

LA EQUIVALENCIA DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS EN LAS SECUENCIAS NUMÉRICAS VISUALES

Sergio Damián Chalé Can, Claudia Acuña Soto

Cinvestav-IPN

schalecan@gmail.com; claudiamargarita_as@hotmail.com

En el presente escrito, exponemos los avances del trabajo que estamos realizando, el cual trata acerca de la equivalencia de expresiones algebraicas, en la situación concreta de resolución de secuencias numéricas, que pueden ser estudiadas a través de la visualización. Presentamos y analizamos los resultados de una actividad propuesta a 30 estudiantes de tercer grado de secundaria, que nos permite suponer la posibilidad de dotar de significado a la equivalencia de expresiones algebraicas a partir del análisis visual y nos permite plantearnos la pregunta ¿cómo el análisis visual influye en la construcción de significado de la equivalencia de distintas expresiones algebraicas que surgen durante la resolución de secuencias numéricas visuales? Como resultado preliminar podemos mencionar que a partir de éste tipo de análisis los estudiantes son capaces de construir distintas expresiones algebraicas para una secuencia numérica; pero la equivalencia de dichas expresiones algebraicas no se discute.

Palabras claves: Equivalencia, expresiones algebraicas, patrones, visualización.

Introducción

La equivalencia de expresiones algebraicas es un concepto matemático clave durante toda la formación escolar, es una de las grandes ideas del álgebra y juega un rol importante en la enseñanza de la matemática de todos los niveles escolares, ya sea explícitamente o implícitamente (Pilet, 2013; Kieran, Boileau, Tanguay & Drijvers, 2013).

Algunas dificultades conceptuales encontradas en los estudiantes en el aprendizaje del álgebra, podrían deberse al hecho de que en los salones de clase algunos contenidos son trabajados de forma explícita y otros quedan implícitos, pasando desapercibidos. La equivalencia de expresiones algebraicas, es uno de estos conceptos que se suponen implícitos en el currículo de matemáticas (Pilet, 2013).

Por otro lado, diversas investigaciones sugieren que la generalización de secuencias numéricas, podría ser una ruta viable de desarrollo del pensamiento algebraico, ya que este tipo de actividades permite a los estudiantes construir significados relativos a las expresiones algebraicas, modelar relaciones funcionales y promover la generalización algebraica (Radford, 2000; Carraher, Martinez, & Schliemann, 2008; Kieran, 2006).

Con base en la investigación que venimos desarrollando con estudiantes de tercer año de secundaria (14-15 años), en la que les presentamos tareas que incluyen la detección y modelación de patrones por medio de expresiones algebraicas, consideramos que durante la realización de este tipo de tareas aparece la oportunidad de introducir la noción de equivalencia, la cual frecuentemente no es abordada. Esto sucede porque aún se manipulen diversas expresiones algebraicas que modelan los patrones de las secuencias numéricas, no se discute su equivalencia, y en algunos casos, se deja de lado la ocasión para tratar el hecho de que existen expresiones equivalentes para éstas.

El objetivo de este escrito es presentar evidencia empírica que justifique nuestro trabajo doctoral, mostrando que los estudiantes son capaces de escribir distintas expresiones algebraicas para una misma secuencia.

Sostenemos que el significado de la equivalencia de distintas expresiones algebraicas, que surgen durante la resolución de secuencias numéricas visuales, podría lograrse a partir del análisis visual y que su equivalencia sintáctica, podría ser derivada de este análisis, estableciendo una conexión entre los distintos sentidos construidos a partir de este tipo de análisis.

Antecedentes

La equivalencia de expresiones algebraicas ha sido un tema poco estudiado, basta con intentar realizar una búsqueda en la literatura especializada de nuestra área de conocimiento y notar lo anterior. Quizá sea por lo que antes hemos mencionado, que es una idea que subyace a todo el conocimiento matemático y se encuentra explícita e implícitamente en los contenidos enseñados. Sin embargo, dado el rol crucial que juega en la simplificación de expresiones y la resolución de ecuaciones, es un tema que debe ser estudiado y clarificado, ya que tenemos poco conocimiento de las formas como los estudiantes comprenden la equivalencia de expresiones algebraicas, fuera de los problemas de resolución de ecuaciones (Zwetschler, & Prediger, 2013; Rojas, 2015).

