan modos de superarlos.

*Análisis del Cuadro 4*

El Cuadro Nº 4 expresa el análisis del manual 4 (Anzola y Vizmanos, 1998b), en cuanto al límite de una función.

| **Cuadro Nº 4. Análisis del manual 4. Límite 2º de bachillerato** | |
|---|---|
| **Significados institucionales** | - Significado numérico.<br>- Significado métrico-analítico. |
| **Conflictos semióticos potenciales** | - Considerar que la existencia de límite de una función en un punto significa que los valores de la variable dependiente se acercan a algo y no "tanto como queramos".<br>- Considerar que existe el límite de una función en un punto cuando el número de valores de la variable dependiente que se acercan a él es infinito (o muy grande) y no casi todos ellos.<br>- Creer que las variables independiente o dependiente toman el valor de $\infty$ .<br>- Considerar que el límite de una función en un punto es el valor de la función en ese punto. |

Al igual que en el caso anterior, en ningún caso se ofrecen modos que faciliten al lector la superación de los cuatro conflictos semióticos inducidos.

*Análisis del manual 5*

El Cuadro Nº 5 expresa el análisis efectuado para el manual 5 (Colera et al., 1996) sobre el concepto de límite de una función.

| **Cuadro Nº 5. Análisis del manual 5. Límite 1º de bachillerato** | |
|---|---|
| **Significados** | - Significado infinitesimal.<br>- Significado numérico. |
| **Conflictos semióticos potenciales** | - Uso exclusivo de la aproximación gráfica sin acompañarse de los correspondientes valores de las aproximaciones numéricas de las variables independiente y dependiente.<br>- Considerar que la existencia de límite de una función en un punto significa que los valores de la variable dependiente se acercan a algo y no "tanto como queramos".<br>- Creer que las variables independiente o dependiente toman el valor de $\infty$ .<br>- Considerar que el límite de una función en un punto es el valor de la función en ese punto. |

De igual modo que en los casos anteriores, en ningún caso se ofrecen pasos que faciliten al lector la superación de los cuatro conflictos semióticos inducidos.

### *Análisis del manual 6*

El Cuadro Nº 6 expresa el análisis efectuado para el límite de una función en el manual 6 (Colera et al., 1997).

| **Cuadro Nº 6. Análisis del manual 6. Límite 2º bachillerato** | |
|---|---|
| **Significados institucionales** | - Significado métrico-analítico |
| **Conflictos semióticos potenciales-** | - Uso exclusivo de la aproximación gráfica sin acompañarse de los correspondientes valores de las aproximaciones numéricas de las variables independiente y dependiente<br>- Considerar que la existencia de límite de una función en un punto significa que los valores de la variable dependiente se acercan a algo y no “tanto como queramos”<br>- Considerar que existe el límite de una función en un punto cuando el número de valores de la variable dependiente que se acercan a él es infinito (o muy grande) y no casi todos ellos<br>- Considerar que el entorno ha de ser siempre simétrico<br>- Creer que las variables independiente o dependiente toman el valor de $\infty$<br>- Considerar que las letras $\varepsilon$ y $\delta$, que aparecen en la definición formal de límite de una función en un punto, representan magnitudes constantes o variables y no operadores lógicos<br>- Considerar que el límite de una función en un punto es el valor de la función en ese punto |

De los siete conflictos semióticos a los que induce el manual, en ninguno de ellos se ofrecen formas que faciliten la superación.

### *Análisis del manual 7*

El análisis del manual 7 (Abellanas et al., 1996) sobre el límite figura en el Cuadro Nº 7 siguiente:

Los autores dan por sentado que con la definición formal de límite lateral se dan los actos de comprensión necesarios. Es evidente que para el lector de este manual esa “transparencia” resulta bastante opaca.

