EL DESARROLLO DEL RAZONAMIENTO PROBABILÍSTICO DE ESTUDIANTES DE BACHILLERATO SOBRE LA NOCIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

García García Jaime Israel[1], Sánchez Sánchez Ernesto Alonso [2]

[1]*jaime_garcia1980@hotmail.com, DME, Cinvestav, México.*

[2]*esanchez0155@gmail.com, DME, Cinvestav, México.*

El tratamiento de la distribución binomial en la enseñanza a nivel bachillerato suele estar motivado por el interés en el aprendizaje del cálculo y procedimientos formales. En este estudio se propone un acercamiento para desarrollarla con un enfoque más dirigido hacia el desarrollar el razonamiento con base en las nociones de variabilidad y distribución y no en los aspectos técnicos mencionados. Bajo el anterior plan, se exploraron los razonamientos expresados en las respuestas de 37 estudiantes de bachillerato a preguntas referidas a una situación-problema relacionada con la distribución binomial simple ($n = 2$, $p = ½$) y que se aplicó antes y después de unas actividades realizadas con el software Fathom. Globalmente, y con ayuda de la metodología SOLO, se muestra un avance del razonamiento probabilístico de los estudiante el cual probablemente fue producido por las actividades de simulación física y computacional que se llevaron a cabo.

Palabras claves: Razonamiento Probabilístico, Distribución Binomial, Variabilidad, Valor Esperado, Taxonomía SOLO.

Introducción

Asumimos que el desarrollo del razonamiento probabilístico de los estudiantes es uno de los objetivos importantes de la educación matemática de los niveles básicos y pre-universitarios, como refieren Jones, Langrall y Mooney (2007). Esto ha motivado la realización de una gran cantidad de investigaciones sobre razonamiento probabilístico que se centran en alguno de los conceptos que se incluyen en el currículo de probabilidad: aleatoriedad, espacio muestral, enfoque clásico y enfoque frecuencial de probabilidad, combinatoria, entre otros. No obstante, se han hecho pocas exploraciones sobre problemas que intenten desarrollar el razonamiento probabilístico tomando como punto de partida el concepto de distribución, como señalan García y Sánchez (2013), el cual consideran es parte fundamental de la estadística y la probabilidad.

Este trabajo plantea investigar ¿Cómo se desarrolla el razonamiento acerca de la distribución binomial desde sus formas más simples a las más complejas cuando se hacen simulaciones físicas y computacionales? Este cuestionamiento subyace de una de las once líneas de acción para el desarrollo de la noción de distribución planteadas por Pfannkuch y Reading (2006), a saber ¿Cómo se desarrolla el razonamiento acerca de distribuciones desde sus formas o aspectos más simples a unos más complejos? Con este trabajo se busca aproximarse y dar respuesta parcial a dicha pregunta.

Como hipótesis de trabajo tenemos que el desarrollo del razonamiento probabilístico en una situación binomial está influenciado por el tipo de nociones previas que poseen los estudiantes de bachillerato. Así que en este estudio se observa dicho desarrollo bajo el contexto de una serie de actividades, en las que se realizan simulaciones con el apoyo de objetos físicos (monedas) y un software educativo de estadística (Fathom). Se propone una situación-problema que involucra la distribución binomial.

Antecedentes

En la siguiente sección se han elegido algunos estudios representativos de tres temas, cuyos conceptos subyacen en su forma más elemental en la actividad que realizaron los estudiantes, tales temas son aleatoriedad, variabilidad y distribución; después, se mencionan estudios sobre distribución binomial.

Aleatoriedad. Batanero, Green y Serrano (1998); estos afirman que la *aleatoriedad* es fundamental en el estudio de la probabilidad, ya que se requiere desarrollar una comprensión profunda de él para progresar en el campo del cálculo de probabilidades. Gal (2005) identificó dos perspectivas: (a) la aleatoriedad como una propiedad de un resultado, en el sentido de que una serie de resultados parece desordenada, y (b) la aleatoriedad como un proceso por el cual una cadena de resultados se producen y no puede ser predicho de acuerdo a una causa determinista básica. La *aleatoriedad* se convierte en *variabilidad* cuando se refleja la impredecibilidad de las experiencias mediante la ubicación de las frecuencias cerca de, pero no iguales a, las esperadas.