La problemática relacionada con la equivalencia, en un primer momento, fue abordada como parte de otro conjunto de problemas o dificultades pertenecientes al concepto de igualdad. Un ejemplo de lo anterior, es el estudio longitudinal reportado en Kieran (1981), en el que se analizaron los usos y los conceptos asociados con el signo *igual*. En la investigación, se concluye que el uso del símbolo igual en ecuaciones algebraicas, tratado como un símbolo para la equivalencia, podría estar ocultando una comprensión superficial de las relaciones que subyacen entre el signo igual y la noción de equivalencia, causando confusión entre los estudiantes.

La existencia de múltiples representaciones de los objetos matemáticos, motivó el interés en el estudio de la equivalencia de éstas representaciones (Brenner, Mayer,

Mosely, Brat, Duran, Reed & Webb, 1997; Duval, 1999). En nuestra opinión, es en ese momento que los investigadores empezaron a identificar la problemática concreta relacionada con la equivalencia de expresiones, dejando de estudiarla como resultado de otros procesos.

Han sido realizados estudios de corte epistemológico e histórico (Asghari, 2009; Solares & Kieran, 2013), en los cuales se identificó que las dificultades asociadas a la equivalencia podrían estar relacionadas con las definiciones que se dan de ella o la forma como es abordada, pudiendo ser de manera sintáctica o numérica.

En un trabajo reciente (Rojas, 2015), reporta que los sentidos asignados por algunos estudiantes a cada una de las representaciones semióticas de un objeto matemático, como por ejemplo el círculo, parecen no tener vínculo entre sí que posibilite su articulación. El autor reporta las dificultades de algunos estudiantes para articular los sentidos asignados a las representaciones semióticas de un mismo objeto matemático, obtenidas mediante transformaciones de tratamiento.

En este último punto, la articulación de diversas expresiones algebraicas, es que centraremos nuestra atención, ya que nuestra propuesta va encaminada a cuestionarnos acerca de ¿cómo el análisis visual influye en la construcción del significado de la equivalencia de expresiones algebraicas que surgen durante la resolución de secuencias numéricas visuales? y ¿cómo la equivalencia sintáctica puede ser analizada por los estudiantes a partir del análisis visual que surge durante la resolución de este tipo de secuencias?

Referentes teóricos

El pensamiento algebraico es una forma particular de reflexionar matemáticamente y es considerada una práctica cognitiva mediada por signos. Son tres las características que hacen distintivo el pensamiento algebraico: un sentido de *indeterminación*, que es propia de los objetos algebraicos básicos tales como incógnitas, variables y parámetros; la *analiticidad* de los objetos matemáticos, que hace referencia a la posibilidad de operar con ellos; y el *modo simbólico* peculiar que tiene para designar a los objetos matemáticos (Radford, 2006a).

En toda actividad matemática se recurre a la transformación de signos dentro de sistemas semióticos culturalmente dados, por tanto, el aprendizaje de las matemáticas intrínsecamente es, ante todo una actividad semiótica (Radford, 2000). Para comprender el uso de los signos se debe tener en cuenta la actividad reflexiva que subyace a la coordinación de sistemas semióticos (Duval, 1999).

El significado de un objeto es atribuido a la cultura y tiene una existencia que trasciende al sujeto (Radford, 2006b), es estable, descontextualizado y general, está más asociado a la semántica cultural. Mientras que el sentido atribuido a un objeto

matemático depende tanto del sujeto como del contexto en el que lo aborde, se trata entonces de algo flexible, dinámico, en movimiento, y es relativo a varias modalidades sensoriales y semióticas, asociado más a la pragmática (Rojas, 2015).

En el caso de las secuencias numéricas visuales, la equivalencia podría dotarse de significado, teniendo en cuenta que a partir del análisis visual (visualización), es posible construir distintas expresiones algebraicas para un mismo patrón. Al mismo tiempo será necesario realizar transformaciones de estas expresiones algebraicas para comprobar su equivalencia sintáctica.

