PENSAMIENTO Y LENGUAJE VARIACIONAL: EL PRINCIPIO ESTRELLA COMO UN MECANISMO DE CONSTRUCCIÓN SOCIAL DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO

Mario Adrián Caballero-Pérez, Asesor: Ricardo Cantoral-Uriza

Cinvestav –IPN

mcaballero1988@hotmail.com, rcantor@cinvestav.mx

Sostenemos que una enseñanza centrada en los objetos matemáticos soslaya el uso de ideas variacionales en Cálculo, y por tanto representa un obstáculo para desarrollar el pensamiento y lenguaje variacional. Abordamos esta problemática desde la teoría socioepistemológica, dado que nuestro interés se encuentra en el pasaje de la centración en los objetos, a las prácticas que generan conocimiento. Para ello, consideramos esencial identificar los elementos socioculturales que favorecen el estudio de lo variacional. En el presente escrito describimos los avances realizados con base en un análisis literario desde la socioepistemología, a los trabajos de Piaget sobre causalidad y tiempo, en referencia a lo que llamamos principio estrella, el cual juega un papel importante en las prácticas predictivas y que sostenemos permite desarrollar un pensamiento y lenguaje variacional.

Palabras Clave: Variación, Causalidad, Tiempo, Socioepistemología.

Introducción

La enseñanza y aprendizaje del Cálculo ha sido tema de interés en diversas investigaciones de la Matemática Educativa, lo que ha llevado al planteamiento de diferentes posturas para abordar esta problemática, algunas centradas a la parte cognitiva, en cuanto a las construcciones mentales necesarias para la aprehensión de un concepto y llevarlo de una concepción proceso a una concepción objeto (Yerushalmy y Swidan, 2012), mientras que otras incorporan ideas relativas a los diferentes dominios científicos o al uso de herramientas tecnológicas que posibiliten un acercamiento alternativo (Sánchez, García y Linares, 2008).

Otras investigaciones incorporan ideas relacionadas a la variación de fenómenos. Por ejemplo, Carlson, Jacobs, Coe, Larsen, y Hsu (2002) trabajan el marco del razonamiento covariacional, que se refiere a las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían entre sí, identificando un carácter evolutivo a partir de cinco acciones mentales relacionadas con el uso de objetos matemáticos tales como razón de cambio o derivada.

Consideramos que una constante en las posturas antes mencionadas, es desarrollar sus investigaciones apegadas a lo que llamamos centración en los objetos matemáticos, lo que provoca que conceptos y procedimientos del Cálculo sean concebidos como entidades abstractas, preexistentes y externas al estudiante, soslayando la construcción social del conocimiento matemático.

Por ejemplo, en el caso del razonamiento covariacional, Chimal (2005) realiza una investigación con base en este marco y encuentra que los estudiantes no recurren necesariamente al uso de objetos matemáticos al argumentar sobre situaciones de variación, en particular el llenado de recipientes y, sin embargo, sus respuestas son en muchos casos correctas.

En ese sentido, nuestra postura tiene una premisa distinta, fundamentada en la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, en donde el énfasis está en las prácticas que hacen posible la construcción del conocimiento matemático (Cantoral, 2013). En otras palabras, no es el objeto matemático nuestro punto de interés, pues no nos bastará con observar un correcto "uso" de estos ante una actividad, sino que el énfasis estará en cómo las personas tratan con la variación por medio del desarrollo prácticas, que particularmente en el Cálculo se encuentran ligadas al estudio y predicción de situaciones de variación, pues este posee un carácter dinámico dado que surge de la necesidad de cuantificar cómo las cosas cambian (conceptos de variable y de función), la velocidad con la que se dan los cambios (la derivada), y la forma en cómo se acumulan los cambios (la integral) (Cantoral, 1990).

Al considerar esta naturaleza específica, se reconoce una construcción compartida por el uso que es desarrollada por la línea de investigación de Construcción Social del Pensamiento Matemático, que cuenta con una sub-línea de investigación denominada Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLVar), en la cual se considera significativo este carácter dinámico y las formas de "actuar y argumentar" sobre el cambio y la variación.