Variabilidad. La *variabilidad* es otro concepto relacionado con la distribución binomial. En el modelo de pensamiento presentado por Wild & Pfannkuch (1999) se destaca el papel central que la variabilidad tiene en el pensamiento estadístico. En el caso de la probabilidad, Gal (2005) considera a la variabilidad como una de las grandes ideas de la probabilidad. En este contexto, conviene poner atención en la variabilidad de las frecuencias absolutas; ésta se relaciona con las desviaciones de las frecuencias que realmente ocurren con respecto a las frecuencias esperadas.

Distribución. Wild (2006) afirma que la *distribución* es el segundo concepto fundamental, después de la noción de la *variabilidad*, para desarrollar un razonamiento estadístico, mencionando que la noción de distribución subyace en prácticamente todos los aspectos estadísticos de razonamiento acerca de la variabilidad. Jones et al. (2007) señalan que el concepto de *distribución* se suele introducir en el currículo de probabilidad del nivel bachillerato; en particular, el concepto de *distribución binomial*. No obstante son escasos los trabajos de investigación didáctica que se refieren a la *distribución binomial*. Entre ellos, podemos mencionar el de Flores, García y Sánchez (2014) que se ubica en el nivel básico; los de Bill, Watson y Gayton (2009) y García, Medina y Sánchez (2014) en el bachillerato; y el de Maxara y Biehler (2010) en el universitario.

Marco Conceptual

Este trabajo ha optado por establecer un marco conceptual considerando las posturas de Jabareen (2009) y Miles y Huberman (1994), quienes declaran que este explica, ya sea en forma gráfica o a través de una narración, las principales cosas que van a ser estudiadas y las supuestas relaciones entre ellas; restringiéndose sólo a los principales conceptos que permiten entender el estudio.

En el presente trabajo se ha elegido los conceptos principales que subyacen en el estudio, estos son: *Distribución binomial*, como el contenido probabilístico cuyo aprendizaje se explora; *Razonamiento probabilístico*, como la forma en que los estudiantes unen y transforman sus ideas previas sobre probabilidad para construir el concepto de distribución binomial y; finalmente, la *Taxonomía SOLO*, como un método que nos permite analizar los razonamientos de los estudiantes mediante la jerarquización de las respuestas que dan a las tareas y problemas.

La *distribución binomial* es una de las distribuciones discretas más importantes en probabilidad debido a sus múltiples aplicaciones y a su relación con la distribución normal. Esta distribución es el modelo de probabilidad de un gran número de experiencias aleatorias, en particular, la de lanzar dos monedas (o equivalentemente dos veces una moneda) y observar el 'número de águilas' que ocurren; este caso es el más simple de una distribución binomial, cuyos parámetros n y p son 2 y ½, respectivamente. La distribución binomial B(x, 2, ½) se representa fácilmente mediante una tabla, como se muestra en la Figura 1.

Figura 1. Representación tabular de la distribución B(x, 2, ½)

x	0	1	2
p	¼	½	¼

Es importante resaltar que la tarea de este informe no enfoca el manejo adecuado del algoritmo de la distribución binomial; el espíritu del estudio es el descubrimiento de relaciones de tipo estructural que subyacen a una situación binomial por parte de los estudiantes.

Con la idea de explorar en qué medida los estudiantes tienen un sentido de la *variabilidad* presente en los experimentos, en contraste con una idea determinista (inadecuada) de esperar las frecuencias esperadas, en este estudio se ha introducido la técnica de hacer preguntas comenzando con la expresión ¿Qué esperas que ocurra si…?, propuesta por Watson, Kelly, Callingham y Shaughnessy (2003). Un problema de este estudio es realizar 1000 sorteos de la distribución binomial y pensar en la frecuencia con la que ocurren cada uno de los resultados: 0, 1 y 2 (águilas). Si se denota con F_i la frecuencia absoluta del evento "que la variable tome el valor i" y con $P(i)$ su probabilidad; sabemos por la Ley de los Grandes Números que:

$$\frac{F_i}{1000} \cong P(i), con \ \ i = 0, 1, 2$$

De donde: $F_i \cong 1000P(i)$. Así:

$$F_0 \cong 1000\left(\frac{1}{4}\right) = 250; F_1 \cong 1000\left(\frac{1}{2}\right) = 500; \ F_2 \cong 1000\left(\frac{1}{4}\right) = 250.$$