| **Cuadro Nº 7. Análisis del manual 7. Límite 2º de bachillerato** | |
|---|---|
| **Significados institucionales** | - Significado métrico-analítico. |
| **Conflictos semióticos potenciales** | - Uso exclusivo de la aproximación gráfica sin acompañarse de los correspondientes valores de las aproximaciones numéricas de las variables independiente y dependiente<br>- Considerar que la existencia de límite de una función en un punto significa que los valores de la variable dependiente se acercan a algo y no "tanto como queramos"<br>- Considerar que existe el límite de una función en un punto cuando el número de valores de la variable dependiente que se acercan a él es infinito (o muy grande) y no casi todos ellos<br>- Considerar que el entorno ha de ser siempre simétrico<br>- Creer que las variables independiente o dependiente toman el valor de $\infty$<br>- Considerar que las letras $\varepsilon$ y $\delta$, que aparecen en la definición formal de límite de una función en un punto, representan magnitudes constantes o variables y no operadores lógicos<br>- Considerar que el límite de una función en un punto es el valor de la función en ese punto |

Podemos observar que, de los siete conflictos semióticos inducidos, en tres de ellos, los últimos, se ofrecen pasos tendientes a su superación.

Como ejemplo del uso de la función semiótica en el intento de facilitar la superación del conflicto semiótico, veamos un caso. Así, en el conflicto semiótico colocado en cuarto lugar en la tabla: *Considerar que existe el límite de una función en un punto cuando el número de valores de la variable dependiente que se acercan a él es infinito (o muy grande) y no casi todos ellos,* en el manual se expone: "… $\mathrm{Lim}\ f(x) = L$, cuando $x$ tiende a $c$, deberá ocurrir que para toda sucesión $\{x_n\}$ que tiende a $c$, se cumpla que $\{f(x_n)\} \to L$ …" (Ibid., p. 277).

Es decir, se construye una función semiótica de expresión: *El* $\mathrm{Lim}\ f(x) = L$*, para $x$ tendiendo a $c$*, y de contenido: *deberá ocurrir que para toda sucesión que tiende a $c$, se cumpla que $\{f(x_n)\} \to L$*. Se trata de una función semiótica, de expresión una entidad conceptual, y de contenido una entidad argumentativa. Por tanto, se busca facilitar la superación en el lector del conflicto semiótico potencial descrito.

## CONCLUSIONES

En este artículo, hemos reflexionado acerca de las diversas corrientes teóricas de investigación en Didáctica del Análisis Matemático, así como en el enfoque de la TFS, habiendo aplicado los elementos teóricos de dicho enfoque al objeto límite de una función en sus significados institucionales. Según estos significados se ha profundizado en aspectos relacionados con el estudio de ambos, desarrollado según diversas dimensiones, lo cual supone, a nuestro entender, un avance en cuanto a la metodología de análisis de la evolución epistemológica-histórica de los objetos matemáticos. Concretamente, se han puesto de manifiesto las entidades primarias en cada uno de los significados, así como los conflictos semióticos potenciales asociados.

En cuanto a los significados institucionales, se considera que para la idea intuitiva de límite de una función es necesario el tratamiento didáctico de dos de ellos: los significados infinitesimal y el numérico aunque de una forma integrada a fin de que el lector pueda llegar a realizar una síntesis de ambos significados en el concepto de límite. Cuando se pasa a la idea formal del concepto de límite, hay que añadir a los dos significados anteriores el significado métrico-analítico, tratando también de lograr la integración de todas ellas.

Los conflictos semióticos a los que inducen los manuales tienen un especial interés en esta investigación, ya que al ser inherentes al propio concepto, es necesario que el lector tenga ocasión de enfrentarse a todos ellos y que, paralelamente, se le proporcionen situaciones de enseñanza que le faciliten la emergencia de funciones semióticas para poder superar dichos obstáculos. Son numerosos los conflictos semióticos en este trabajo, la mayoría de los cuales han podido ser detectados a lo largo del estudio.

## REFERENCIAS

Abellanas, L., García, J.C. y Martínez, C. (1996). Matemáticas 2. MacGraw-Hill.

Anzola, M. y Vizmanos, J.R. (1988a). Matemáticas 1, Editorial SM.

Anzola, M. y Vizmanos, J.R. (1988b). Matemáticas 2, Editorial SM.

Artigue, M. (1998). L'évolution des problématiques en didactique de l'Analyse, Recherches en Didactique des Mathématiques, 18 (2), 231-262.

Asiala, M., Brown A., DeVries D., Dubinsky E., Mathews D. y Thomas K. (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. *Research in Collegiate Mathematics Education II, CBMS 6*, 1-32.