Investigaciones que abordan la problemática de la variación desde el marco teórico de la Socioepistemología han mostrado que el desarrollo de ideas ligadas a lo variacional puede ayudar a los estudiantes en el desarrollo de argumentaciones y significaciones para enfrentar situaciones no sólo escolares, sino también actividades profesionales como la del toxicólogo, ingenieros biomédicos, entre otros (García, 2008; Tuyub, 2009). Esto se debe a que el cambio y la variación se encuentran en las vivencias y experiencias cotidianas de los individuos y grupos sociales, a partir de las cuales la predicción se construye socialmente (Cantoral, Farfán, Lezama, Martínez, 2006).

En ese sentido, la práctica social del Praediciere, entendiéndola como normativa de la actividad humana en la búsqueda por la predicción, favorece el desarrollo de las ideas del Cálculo, puesto que la predicción requiere de estudiar aspectos variacionales para anticipar estados futuros mediante comparaciones, estimaciones y la construcción de modelos de explicación de los fenómenos.

Respecto a esto, en (Caballero, 2012) se menciona que una de las tendencias en trabajos sobre PyLVar ha sido el diseño de actividades que propicien el desarrollo de *estrategias variacionales*, pero los resultados muestran que la influencia de la enseñanza previa, sustentada en *la centración en los objetos matemáticos*, repercute en que los estudiantes no cuentan con las herramientas necesarias para hacer un estudio de la variación, tales como la comparación de estados o la estimación de comportamientos, por lo cual recurren al uso de definiciones o propiedades que no son recordadas correctamente, e incluso construyendo teoremas no válidos.

De modo que, aunque el propósito sea una descentración de los objetos, esta enseñanza centrada en ellos representa un obstáculo para el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, entendiendo a este como una forma de pensamiento formado por estrategias, razonamientos y formas discursivas que permiten discutir y comunicar el estudio y análisis del cambio y la variación. Conviene entonces preguntarse ¿cómo desarrollar este pensamiento y lenguaje variacional?

En este sentido, Camacho y Sánchez (2010) mencionan que un elemento esencial es incorporar a la enseñanza la idea de predicción de fenómenos. Consideramos además, que es necesario identificar aquello que permita "romper" *la centración en los objetos matemáticos* y generar estrategias y argumentaciones de lo variacional, que convenimos en llamar mecanismos de construcción social de conocimiento matemático, entendiéndolos como aquellos elementos de corte sociocultural que forman parte del pensamiento humano, que desde nuestra postura se encuentra en la base del desarrollo de prácticas predictivas y de aquellos elementos que se ponen en juego cuando se construyen formas de predicción basadas en el estudio de lo variacional.

Con esto en mente, presentamos una situación donde se pone en juego uno de estos mecanismo. Nos referimos al Problema de los Tres Cuerpos (PTC), donde la predicción exacta de las posiciones de planetas, bajo los paradigmas científicos de la época, no era posible y sin embargo, la búsqueda por la predicción orienta la construcción de una solución particular.

Isaac Newton en sus Principia plantea el problema de predecir las posiciones y las velocidades en cualquier instante de tiempo para dos cuerpos en el espacio (sistema Sol - Tierra) que se atraen mutuamente conociendo sus posiciones y velocidades iniciales. Dicho problema fue resuelto por él mismo, considerando n partículas de masas diferentes y resolviendo el caso particular para $n = 2$, mediante la formulación de su Ley de la Gravitación Universal, cuyas soluciones se pueden consultar en (Cantoral, 1990). No obstante, al considerar el mismo problema ampliándolo a tres cuerpos en el espacio (sistema Sol - Tierra - Luna), este se quedó por mucho tiempo sin solución debido a que las perturbaciones entre los cuerpos hacia que la predicción exacta fuera imposible.

El PTC fue estudiado más adelante por diferentes matemáticos, destacan entre ellos Euler, Bernoulli, Lagrange y Poincaré, quienes propusieron soluciones particulares al problema. Centraremos nuestra atención en la solución particular propuesta por Leonhard Euler. El contexto de Euler que dio pie al tratamiento del PTC, se encuentra normado por el desarrollo de la empresa marítima y la búsqueda de formas de navegación más eficientes. En ese tiempo el cálculo de las coordenadas de longitud era fácilmente realizado utilizando las efemérides de las lunas jovianas de Júpiter, en donde Euler contribuyó con métodos para ello. Sin embargo, para los capitanes era poco práctico observar a Júpiter mientras navegaban, por lo que una propuesta era fijarse en los movimientos lunares; empero las perturbaciones sufridas por la órbita lunar no seguían un patrón discernible, lo que dificultaba su uso (Olvera, 2008).