La transformación algebraica es un proceso sutil de cambio entre sentidos, sin embargo el significado permanece. Por ejemplo, las diferentes ecuaciones de una circunferencia, nos permiten reconocer distintos elementos de la misma; dependiendo de cuál ecuación se elija, la ecuación de la circunferencia se transforma y sus sentidos igual, aunque su significado permanece. De la misma manera, ocurre en las expresiones algebraicas que surgen en la resolución de secuencias numéricas, los distintos análisis visuales llevan a distintas expresiones algebraicas, cuyos sentidos dependen de cómo este análisis visual fue realizado, lo cual ejemplificaremos más adelante.

Estas breves ideas antes expuestas, nos permitirán discutir acerca del significado y sentido asociado a diferentes expresiones algebraicas que surgen del análisis de las secuencias numéricas visuales. Quedan pendientes para el desarrollo del trabajo, aclarar y fortalecer la idea equivalencia sintáctica, la parte relacionada con la semántica y reflexionar ampliamente acerca del papel de la visualización.

Método

A continuación desarrollaremos un análisis cualitativo de una actividad que fue propuesta a 30 estudiantes de tercer grado de secundaria (14-15 años). La finalidad es solamente realizar una descripción de las respuestas de los estudiantes a las preguntas que se les planteó, para dar evidencia de nuestras preguntas e hipótesis de investigación. La descripción tiene carácter exploratorio, es decir, dar cuenta de lo que los estudiantes hacen cuando se enfrentan a la resolución de secuencias numéricas visuales y cómo la equivalencia de expresiones algebraicas es dejada de lado.

Para el análisis de la actividad, el proceso de resolución fue grabado; se contó con los apuntes realizados por los estudiantes, los cuales plasmaron en las hojas de trabajo que se les entregó, y las notas de campo del investigador. Durante la resolución de la actividad, se plantearon algunas preguntas espontáneas por parte del investigador, que nos ayudaron a aclarar las formas de pensamiento y explicaciones de los estudiantes.

Los participantes en la investigación

La investigación se llevó a cabo con 30 estudiantes de la Escuela Oficial Número 92 del Estado de México, los cuales cursaban el tercer año de secundaria (14-15 años).

Los estudiantes, ya contaban con estudios de algebra básica de su primer y segundo año de secundaria (12-14 años), en el cual, según el plan de estudios vigente, se abordaron temas relativos al álgebra. Entre los temas que habían sido estudiados, podemos mencionar: expresiones algebraicas en contexto, el lenguaje algebraico, el valor numérico de expresiones algebraicas, operaciones algebraicas con monomios, binomios y trinomios.

Para llevar a cabo el diseño de nuestra actividad, en un primer momento realizamos una investigación documental, en la que pudimos notar el estado del arte en las tareas de secuencias numéricas visuales. A partir de los resultados obtenidos en esta primera fase, y con base en nuestras hipótesis, iniciamos el diseño de la actividad de clase.

La actividad propuesta a los estudiantes tuvo como objetivo evidenciar las diferentes formas como los estudiantes organizan la información visual cuando se les presenta secuencias de crecimiento geométrico. En este escrito solo presentamos el análisis de una actividad, Figura 1, que es la que nos permite justificar nuestra pregunta de investigación e hipótesis.

Figura 1. La actividad

8. En la figura 8 se tiene una secuencia, analiza y responde las preguntas que se plantean.



Figura 8

- Dibuja el cuarto y quinto término de la sucesión
- Escribe un mensaje para otro chico, explicando claramente qué debe hacer para encontrar cuántos cuadrados habrán en cualquier elemento de la secuencia.

- Escribe una fórmula para calcular la cantidad de cuadritos en cualquier elemento de la sucesión.