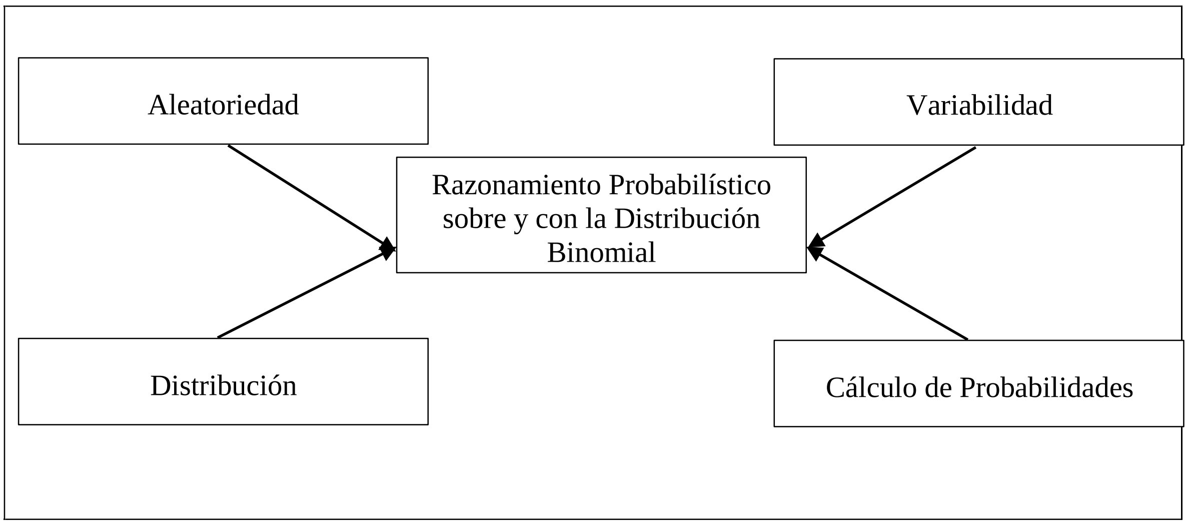
Llamaremos a $1000P(i)$ la *frecuencia esperada* de i; es decir, 250 es la frecuencia esperada de 0, 500 la frecuencia esperada de 1 y 250 la frecuencia esperada de 2. Así, las *frecuencias esperadas* son números de referencia alrededor de los cuales estarán las frecuencias reales obtenidas de la realización efectiva de los 1000 sorteos.

Se establece el término de *variabilidad* para indicar la manifestación de cambio de una entidad o fenómeno que se observa, es decir, lo que está variando. La estadística se preocupa por diferenciar los diferentes tipos de variabilidad que conforman el cambio que manifiesta un fenómeno; de manera general, se puede distinguir la variabilidad que obedece leyes definidas o funcionales, es decir, que obedece a una estructura; y la variabilidad caótica, desordenada e impredecible, es decir, aleatoria (García y Sánchez, 2007). Wild y Pfannkuch (1999) destacan el papel central de la variabilidad en el pensamiento estadístico, es la razón de ser de la estadística.

Se entiende por *razonamiento* al proceso a través del cual se formulan juicios o se hacen afirmaciones a partir de otras proposiciones ya conocidas, o de observaciones sobre un fenómeno. Asumimos que las personas se forma conceptos como consecuencia de su participación en actividades sociales de dar y pedir razones, es decir, gracias al razonamiento se configuran y consolidan sus conceptos (Bakker y Derry, 2011). Por tanto, es conveniente proponer tareas o situaciones-problema que propicien el razonamiento matemático de los estudiantes; por ejemplo, en el campo de la probabilidad, tareas en situaciones de incertidumbre que logren captar el interés de los estudiantes, que lo enfrenten a algunas 'grandes ideas' de la probabilidad (Gal, 2005) y que le exijan realizar *razonamientos probabilísticos*; tales tareas deben involucrar a los estudiantes en procesos de estimación de la propensión de ocurrencia de eventos, y de su predicción y representación, y no restringirse sólo a problemas de cálculo (García, Medina y Sánchez, 2014).

Consideramos que el desarrollo del *razonamiento probabilístico* implica la comprensión de conceptos como partes de un sistema y no como elementos aislados; por consiguiente, aprender a razonar sobre la distribución binomial implica la comprensión de las nociones fundamentales que constituyen el sistema en el que se ubica, es decir, la comprensión de los conceptos interconectados entre sí en los que se encuentre la distribución binomial. En la Figura 2 se presentan algunos de los constructos que contribuyen en el razonamiento sobre y con la distribución binomial.