Para encarar esta situación, Euler (1775) considera el movimiento de dos masas grandes y la tercera pequeña, al nivel que se puede tomar tan pequeña como se quiera, una masa infinitesimal. Con esto el tercer cuerpo se verá afectado por las fuerzas gravitacionales de los otros, y al mismo tiempo los afectará. Al considerar la tercera masa despreciable, trata el problema como un sistema de dos masas, debido a que la influencia gravitacional del tercer cuerpo es despreciable al ser su masa muy pequeña comparada con las otras. Así, el Sol y la Tierra toman el papel de dos masas grandes y la Luna toma la de una de tamaño despreciable. De esta forma, predice las posiciones y velocidades de los tres cuerpos, y aunque estas soluciones son una aproximación, contribuyeron al desarrollo de la Mecánica Celeste.

De la solución propuesta por Euler al PTC identificamos un mecanismo de construcción social de conocimiento matemático que guía la actividad humana para dar predicciones sobre un sistema, al que hemos llamado *principio estrella* (P*). Este principio se manifiesta mediante los niveles de constantificación estudiados por Cantoral (1990), que retomamos en esta investigación para dar una explicación a la forma en cómo Euler construye su solución. El primero nivel se refiere a la elección de las variables que afectan significativamente al sistema en cuestión, pudiendo despreciar otras. En la solución de Euler, observamos esto al considerar como variables: posición inicial, velocidad, masa, y atracción gravitacional. Al elegir estas variables, se desprecian otras que no se consideran significativas para la predicción que se busca, tales como: las masas, velocidad y atracción gravitacional de los demás planetas del sistema solar.

El segundo nivel se refiere a la elección de los órdenes de variación que se estudiará, de manera que puede considerarse que un fenómeno involucra únicamente variaciones de primer orden (por ejemplo comportamiento lineal), y despreciar variación de orden mayor, o bien, considerar que interviene una variación de segundo orden (por ejemplo comportamiento cuadrático), y despreciar otros mayores. En la solución de Euler observamos esto al momento de elegir que la masa del tercer cuerpo sea muy pequeña con relación a la masa de los otros dos cuerpos, dado que al hacer esto, los efectos gravitacionales del tercer cuerpo no afectan significativamente a los otros dos, y en ese sentido, los órdenes de variación (el cambio del cambio) son acotados, lo que permite establecer predicciones sobre el movimiento.

Consideramos que el P* se hace presente en los niveles de constantificación descritos, pues se elige siempre la mínima variación que sea necesaria para lograr la predicción de un sistema. Esto tiene su génesis en la limitante de orden fisiológico para manejar variaciones de orden mayor a tres (Cantoral, 2013), lo cual hace que en la actividad humana se busque siempre la mínima variación para la predicción. De manera que el P* es una forma de pensamiento asociado a la predicción de fenómenos, que se caracteriza por la selección de las variables que se consideran significativas para la predicción, y por la selección del orden de variación más pequeño necesario para construirla. Dado lo anterior, postulamos al P* como un mecanismo de construcción social de conocimiento matemático asociado al desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional.

En el proyecto doctoral se pretende dar evidencia del papel del P* en el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, en particular, en el desarrollo de prácticas predictivas. Es así que nos preguntamos ¿Cómo se estructura el P* en el pensamiento humano para llevar a cabo predicciones ante situaciones de variación continua? Para dar respuesta se ha considerado caracterizar los niveles de constantificación asociados al P*, en particular interesa comprender cómo se lleva a cabo la selección de las variables que se consideran significativas, y cómo se trata con los órdenes de variación. Para ello, reportamos los resultados preliminares de un análisis teórico bajo la teoría socioepistemológica a los conceptos psicogenéticos de *causalidad* y *tiempo,* dado que se ha identificado que guardan relación con el desarrollo de ideas variacionales, lo cual nos ha permitido establecer una unidad de análisis sobre el papel del P* en la predicción de fenómenos de variación continua.