En la actividad se presentó a los estudiantes una secuencia de figuras, el objetivo final era modelar su crecimiento y escribir una expresión algebraica para ello. Primero, se fomenta un análisis de la secuencia presentada; en segundo lugar, una traducción a palabras escritas de este análisis de crecimiento y finalmente en tercer lugar, la escritura de la expresión algebraica que modela el crecimiento de la secuencia de figuras. Fuera de la actividad, los estudiantes fueron cuestionados acerca de la equivalencia o no de las expresiones algebraicas a las que llegaron.

Resultados y Análisis

A continuación, presentamos y analizamos el caso de dos estudiantes (B y A) para ejemplificar el tipo de respuestas que los alumnos dan en la resolución de secuencias numéricas visuales. Elegimos a estos estudiantes, porque fueron los que más comprometidos se mostraron con el desarrollo de las actividades propuestas.

En la resolución de la actividad, los estudiantes fueron capaces de desarrollar diversas interpretaciones de un mismo objeto. El análisis que realizaron de la secuencia presentada los llevó a construir diversas expresiones algebraicas para una misma situación.

Los estudiantes notaron el crecimiento del patrón de diversas maneras, véase la Figura 1.1, 1.2 y 1.3. en las que se responde el inciso b de la actividad. Por medio de lo escrito por los estudiantes, podemos notar cómo perciben el crecimiento del patrón. La primera y segunda respuesta que se encuentra en la Figura 1.1 y 1.2, respectivamente, nos dan evidencia de que los estudiantes visualizaron cada elemento de la secuencia como un conjunto, al cual se le agrega cierta cantidad de cuadros de figura en figura. En el primer caso la detección del patrón por este medio, rinde frutos para la generalización, mientras que en el segundo caso la asociación distinguida, no es adecuada para desarrollar la formulación de lo general.

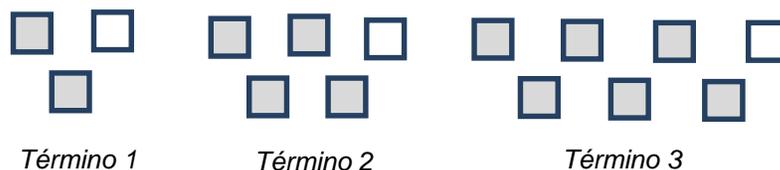
Hay que hacer notar que la visualización no solo sirvió para expresar las relaciones entre las figuras, sino que también para explicar y dar razón de los crecimientos y la relación de éstos con la posición que ocupan los elementos de la secuencia.

La respuesta plasmada en la Figura 1.3, nos da evidencia de una descomposición de la secuencia en filas, ésta a la vez en sub-elementos que forman sub-figuras, cuya cantidad depende de la posición que ocupa cada elemento dentro de la secuencia. Lo anterior permitió al estudiante organizar de manera adecuada la relación existente entre los elementos de la figura, y lo llevó a generalizar de manera correcta, llegando a expresar lo anterior a través de la expresión algebraica adecuada.

Figura 1.1

b. Escribe un mensaje para otro chico, explicando claramente qué debe hacer para encontrar cuántos cuadrados habrán en cualquier elemento de la secuencia.

El número de cuadradas es el doble del término más 1



Nuestra justificación no quedaría completa, si no mostramos que estos diversos modos de ver, llevaron a los estudiantes a expresar la regla que sigue la secuencia numérica visual de formas distintas. Para ello analizaremos las respuestas dadas por los estudiantes al inciso c. y presentamos algunos extractos de un breve intercambio de ideas que se tuvo con los estudiantes al momento de plantear sus respuestas.

La respuesta dada al inciso c por la estudiante que organizó según lo mostrado en la Figura 1.1, fue $C_n = (n \times 2) + 1$. La estudiante explicó la expresión obtenida de la siguiente forma:

I (Investigador): Brenda por favor.

B: Nuestra fórmula fue, la cantidad de cuadrillos es igual a dos n más uno.

$$C_n = 2n + 1$$

I: ¿Por qué pusiste $2n + 1$? Bueno, solo $2n$.

B: Porque n es el término, entonces si el término es 1, va ser dos veces (*Señalando el primer elemento de la secuencia y los cuadrados inferiores y superiores*) en estos dos, más el uno que siempre va ser constante.