Babault, M.L, Buhler, M., Debiard, A., Delale, M.L., Delmas, M.F., Denys, B., Grégoire, M., Hallez, M., Jozeau, M.F., Knerr, P., Paquelier, Y., Verdonck Fr. y Verley J.L (1985). *Mathématiques approche par textes historiques*. M. A.T.H. Nº 61. IREM Université-Paris VII.

Baker, B., Cooley, L. y Trigueros, M. (2000). A Calculus Graphing Schema, *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(5), 557-578.

Bessot, D. Cabon, J. J., Delale A., Lanier, D., Le Goff, J.P., Leparmentier, J., Leudet, P., Levard, M., Simon, P. y Trotoux D. (1999). *Aux origines du calcul infinitésimal*. Comprendre les mathématiques para les textes historiques. Cercle díhistoire des sciences. IREM de basse-Normandie. Ellipses.

Bühler, M., Grégoire, M., Hallez, M., Knerr, J.P., Perrineau, C., Plane y H., Verley J.L. (1990). *Mathématiques approche par textes historiques. M.A.T.H. Tome 2*. Nº 79. IREM Université-Paris VII.

Cantoral, R. (1997). Pensamiento y lenguaje variacional, Cuadernos del Seminario de Investigación del Área de Educación Superior del Departamento de Matemática Educativa, México, Cinvestav-IPN.

Cantoral, R. y Farfán, M.R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis, *Epsilon*, 42, 353-369.

Colera, J., Guzmán, M.D., Olivera, M.J. y Fernández, S. (1996). Matemáticas I, Editorial Anaya.

Colera, J., Guzmán, M.D.; Olivera, M.J. y Fernández, S. (1997). Matemáticas II, Editorial Anaya.

Contreras, A y Sanchez, C. (1999). Análisis didáctico de la enseñanza del concepto de límite de una función en textos franceses del siglo XIX, en M. Román (Coord.), *Educar enseñando* (pp. 67-90). Universidad de Jaén.

Contreras, A. (2000). La enseñanza del Análisis Matemático en el Bachillerato y primer curso de Universidad. Una perspectiva desde la teoría de los obstáculos epistemológicos y los actos de comprensión, IV Simposio de la SEIEM, Huelva.

Contreras, A. (2001). La investigación en la enseñanza del Análisis Matemático. Perspectivas actuales, I Seminario de Investigación de Didáctica del Análisis Matemático de la SEIEM, Madrid.

Contreras, A. y Sánchez, C. (1998). Estudio de manuales universitarios de la segunda mitad del siglo XX sobre el concepto de límite de una función, en cuanto a los ejemplos, *V Simposio de Enseñanza e Historia de las Ciencias,* Huesca, Jaca.

Contreras A., Font, V., Luque, L. y Ordóñez, L. (2005). Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 25* (2), 151-186.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique, *Recheches en Didactique des Mathématiques, 12* (1), 73-112.

Chevallard, Y. (1997). Familière et problématique, la figure du professeur, *Recherches en Didactique des Mathématique, 17* (3), 17-54.

Chevallard, I. y Johsua, M.A. (1991). *La transposition didactique*. La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas, el eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje,* Barcelona: ICE Universidad Autónoma y Ed. Horsori.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación a la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática 8* (3), 25-41.

Eco, H. (1979). *Tratado de Semiótica General*, Barcelona: Lumen, 2000.

Font, V. (2000). Procediments per obtenir expressions simbóliques a partir de gràfiques aplicacions a les derivades (tesis doctoral). Universitat de Barcelona.

Gascón, J. (2000). Los objetos del Análisis Matemático en los programas cognitivo y epistemológico, Seminario de Investigación impartido en el Departamento de Didáctica de las Ciencias de la Universidad de Jaén, pp. 1-60.

García de Galdeano, Z. (1877). *Consideraciones sobre la conveniencia de un nuevo plan para la enseñanza de las Matemáticas elementales*. Madrid.

Gaud, D., Guichard, J. Sicre, J.P., y Chrétien, C. (1998). *Des tangentes aux infiniment petits*. *Reflexións & travaux pour la classe*, IREM Université de Poitiers.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos, *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14* (3), 325-355.