Figura 2. Conceptos interconectados entre sí para el desarrollo del razonamiento sobre la distribución binomial



Una manera de describir el razonamiento acerca de la distribución binomial, desde sus formas o aspectos más simples a otras algo más complejas, es analizando y organizando en una jerarquía las respuestas de los estudiantes a cierta tarea. Por ejemplo, Jones, Langrall, Thornton y Mogill (1997) generaron y validaron una jerarquía cuyo objetivo es caracterizar el razonamiento probabilístico de los estudiantes de primaria, basada en el modelo de Biggs y Collis.

La *taxonomía SOLO* (Structure of the Observed Learning Octcome) desarrollada por Biggs y Collis (1991), es un instrumento diseñado para evaluar la calidad de aprendizaje de los estudiantes en una amplia variedad de situaciones escolares, en la mayoría de áreas temáticas, que permite identificar elementos de conocimiento que los estudiantes utilizan como recursos para estructurar sus razonamientos; y ha sido también la base para construir jerarquías de razonamiento en probabilidad y estadística. Esta taxonimía postula niveles jerárquicos *(preestructural, uniestructural, multiestructural y relacional)* en función de las relaciones de los elementos de conocimiento que se ponen en juego y de la precisión de su ejecución.

Metodología

Se utilizó como método de investigación un estudio de tipo cualitativo. Éste se centra en analizar las respuestas de los estudiantes a una tarea referida a una situación-problema inscrita en el tema de distribución binomial; y se lleva a cabo utilizando la taxonomía SOLO, la cual sugiere una técnica para hacerlo, consistente en observar la calidad de las respuestas definidas de acuerdo a su complejidad estructural.

Participantes

En esta investigación participaron 37 estudiantes (15 – 16 años) de primer grado de bachillerato del CCH Plantel Vallejo, de la UNAM, y el profesor titular de los grupos quien aplicó la situación-problema. Los estudiantes no habían recibido ningún tipo de enseñanza formal en probabilidad y estadística de nivel bachillerato; además, no recibieron información alguna respecto al propósito del estudio.

Instrumentos

Se elaboró un cuestionario diagnóstico; dos actividades guiadas, una para trabajar con el uso de objetos manipulables (monedas), a lo que llamamos simulación física, y otra para trabajar con software (Fathom), a lo que referimos como simulación computacional; y un cuestionario posterior. Cada uno de los instrumentos se elaboró con base en una situación-problema llamada "¡A la Suerte!" que se expone en el Cuadro 1.

Por las limitaciones de espacio, en este informe sólo se expondrá y comentará la parte de cada actividad concerniente a la tarea de predecir el comportamiento de 1000 sorteos referentes al 'número de águilas' obtenidas en el lanzamiento de dos monedas; la cual se presenta en el Cuadro 1.

Cuadro 1. Situación-problema y tarea de estudio

Situación-problema	Tarea de estudio
¡A LA SUERTE! La familia Pérez, está compuesta por el señor Carlos, su esposa Ana y su hijo Beto. Todas las noches, por lo general, después de cenar se reúne la familia a ver la televisión, pero nunca están de acuerdo para ver un mismo programa. Al señor Carlos le gusta ver programas deportivos, a la señora Ana las películas y a Beto las caricaturas.  Como sólo hay un televisor en la casa, lo más sencillo sería que se turnaran el control de la televisión diariamente, pero Beto les propone a sus padres algo más divertido: "¡A la suerte!". Propone rifar el control jugando a los volados con dos monedas de la siguiente manera: Si no sale **ninguna águila** en los dos volados, gana la Sra. Ana; si sale exactamente **una águila**, gana el niño Beto; y si salen **dos águilas**, gana el Sr. Carlos. A los padres les parece justo y aceptan su propuesta. Después de muchos días (un año, por ejemplo), ¿todos los integrantes de la familia Pérez tendrán el control de la televisión con la misma frecuencia? Explica ampliamente tu respuesta.	Cuestionario Diagnóstico 9. ¿Cómo piensas que serían los resultados para 1000 días? Dibuja las barras de los posibles resultados en cada inciso, teniendo en cuenta la escala dada. Escribe el número de veces o el porcentaje, según sea el caso, sobre cada barra.  Actividad Simulación Física 12. ¿Cuál sería tu predicción? Número de veces que gana Ana (0 águilas) = ________________ Número de veces que gana Beto (1 águila) = ________________ Número de veces que gana Carlos (2 águilas) = ______________ Actividad Simulación Computacional 3. ¿Cuál sería tu predicción para estos 1000 lanzamientos? Número de veces que gana Ana (0 águilas) = ________________ Número de veces que gana Beto (1 águila) = ________________ Número de veces que gana Carlos (2 águilas) = ______________ Cuestionario Posterior 3. ¿Cuál sería tu nueva predicción para 1000 lanzamientos? Número de veces que gana Ana (0 águilas) = ________________ Número de veces que gana Beto (1 águila) = ________________ Número de veces que gana Carlos (2 águilas) = ______________