I: Muy bien, explícamelo con éste (*Señala el segundo elemento de la sucesión*)

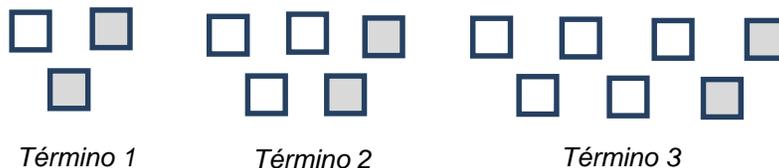
B: Si n es dos, que sería el término (*el número de la posición*), están los dos (*señala los cuadrados de la parte superior e inferior*), más 1.

La estudiante traduce “el doble del término” por $(n \times 2)$ y agrega “+1”. Es evidente la conexión entre lo analizado y la simbolización de lo analizado en términos algebraicos.

Figura 1.2

- b. Escribe un mensaje para otro chico, explicando claramente qué debe hacer para encontrar cuántos cuadrados habrán en cualquier elemento de la secuencia.

que la secuencia va aumentando de dos en dos

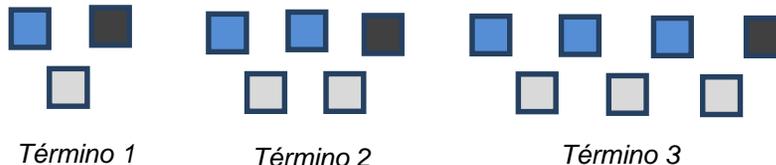


En la respuesta mostrada en la Figura 1.2, el estudiante escribió una explicación de cómo crecía la secuencia, sin embargo, para llegar a la expresión algebraica de la regla que subyace a ella no es suficiente con notar el crecimiento de dos en dos, sino que también es necesario analizar el comportamiento de la otra parte de las figuras, y relacionar esto último con el crecimiento de dos en dos.

Figura 1.3.

- b. Escribe un mensaje para otro chico, explicando claramente qué debe hacer para encontrar cuántos cuadrados habrán en cualquier elemento de la secuencia.

Los cuadros de abajo son el número de la posición y arriba son el número de la posición más uno



Por otro lado, el análisis que se muestra en la Figura 1.3 es el más rico que surgió en la actividad, el estudiante pudo conectar las relaciones entre las figuras a partir de la separación de ellas en sub-figuras, lo que llevó a expresar correctamente esta relación en una expresión algebraica (Figura 1.4).

Figura 1.4

- c. Escribe una fórmula para calcular la cantidad de cuadrillos en cualquier elemento de la sucesión.

$$C_n = n + n + 1$$

Analicemos lo que el estudiante (A) argumenta acerca de su expresión algebraica, (I) corresponde a las intervenciones del investigador:

I: ¿Podrías explicar el patrón con el mensaje?

A: Los cuadritos de abajo son el número de la posición y los de arriba son el número de la posición más uno y así.

I: Escribe tu fórmula.

A: (La estudiante escribe la expresión algebraica que construyó) $C_n = n + n + 1$. n que es el número de la posición, más n igual al número de la posición, más uno que son los que van arriba (Se refiere a $n + 1$)

I: Me podrías decir esta n (señalando el primer término de la ecuación escrita por la estudiante) en la figura, ¿dónde está?

A: Abajo (Marca con el plumón los cuadros de la parte inferior del elemento 3)

I: ¿Y esta otra n ?

A: Arriba (marca con el plumón tres cuadros de la parte superior del elemento 3 y deja un cuadro sin marcar).

I: ¿Y este uno?

A: Es este cuadrito (señala un cuadrito que está siempre en cada elemento de la secuencia)

I: Y este 1, ¿está en todos?

A: Sí, a todos se les suma más uno.

I: Entonces en todos siempre está la posición, y luego qué es esto, ¿qué me dijiste? (Preguntando por $n+1$)

A: Igual es el número de la posición pero le aumentamos un cuadrito.

I: En la figura, ¿eso dónde pasa?

A: Arriba (Señala las filas de cuadrados en la parte superior del elemento de la secuencia).