Godino, J. D. y Recio, A. M. (1998). A semiotic model for analysing the relationships between thought, language and context in mathematics education. En A. Olivier y K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol 3: 1.8. South Africa: University of Stellenbosch.

Godino, J.D. y Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. En A. Sierpinska y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer.

Godino. J.D. (2002). Un enfoque ontológico semiótico de la cognición matemática, *Recherches en Didactique des Mathématiques, 22* (2/3), 237-284.

González, M. (2002). *Sistemas simbólicos de representación en la enseñanza del Análisis Matemático: perspectiva histórica*, Tesis Doctoral, Universidad de Salamanca.

González, P.M. (1992). *Las raíces del cálculo infinitesimal en el siglo XVII*, Alianza Editorial, Madrid.

Hauchart, CH. y Rouche, N. (1992). *Líenseignement de LíAnalyse aux debutants*, Academia-Erasme.

Hjemslev, L. (1943). *Prolegómenos a una teoría del lenguaje,* Madrid: Gredos, 1971.

Kline, M. (1994). El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días, Madrid: Alianza Universidad.

Laborde, C. (1988). Líenseignement de la géometrie en tant que terrain díexplotation de phénomènes didactiques. *Recherches en Didactique des Mathematiques, 9* (3), 337-364.

Legrand, M. (1997). La problématique des situations fondamentales et l'approach anthropologique. *ReperesIREM*, 27, 81-125.

Negro, A., Benedicto, C., Martínez, M. y Nevot, A. (1996). Matemáticas 1, Editorial Santillana.

Negro, A., Benedicto, C., Martínez, M. y Nevot, A. (1997). Matemáticas 2, Editorial Santillana.

Radford, L. (1997). On Psychology, Historical, and the Teaching of Mathematics. Towards a Socio-Cultural History of Mathematics, *For the Learning of Mathematics, 17* (1), 26-33.

Robinet, J. (1983). Une experience d'ingenierie didactique sur la notion de limite de fonction, *Recherches en Didactique des Mathématiques, 4* (3), *223-292*.

Sánchez, C. (1997). *Estudio estadístico sobre le proceso de enseñanza-aprendizaje de la noción de límite de una función*, Tesis Doctoral, Universidad de Granada.

Sánchez, C. y Contreras, A. (1998). Análisis de manuales a través del tratamiento didáctico dado al concepto de límite de una función: Una perspectiva desde los obstáculos, *Enseñanza de las Ciencias, 17* (1), 73-84.

Schubring, G. (1985). Essais sur líhistoire de líenseignement des Mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques, 5* (3),343-385.

Schubring, G. (1987). On the methodology of Analysing Historical Textbooks: Lacroix as texbook Author, *For the Learning of Mathematics, 7* (3), 41-51.

Schubring, G. (1997). *Analysys of Historical Textbooks in Mathematics*, Departamento de Matemática, PUC do Rio de Janeiro.

Sierra, M.; González, M. y López, M.C. (1999). Evolución histórica del concepto de límite funcional en los libros de texto de Bachillerato y Curso de Orientación Universitaria, *Enseñanza de las Ciencias, 17* (3), 463-476.

Tall, D. (1991). Intuition and Rigour: The role ofvisualization in the Calculus.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in Mathematics whit particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics,* 12, 151-169.

Vergnaud, G. (1982). Cognitive and developmental psychology and research in mathematics education: some theorical and metodological issues, *For the Learning of mathematics, 3* (2), 31-41.

Weber, J. (1986). *Basic content analysis*. Newbury Park, California: Sage University Press.

Wittgenstein, L. (1953). *Investigaciones filosóficas,* Barcelona: Crítica, 1988.

Wittgensteing, L. (1978). *Observaciones sobre los fundamentos de las matemáticas,* Madrid: Alianza Universidad, 1987.

*Ángel Contreras de la Fuente*
*Departamento de Didáctica de las Ciencias*
*Universidad de Jaén (España)*
*afuente@ujaen.es*

*Manuel García Armenteros*
*Departamento de Didáctica de las Ciencias*
*Universidad de Jaén (España)*
*magarmen@ujaen.es*

*Carmen Sánchez Gómez*
*Departamento de Didáctica de las Ciencias*
*Universidad de Jaén (España)*
*cgomez@ujaen.es*