Procedimientos de aplicación de instrumentos

Los anteriores instrumentos se aplicaron en cuatro etapas:

Primera etapa, los estudiantes contestaron el cuestionario diagnóstico, cuya finalidad era conocer su nivel de razonamiento intuitivo frente a la situación-problema "A la Suerte", donde subyace la distribución binomial;

Segunda etapa, los estudiantes desarrollaron una actividad guiada que consistía en utilizar objetos físicos para contestar preguntas referentes a la situación-problema, mediante la simulación física;

Tercera etapa, los estudiantes desarrollaron otra actividad guiada que consistía en utilizar el software para resolver cuestionamientos referentes a la situación-problema, mediante simulación computacional; y cuarta etapa, los estudiantes contestaron un cuestionario posterior, cuyo propósito era contrastar las respuestas del cuestionario diagnostico con las obtenidas en las actividades de simulación, se esperaba crear un conflicto cognitivo que hiciera reflexionar al estudiante sobre su comprensión de las nociones involucradas. Todo lo anterior se hizo en 4 sesiones de 2 horas cada una.

Análisis de datos

Las respuestas obtenidas se organizan de acuerdo a su complejidad estructural, bajo el supuesto de que entre mayor es ésta, mejor la calidad de la respuesta. Para hacerlo se ha tenido como guía la taxonomía SOLO (Biggs y Collis, 1991). Mediante un análisis comparativo de las respuestas de los estudiantes, se identifican los elementos o componentes que utilizan, es decir, los diferentes conceptos y/o procedimientos que emplean en su resolución. Con base en la identificación de tales componentes, se definen niveles crecientes de complejidad estructural intentando aplicar el esquema expuesto en el Marco Conceptual. El Cuadro 2 presenta los niveles jerárquicos de la taxonomía SOLO, y la descripción de cada uno de ellos, que se determinaron de acuerdo a las respuestas de los estudiantes a la tarea en cuestión.

Cuadro 2. Niveles jerárquicos para la tarea de predecir el comportamiento de sorteos de tipo binomial

Nivel	Descripción de tipo de características que presentan las respuestas para su clasificación
Preestructural	1) Proporciona frecuencias cuya suma no corresponde al número de sorteos. 2) Proporciona frecuencias iguales a los eventos de obtener ninguna águila y dos águilas, y menor frecuencia al evento más probable. 3) Proporciona frecuencias iguales a los eventos de obtener una y dos águilas, y diferente frecuencia al evento de obtener ningún águila. 4) Proporciona frecuencias iguales a los eventos de obtener ninguna y una águila, y diferente frecuencia al evento de obtener dos águilas.

Uniestructural	1) Proporciona frecuencias que corresponden al valor esperado para cada miembro de la familia, sin mostrar sensibilidad a la variabilidad del experimento. 2) Proporciona mayor frecuencia al evento de obtener un águila, e iguales frecuencias a los eventos de obtener ninguna águila y dos águilas, destacando únicamente la forma de la distribución. 3) Manifiesta una adecuada percepción de la variabilidad al proporcionar frecuencias distintas a los valores esperados; es decir, frecuencias que se presentan de manera desordenada. No reflejan la distribución teórica.
Multiestructural	Se observa la consideración tanto de la distribución (favorece al evento más probable) como de la variabilidad (al proporcionar frecuencias distintas a los valores esperados), sin relacionarlas de manera adecuada al proporcionar frecuencias algo improbables que sucedan.
Relacional	Se presenta una relación adecuada entre la distribución y la variabilidad, proporcionando valores probables que sucedan, es decir, con una desviación de ±50.