El estudiante escribió $C_n = n + n + 1$, el primer término n representa el número que se asigna "a la posición" del término, y el término $n + 1$ se refiere a "el número de la posición más uno". De esta forma vemos cómo es que los estudiantes pueden conectar lo que ven, lo que escriben y dicen con los símbolos algebraicos.

Discusión y perspectivas

A partir de los datos anteriores podemos afirmar que durante la resolución de los problemas los estudiantes fueron capaces de analizar el crecimiento del patrón de diversas maneras. Algunos análisis les permitieron llegar a una expresión algebraica que modelara el crecimiento de la secuencia y otros no, como fue en el caso del análisis presentado de la Figura 1.2.

En los casos analizados, los estudiantes lograron organizar de manera adecuada los elementos de las figuras que aparecen en la actividad; por lo tanto este tipo de tareas, parece potenciar la posibilidad de dotar de significado, por parte de los estudiantes, a las expresiones algebraicas resultantes, lo cual podemos notar en los extractos de diálogos presentados anteriormente.

Con el análisis presentado, damos evidencia de que es posible que los estudiantes doten de significado y sentido a las expresiones algebraicas que surgen del análisis de secuencias visuales, pero que estas expresiones muchas veces no son relacionadas, es decir, no se discute su equivalencia.

Y este es el problema que deseamos abordar, planteándonos las siguientes preguntas ¿cómo el análisis visual influye en la construcción de significado de la equivalencia de distintas expresiones algebraicas que surgen durante la resolución de secuencias numéricas visuales?, y ¿cómo la equivalencia sintáctica puede ser analizada por los estudiantes a partir del análisis visual que surge durante la resolución de secuencias numéricas visuales?

Referencias

- Asghari, A. (2009). Experiencing equivalence but organizing order. *Educational Studies in Mathematics* 71, 219-234.
- Brenner, M. E., Mayer', R. E., Mosely, B., Brar, T., Duran, R., Reed, B. S., & Webb, D. (1997). Learning by understanding: The role of multiple representations in learning algebra. *American Educational Research Journal*, 34(4), 663-689.
- Carraher, D., Martines, M. & Schliemann, A. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik-The International Journal on Mathematics Education*, 40(1), 3-22.
- Duval, R. (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning. En F. Hitt & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st Annual Meeting of the North America Chapter of the International Group of PME* (pp. 3-26). Cuernavaca, Morelos, Mexico: PMENA.
- Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics* 12, 317-326.
- Kieran, C. (2006). Research on the learnign and the teaching of algebra. A Broadening of sources of meaning. A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 11-49). Rotterdam: Sense Publishers.
- Kieran, C., Boileau, A., Tanguay, D. & Drijvers, P. (2013). Desing researches' documentalional génesis in a study on equivalence of algebraic expressions. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik-The International Journal on Mathematics Education*, 45,1045-1056.
- Pilet, J. (2013). Implicit learning in the teaching of algebra: desingning a task address the equivalence of expressions. En B. Ubuz, C. Haser, & M. Mariotti, (Eds.) *Proccedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 510-519. Polonia: University of Rzeszów. Turquia: Middle East Technical University.
- Radford, L. (2000). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: a semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics* 42, 237-268.
- Radford, L. (2006a). Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz, & A. Méndez (Eds.) *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (2-21). Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional.

- Radford, L. (2006b). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática educativa*, 9(Número especial), 103-129.
- Rojas, P. (2015). Objetos matemáticos, representaciones semióticas y sentidos. *Enseñanza de las ciencias* 33(1), 151-165.
- Solares, A. & Kieran, C. (2013). Articulating syntactic and numeric perspectives on equivalence: the case of rational expressions. *Educational Studies in Mathematics* 42, 115-148.
- Zwetschler, L. & Prediger, S. (2013). Conceptual challenges for understanding the equivalence of expressions-a case of study. En B. Ubuz, C. Haser, & M. Mariotti, (Eds.) *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 558-567. Polonia: University of Rzeszów. Turquía: Middle East Technical University.