Marco teórico

Tomamos como referente teórico a la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, que postula que el conocimiento matemático tiene su origen en el conjunto de prácticas humanas que son aceptadas y establecidas socialmente (Cantoral, 2013), llamadas prácticas sociales, las cuales se entienden como normativas de la actividad humana. Son las prácticas las que favorecen la construcción del conocimiento matemático, lo que implica un énfasis distinto: pasar de los objetos a las prácticas. Esto permite salir de un dominio propiamente matemático, para incorporar otras prácticas de referencia (biología, física, economía, etc.) que favorecen el surgimiento y significación de un determinado concepto, noción o procedimiento.

Al enfocar nuestra atención en las prácticas sociales, la socioepistemología nos permite analizar el pensamiento y lenguaje variacional de las personas, y las prácticas ejercidas ante situaciones de variación por los grupos humanos, y no únicamente en la explicitación de fórmulas o teoremas, que no necesariamente dan cuenta del estudio de lo variacional. En Cálculo algunas de las prácticas identificadas son la comparación, seriación, estimación y predicción (Caballero, 2012), que surgen de la necesidad de predecir estados futuros.

Causalidad y tiempo

En la naturaleza nada permanece constante, todo se encuentra en un estado continuo de transformación, movimiento y cambio, que percibimos y en el que estamos inmersos. Ante ello surge la necesidad de anticiparse a los estados futuros, lo que ha llevado a la construcción de conocimiento, en particular conocimiento matemático para entender el carácter dinámico de la naturaleza y construir modelos predictivos. En la Física esto se ha sustentado en corrientes deterministas, paradigma bajo el cual todo tiene una causa y un efecto (Álvarez, 2006), es decir, existe una causalidad en la relación entre los acontecimientos, una *relación causal*.

Desde la perspectiva psicogénetica, el establecimiento de dicha relación se sustenta en las *explicaciones causales*, que consisten en los procesos mentales que permiten la explicación de las causas que originan algún fenómenos mediante la elección de los elementos esenciales involucrados y las relaciones que se establecen entre ellos mediante la identificación de transformaciones ocurridas (Piaget, 1977). Cuando la *relación causal* se determina y es expresada, deviene en una *explicación causal*. Estas explicaciones no se encuentran explicitas en la naturaleza, sino que se trata de regularidades extraídas de la experiencia, que dan una racionalidad a los fenómenos.

Nuestra hipótesis radica en que el estudio de la variación y el cambio exige de la construcción de *explicaciones causales*, ya que ante un fenómeno de variación continua en donde se busca la predicción, se identifican las variables significativas (aquello que cambia) y las relaciones entre ellas (la variación que presentan). Es decir, identificar qué variables afectan significativamente para la predicción, implica determinar cuáles se encuentra relacionadas causalmente. Por ejemplo, en la solución de Euler al PTC, la fuerza de atracción gravitacional depende de la masa de los cuerpos, por lo que existe una *relación causal* entre ellas, y por tanto influyen de manera importante en la predicción. Es así que la construcción de *explicaciones causales* expresa el primer nivel de constantificación, pues permite seleccionar las variables significativas.

Por otra parte, en cuanto al estudio del tiempo, los fenómenos temporales tienen la característica de que dejan de existir a medida que suceden, por tanto se requiere reconstruirlos. Se entiende por *reversibilidad* esta reconstrucción que permite analizar el desarrollo a pesar de que ya no es observable. Esto lo diferencia de nociones espaciales, ya que si *el espacio* describe el orden de los eventos simultáneos, el tiempo describe el orden de sucesión de los eventos que no son permitidos simultáneamente (Piaget, 1978).

De manera que al estudiar el tiempo se identifican estados intermedios en un acontecimiento que dan cuenta de su forma de realización. No obstante, dichos estados no suceden aleatoriamente, sino que tiene un cierto orden que se establece bajo una lógica basada en la *explicación causal* del evento, producto de realizar una seriación de los acontecimientos en una dirección de sucesión, ya que la *relación causal* se constituye sobre la base de que la causa antecede al efecto, y por tanto *las explicaciones causales* son una estrategia para organizar la experiencia de acuerdo con un orden temporal.

En ese sentido, la predicción de fenómenos de variación, si bien no siempre involucra el tiempo como una variable explicita, este se encuentra implícitamente involucrado a través del concepto mismo de proceso de cambio, donde el papel del tiempo es el de identificar o establecer su lógica de sucesión. Para ejemplificar esto consideremos las actividades presentadas en (Carlson, et. al., 2002), donde se pide anticipar la gráfica de la relación altura – volumen de recipientes con formas distintas. El objetivo consiste en identificar los niveles de pensamiento relativos al razonamiento covariacional al correlacionar los cambios en las alturas con los cambios en el volumen. Para ello se identifican estados intermedios en el crecimiento de las alturas, lo que permite correlacionar dichos estados con el crecimiento del volumen.