Nota: Mediante una simulación estadística en Fathom, se generan 1000 valores de la variable aleatoria y se cuenta la frecuencia de cada resultado (0, 1, 2) observando sus diferencia con las frecuencias esperadas. Este proceso se repite un gran número de veces (digamos 1000 otra vez) y se observa la distribución de las diferencias. Se toma un valor en el que el 95% de las veces el intervalo, con centro la frecuencia esperada y radio el valor tomado, contenga a las frecuencias reales; por lo que consideramos adecuada una desviación de ±50.

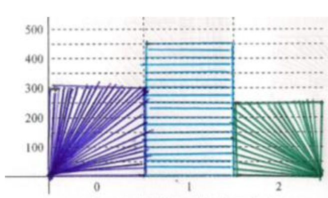
Resultados

Los resultados que se presentan a continuación estarán en dos dimensiones, en la primera se muestran a manera de ejemplificación el tipo de respuestas dadas por algunos de los estudiantes y su clasificación en la taxonomía SOLO, mientras en la segunda se presenta la frecuencia de respuesta de los estudiantes clasificadas por nivel de razonamiento en las etapas del estudio y un análisis de lo sucedido.

En el Cuadro 3 se presenta una ejemplificación del tipo de respuestas dadas por los estudiantes de acuerdo al nivel de razonamiento, seguida de una breve justificación sobre esta clasificación.

Cuadro 3: Ejemplificación de acuerdo a nivel de razonamiento

Nivel de Razonamiento Respuesta del Estudiante	Descripción
Preestructural: Número de veces que gana Ana (0 águilas) = 230 Número de veces que gana Beto (1 águila) = 500 Número de veces que gana Carlos (2 águilas) = 370	Proporciona frecuencias cuya suma no corresponde al número de sorteos.
Preestructural: Número de veces que gana Ana (0 águilas) = 400 Número de veces que gana Beto (1 águila) = 200 Número de veces que gana Carlos (2 águilas) = 400	Proporciona frecuencias iguales a los eventos de obtener ninguna águila y dos águilas, y menor frecuencia al evento más probable.

Preestructural: 	Proporciona frecuencias iguales a los eventos de obtener una y dos águilas, y diferente frecuencia al evento de obtener ningún águila.
Preestructural: Número de veces que gana Ana (0 águilas) = 20 Número de veces que gana Beto (1 águila) = 20 Número de veces que gana Carlos (2 águilas) = 60	Proporciona frecuencias iguales a los eventos de obtener ninguna y una águila, y diferente frecuencia al evento de obtener dos águilas.
Uniestructural: Número de veces que gana Ana (0 águilas) = 250 Número de veces que gana Beto (1 águila) = 500 Número de veces que gana Carlos (2 águilas) = 250	Proporciona frecuencias que corresponden al valor esperado para cada miembro de la familia, sin mostrar sensibilidad a la variabilidad del experimento.
Uniestructural: Número de veces que gana Ana (0 águilas) = 200 Número de veces que gana Beto (1 águila) = 600 Número de veces que gana Carlos (2 águilas) = 200	Proporciona mayor frecuencia al evento de obtener un águila, e iguales frecuencias a los eventos de obtener ninguna águila y dos águilas, destacando únicamente la forma de la distribución.
Uniestructural: Número de veces que gana Ana (0 águilas) = 500 Número de veces que gana Beto (1 águila) = 400 Número de veces que gana Carlos (2 águilas) = 100	Manifiesta una adecuada percepción de la variabilidad al proporcionar frecuencias distintas a los valores esperados; es decir, frecuencias que se presentan de manera desordenada. No reflejan la distribución teórica.
Multiestructural: Número de veces que gana Ana (0 águilas) = 300 Número de veces que gana Beto (1 águila) = 600 Número de veces que gana Carlos (2 águilas) = 100	Se observa la consideración tanto de la distribución (favorece al evento más probable) como de la variabilidad (al proporcionar frecuencias distintas a los valores esperados), pero el estudiante no logra relacionarlas de manera adecuada al proporcionar frecuencias algo improbables que sucedan.
Relacional: 	Se presenta una relación adecuada entre la distribución y la variabilidad, proporcionando valores probables que sucedan, es decir, con una desviación de ±50.

En el Cuadro 4 se muestran las frecuencias de respuesta por nivel de razonamiento a la tarea en cada una de las etapas, y se presentan los índices de respuestas. Éstos se calculan asignando los valores 0, 1, 2 y 3 respectivamente a cada nivel estructural (Preestructural: 0, Uniestructural: 1, etc.) y calculando la media ponderada de las frecuencias; en consecuencia, estos índice son números entre 0 y 3.

Cuadro 3: Frecuencias de las respuestas de los estudiantes de acuerdo a los niveles de razonamiento y por etapa de estudio

Etapa de Estudio	Nivel de Razonamiento				Total	Índice de respuesta (μ)
	Preestructural	Uniestructural	Multiestructural	Relacional		
Cuestionario Diagnóstico	18	13	3	2	36*	0.69
Simulación Física	7	12	11	7	37	1.48
Simulación Computacional	4	12	8	13	37	1.81
Cuestionario Posterior	6	14	7	9	36*	1.52

* Un estudiante no responde la tarea.

Aunque es natural esperar que después de realizar actividades de aprendizaje haya un mejoramiento general en el desempeño del cuestionario posterior respecto al diagnóstico. Se puede observar en el cuadro 3 que el índice de respuesta para la actividad de simulación computacional es 1.81, siendo este el más alto con relación al de la física. Por tanto, conviene señalar que se puede atribuir la mayor influencia del avance a la realización de la actividad de simulación computacional. Analizando las respuestas de los estudiantes en cada una de las etapas, se observó que:

a) en el cuestionario diagnóstico, la mayoría de las respuestas se concentra en el nivel preestructural (15 de 18 estudiantes proporcionan valores cuya suma no corresponde al número de sorteos) y en el uniestructural (7 de 13 estudiantes sólo se enfocan en la forma de la distribución que subyace de los datos);

b) después de la simulación física, las respuestas se acumulan más en el nivel uniestructural (6 de 12 estudiantes proporcionan frecuencias que asemejan la forma de la distribución) y en el multiestructural (11 estudiantes proporcionan frecuencias en donde se observa la consideración de la distribución y la variabilidad, pero sin relacionarlas de manera adecuada);

c) después de la simulación computacional, la mayoría de las respuestas se clasificaron en el nivel uniestructural (8 de 12 estudiantes proporcionan las frecuencias correspondientes a los valores esperados) y en el relacional (13 estudiantes proporcionan frecuencias donde se observa la consideración de la distribución y la variabilidad de manera adecuada);

d) y finalmente, en el cuestionario posterior, las respuestas se concentran en el nivel uniestructural (8 de 14 estudiantes proporcionan las frecuencias correspondientes a los valores esperados) y en el relacional (9 estudiantes proporcionan valores probables que sucedan con una desviación de ±50).

Discusión y Conclusiones

En las actividades que realizaron los estudiantes no se les enseño el concepto de distribución binomial ni se les decía como responder a las preguntas, sino sólo se les daban indicaciones de cómo llevar a cabo acciones con los objetos manipulables (monedas) y con el software (Fathom) y, con lo observado, se les pedía que respondieran las preguntas que estaban formuladas en sus hojas de trabajo.

Las frecuencias de respuestas de la tarea muestran una mejoría del cuestionario posterior al diagnóstico. Al responder la pregunta en el posterior, la mayoría de los estudiantes propuso distribuciones que cumplen con la forma de la distribución o con los valores esperados. Además, las 9 respuestas que se ubicaron en el nivel relacional presentan una relación adecuada entre la distribución y la variabilidad, proporcionando valores probables que sucedan, con una desviación de ±50; y las 7 respuestas que se clasificaron en el nivel multiestructural consideran tanto de la distribución, favorece al evento más probable, como de la variabilidad, al proporcionar frecuencias distintas a los valores esperados, pero no logran relacionarlas de manera adecuada al proporcionar frecuencias algo improbables que sucedan.

Estos razonamientos probabilísticos informales de los estudiantes, se basan en ideas que ellos generaron durante sus actividades de simulación y no provienen de la aplicación de alguna definición, pues esta no se introdujo ni se explicó durante la intervención. Es de esperar que la distribución propuesta en el cuestionario posterior sea subyacente en las simulaciones, que representa, de manera aproximada, los patrones que se presentan en la práctica. No es posible afirmar esto con certeza, pero el sólo hecho de proponer una distribución con las características señaladas ya es indicio de que se comienza a entender esta noción asociada a las acciones realizadas y no como una receta dada por una definición.