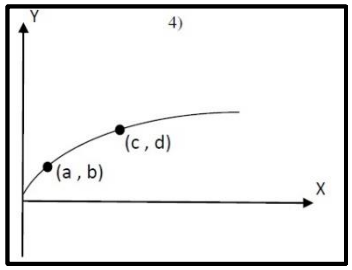
En dichas actividades *el tiempo* no está presente como una variable explicita, sin embargo, en la seriación realizada al crecimiento de las alturas encontramos inmersa esta noción, dado que se establece un orden de sucesión al crecimiento. Dicho orden no es arbitrario, sino que se construye con base en una *explicación causal*, que consiste en que una altura mayor en el recipiente corresponde a un estado posterior que una altura menor del mismo recipiente.

Es así que mediante la *reversibilidad* y *seriación* se logra construir las relaciones temporales de un evento, lo que nos lleva a considerar *el tiempo* no únicamente en el sentido de una medida, o variable de una relación funcional, sino en un sentido de *temporalidad*. Con esto nos referiremos a que el estudio del *tiempo* consiste en una división del fenómeno en varios estados sucesivos, cuya secuencia de sucesión queda determinada por una lógica referida a las relaciones causales entre dichos estados.

Este sentido de *temporalidad* y la construcción de *explicaciones causales,* permite, en relación al PyLVar, analizar la manera en cómo se llevó a cabo un fenómeno de variación continua y argumentar sobre la variación mediante el análisis de los procesos de cambio de un estado a otro. Daremos cuenta de lo anterior con ejemplos.

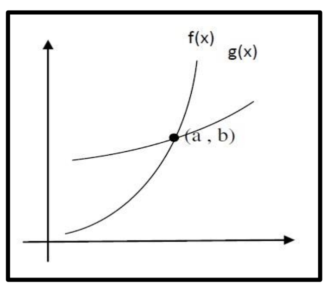
Dada una situación que involucre el estudio gráfico de la derivada, en un principio es posible fijarse en el cambio que experimenta algún elemento de la gráfica, como las alturas de las ordenadas. Sin embargo, percibir el cambio no es suficiente, se requiere de medirlo y expresarlo, es decir, estudiar la variación. Por ejemplo, en la primera actividad presentada en (Caballero, 2012) se muestran dos puntos de una gráfica y se pregunta por el valor numérico de la primera derivada. Es posible observar, a partir de la gráfica, que hay un incremento en las alturas, sin embargo la pregunta lleva establecer diferencias entre ellas (variación de primer orden) para determinar cuál presenta mayor valor de la derivada.

Figura 1: Gráfica de la actividad 1 de Caballero (2012)



En la actividad 2 se pregunta por el valor numérico de la segunda derivada respecto de dos gráficas que se intersecan en un punto. Esta situación implica analizar una variación de segundo orden, pues ahora no es suficiente establecer las diferencias de las alturas, sino que simultáneamente se requiere las diferencias de las diferencias antes analizadas. En otras palabras, analizar cómo cambia el cambio, lo que exige de una explicación causal en la medida de que los órdenes de variación están relacionados causalmente, esto es, el comportamiento variacional de una función, y por tanto la forma de la gráfica, es consecuencia de sus órdenes de variación.

Figura 2: Gráfica de la actividad 2 de Caballero (2012)



De modo que el estudio de situaciones de variación continua en Cálculo exige de un análisis simultáneo de los órdenes de variación. Esto sin embargo plantea un reto debido a que, si bien el cambio puede ser percibido, la variación no, esta requiere ser "medida" y por consiguiente se necesitan de estrategias que permitan hacer esta "medición", y más aún, estudiar simultáneamente los órdenes de variación. Consideramos que el P* es aquello que permite realizar este estudio mediante las ideas de *temporalidad* y *explicación causal*.