En general, en las etapas de simulación y cuestionario posterior, la mayoría de los estudiantes perciben la característica de la binomial de tener mayor frecuencia de ocurrencia en el valor central que en sus valores extremos y poco más de la mitad expresa en sus gráficas la variabilidad del fenómeno. Enfatizamos este aspecto porque consideramos que una comprensión adecuada de la noción de distribución binomial nunca debe separarse de la idea de que expresa un fenómeno de incertidumbre, en cuyas manifestaciones (repeticiones de sorteos de acuerdo a la distribución) se debe reflejar la variabilidad.

En conclusión, el uso de la simulación computacional crea la posibilidad de que los estudiantes entiendan de manera más profunda el sentido de la variabilidad y de la forma de la distribución, en relación con la noción de la binomial. Con base en los resultados de las conclusiones preliminares de este estudio, se ha elaborado una trayectoria hipotética de aprendizaje que permitirá explorar, entender y caracterizar mejor el razonamiento probabilístico de estudiantes de bachillerato en el trabajo doctoral.

Referencias

Bakker, A. y Derry, J. (2011). Lessons from inferentialism for statistics education. *Mathematical thinking and learning*, 13(1-2), 15-26.

Batanero, C., Green, D. R., Serrano, L. (1998). Randomness, its meaning and educational implications. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* 29(1), 113-123.

Biggs, J. & Collis, K. (1991). Multimodal learning and the quality of intelligence behavior. En H.A. Rowe (Ed.), *Intelligence: Reconceptualization and measurement*, pp. 57-76. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Bill, A., Watson, J. & Gayton, P. (2009). Guessing answers to pass a 5-item true false test: solving a binomial problem in three different ways. *Proceedings of the 32nd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, 1*(pp. 57-64). Tasmania: MERGA.

Flores, B., García, J. y Sánchez, E. (2014). Avances en la calidad de las respuestas a preguntas de probabilidad después de una actividad de aprendizaje con tecnología. *Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (SEIEM). Salamanca, España.

Gal, I. (2005). Towards "probability literacy" for all citizens: Building blocks and instructional dilemmas. En G.A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school. Challenges for teaching and learning (39-63).* New York: Springer.

García, J. y Sánchez, E. (2007). El desarrollo de nociones de variabilidad estadística en profesores de secundaria con apoyo de actividades de simulación. En B. R. Alcides Astorga Morales (Ed.), *5to Congreso sobre Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora* (pp. 81 – 82). Cartago, Costa Rica.: ITCR.

García, J. y Sánchez, E. (2013). Niveles de razonamiento probabilístico de estudiantes de bachillerato frente a una situación básica de variable aleatoria y distribución. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Primeras Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* (pp. 417-424). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

García, J., Medina, M., y Sánchez, E. (2014). Niveles de razonamiento de estudiantes de secundaria y bachillerato en una situación-problema de probabilidad. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 6*, 5- 23.

Jabareen, Y. (2009). Building a conceptual framework: Philosophy, definitions, and procedure. *International Journal of Qualitative Methods 8*(4), 49-62.

Jones, G., Langrall, C. & Mooney, E. (2007). Research in probability: Responding to classroom realities. En F. K. Lester, Jr. (Ed.), *The Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (909–955). Charlotte, NC, USA: Information Age-NCTM.

Jones, G., Langrall, C., Thornton, C. y Mogill, A. (1997). Framework for assessing and nurturing young children's thinking in probability. *Educational Studies in Mathematics, 32,* 101-125.

Maxara, C. & Biehler, R. (2010). Students' understanding and reasoning about sample size and the law of large numbers after a computer-intensive introductory course on stochastics. En C. Reading (Ed.), *Proceedings of the Eighth International Conference on Teaching Statistics* Ljubljana, Slovenia: Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.

Miles, M. & Huberman, A. (1994). *Qualitative Data Analysis. An expanded sourcebook.* London, UK: Sage Publications.

Pfannkuch, M., & Reading, Ch. (2006). Reasoning about distributions: a complex process. *Statistics Education Research Journal, 5*(2), pp. 4-9.

Watson, J. M., Kelly, B. A., Callingham, R. A., y Shaughnessy, J. M. (2003). The measurement of school students' understanding of statistical variation. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 34*(1), 1-29.

Wild, C. & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review, 67*(3), 223-262.

Wild, C. (2006). The concept of distribution. *Statistics Education Research Journal*, *5*(2), 10-26.