En ambas actividades vemos presente la idea de *temporalidad*, pues la gráfica, considerada como un todo, es seccionada en estados sucesivos que permiten analizar cómo es la relación causal entre ellos, o en otras palabras, permite determinar la forma de variación que presenta. En esta combinación entre la *temporalidad* y *lo causal*, sostenemos se encuentra el P*, pues como mencionamos, este principio posibilita hacer predicciones con base en el estudio de las variaciones de un fenómeno, en particular mediante los niveles de constantificación, donde el primer nivel referido a la selección de variables se hace visible cuando se decide analizar las alturas de las gráficas en lugar de las pendientes, y el segundo nivel referido a la elección del orden de variación se muestra al seleccionar un cierto intervalo de la gráfica y establecer una *temporalidad*, lo que permite estudiar el cambio del cambio en las alturas.

Reflexiones finales

Hemos postulado al P* como un mecanismo de construcción social de conocimiento matemático en la base del pensamiento humano, y en particular del pensamiento y lenguaje variacional, y mostrado cómo interviene en la realización de predicciones de un fenómeno a través de los niveles de constantificación, los cuales se hacen visibles en las *explicaciones causales* y la *temporalidad*. La primera permite identificar aquellas variables significativas en la predicción de un fenómeno de variación continua, mientras que la segunda tratar con los órdenes de variación al identificar el cambio del cambio mediante la secuenciación de estados sucesivos.

El análisis teórico que se ha mostrado será tomado como base para el diseño de un conjunto de actividades con el propósito de analizar la forma en cómo el P* aparece en las prácticas, argumentos, y formas de proceder de estudiantes de bachillerato y en la transición a la educación superior, mediante el análisis de sus respuestas y la realización de una entrevista semi-estructurada que nos permita indagar en ellas.

Los resultados de esta investigación se espera contribuyan al entendimiento de cómo se desarrolla el pensamiento y lenguaje variacional, pues se considera que el P* es la forma en cómo la gente piensa y actúa ante la variación, por lo que entender esto permitirá diseñar situaciones de aprendizaje que incorporen este principio para favorecer una descentración de los objetos matemáticos.

Referencias

Álvarez, J. (2006). La causalidad en la Física: Johannes Kepler. *Boletín de la Sociedad Mexicana de Física*, 20 (3), 23-32.

Caballero, M. (2012). *Un estudio de las dificultades en el desarrollo del lenguaje y pensamiento variacional en profesores de bachillerato*. Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. DF: México.

Camacho, A. y Sánchez, B. (2010). Análisis sociocultural de la noción de variabilidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13 (3), 29 - 52.

Cantoral, R. (1990). *Categorías Relativas a la apropiación de una base de significaciones para conceptos y procesos matemáticos de la teoría elemental de las Funciones Analíticas. Simbiosis y Predación* *entre las nociones de "el Prædiciere y lo Analítico"*. Tesis doctoral no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. DF: México.

Cantoral, R., Farfán, R., Lezama, J. y Martínez, G. (2006). Socioepistemología y representación: Algunos Ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativ*a, Número Especial, 83-102.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento matemático*. España: Gedisa.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., y Hsu, E. (2002). Appliying covariational reasoning while modeling dinamic events: A framework and a study. *Journal for research in mathematics educations*, 33, 35 -278.

Chimal, R. (2005). *Una mirada socioepistemológica a la covariación*. Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. DF: México.

Euler, L. (1775). Considérations sur Probleme des Tois Corps. *Opera Omnia*, 194 – 220.

Hernández, E. (2014). Anteproyecto doctoral "*Estudio socioepistemológico del Principio Estrella: una visión desde las prácticas interdisciplinarias*.". Departamento de Matematica Educativa, Cinvestav, IPN.

Moreno, G. (2014). Anteproyecto doctoral "*Socioepistemología: Matemáticas y Medicina. Elementos para el estudio de principio estrella: P**". Departamento de Matematica Educativa, Cinvestav, IPN.

Olvera, A. (2008). Euler: navegante de mares y planetas. *Miscelánea matemática*, 46, 27 – 48.

Piaget, J. (1977). Causality and Operation. En J. Piaget y R. Garcia (Eds.), *Understanding Causality* (pp. 1 – 10), United States of America: Norton Library.

Piaget, J. (1978). *El desarrollo de la noción de tiempo en el niño*. México: Fondo de Cultura Económica.

Sánchez, G., García, M. y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 11 (2), 267 – 296.

Yerushalmy, M. y Swidan, O. (2012). Signifying the accumulation graph in a dynamic and multi-representation environment. *Educational Studies in Mathematics*, 80, 287 – 306.