

# LOS PROCESOS DE VALIDACIÓN EN GEOMETRÍA EN SITUACIONES DE CONFLICTO

Victor Manuel Guerrero Rojas y Claudia Margarita Acuña Soto

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional

[vicwarrio@hotmail.com](mailto:vicwarrio@hotmail.com) y [claudiamargarita\\_as@hotmail.com](mailto:claudiamargarita_as@hotmail.com)

*Este escrito presenta el anteproyecto que se propuso para ingresar al programa de doctorado de Matemática Educativa. El contenido del mismo está relacionado con los procesos de validación en Geometría Euclidiana en situaciones de conflicto. El objetivo de la investigación es diseñar situaciones geométricas que provoquen en los alumnos posibles conflictos cognitivos mediante la confrontación de consideraciones empíricas y visuales contra consideraciones lógicas deductivas; se busca además analizar el cambio o no de la racionalidad de los estudiantes cuando enfrentan dichas situaciones. Consideramos que el conflicto cognitivo permite lograr un desarrollo de la racionalidad del estudiante que se refleja en sus acciones, los argumentos y las decisiones que tienen que ver con los procesos de prueba.*

Palabras claves: Geometría, procesos de validación, conflicto cognitivo, razonamiento deductivo.

## Introducción

La demostración es vista como un componente clave en la actividad matemática, sin embargo, resulta un proceso complejo en su enseñanza y aprendizaje. La investigación en este terreno indica que los estudiantes de distintos niveles tienen dificultades y muestran ideas contrarias a las establecidas por la matemática (Harel y Sowder, 2007; Balacheff, 2000).

La enseñanza de la Geometría trata de incorporar a la demostración y al razonamiento como una de las actividades que deben ser desarrolladas por los estudiantes para obtener una formación que incorpore los aspectos metodológicos y estructurales de la matemática.

Para que esto suceda, consideramos que es necesario proponer actividades que permitan el desarrollo de la racionalidad de los estudiantes cuando enfrenten situaciones problemáticas en matemáticas. De esta manera, adoptamos al conflicto cognitivo como un factor fundamental en el desarrollo de la comprensión del razonamiento geométrico.

De tal forma, nuestro objetivo general de investigación es diseñar situaciones geométricas que presenten posibles conflictos cognitivos que confronten consideraciones empíricas y visuales contra consideraciones lógicas deductivas.

Además, analizar el cambio o no de la racionalidad de los estudiantes cuando enfrentan dichas situaciones.

## **Antecedentes**

La investigación en Matemática Educativa sobre los procesos de prueba en Geometría ha sido abordada desde distintas perspectivas y se han considerado diversos elementos que intervienen en el aprendizaje escolar. El caso que nos interesa, se refiere a la adquisición de concepciones adecuadas para enfrentar la tarea de validar en matemáticas. Los resultados de investigación muestran que las explicaciones de los estudiantes sobre la validación de proposiciones geométricas en general, son distintas a las aceptadas por la matemática.

Por principio de cuentas, una de las dificultades que enfrentan los estudiantes es que no creen en la necesidad de la demostración como una de las actividades del salón de clases (Alibert y Thomas, 1991; Balacheff, 2000). También Balacheff (2000) menciona dos obstáculos en la producción de las demostraciones geométricas: el primero es que la evidencia de los hechos se impone a la razón y el segundo se refiere a que la enseñanza de la matemática, despoja a los estudiantes de la responsabilidad de considerar la verdad de sus afirmaciones.

Otras investigaciones (Bell, 1976; Balacheff, 2000; Marrades y Gutierrez, 2000; Harel y Swoder, 2007) muestran que el tipo de justificaciones que realizan los estudiantes no corresponden necesariamente a las pruebas matemáticas. Además, los estudiantes no consideran suficiente la prueba deductiva para validar un enunciado matemático (Fischbein y Kedem, 1982; Vinner, 1983; Chazan, 1993).

Los alumnos tienden a utilizar espontáneamente argumentos no deductivos e información perceptual para validar sus afirmaciones, por lo que consideramos que ellos pueden reconsiderar sus supuestos si éstos los llevan a situaciones de evidente conflicto. Suponemos que este tipo de situaciones podrían establecer una diferencia en el desarrollo de la racionalidad del estudiante para reconsiderar la importancia de las definiciones, la coherencia y la necesidad de los procedimientos matemáticos.

Consideramos que se puede contribuir con la necesidad de lograr que los estudiantes tomen conciencia del rol de la demostración como una herramienta de explicación, convicción y validación. En otras palabras, los estudiantes darán importancia a la demostración cuando se convierta en un medio confiable y necesario en la construcción del conocimiento matemático.

## **Marco Conceptual**

En este trabajo estamos interesados en los procesos de validación de proposiciones matemáticas en el aula, los entendemos como aquellas manifestaciones del

razonamiento del individuo que tienen como fin asegurar la validez de una proposición dada.

En esta dirección nos apoyamos en Balacheff (2000) quien estudió los procesos de prueba de los estudiantes y estableció las diferencias que hay entre explicación, prueba, y demostración. La explicación es un discurso que establece y garantiza la validez de una proposición por parte de quien la emite. Prueba, es aquella explicación aceptada por una comunidad. Y una demostración matemática, es aquella prueba aceptada por la comunidad matemática, se trata de una serie de enunciados que se organizan siguiendo un conjunto bien definido de reglas. Lo anterior nos permite entender los diferentes usos que se le dan a los términos prueba y demostración en el aula.

El autor mantiene que el papel y carácter de la situación es determinante para el tipo de pruebas que se realizan, donde su evaluación y las decisiones que se toman están relacionadas con los conocimientos del sujeto, el lenguaje y la racionalidad que se pone en juego.

Consideramos que las situaciones de validación deben propiciar que los estudiantes tomen decisiones para la organización adecuada de los fundamentos de sus pruebas, lo que a la larga les permitiría asumir la responsabilidad de la validez de sus inferencias.

Por otra parte, comprender el proceso discursivo de los estudiantes que da cuenta de la forma en que organizan e infieren nueva información, resulta realmente complejo. Con el fin de analizar las producciones discursivas de los estudiantes en los procesos de prueba, creemos necesario considerar los diferentes tipos de discursos que se establecen en el aula: el propio de la matemática y aquel que se establece en el lenguaje común, lo que nos lleva a distinguir entre argumentación y demostración.

Una postura sobre las diferencias y relaciones de la argumentación basada en el lenguaje común y la demostración es la señalada por Duval (2007), quien sostiene que son dos formas de razonamiento que no funcionan de la misma manera, pese a que utilizan los mismos conectivos proposicionales y las formas lingüísticas son semejantes.

Para aclarar lo anterior, desde un punto de vista cognitivo, Duval (2007) hace las siguientes distinciones entre la argumentación y la demostración, estas son: la diferencia entre el valor epistémico y el valor lógico de una proposición, el estatus del contenido de las proposiciones y la organización de la demostración respecto a la de la argumentación.

Por otra parte, en este trabajo, consideramos que aunado a lo dicho por Duval, respecto a los discursos puestos en funcionamiento en el aula, es necesario tomar en cuenta los razonamientos abductivos e inductivos como estructuras que organizan el discurso de los estudiantes para inferir nueva información (Pedemonte, 2007). Lo

anterior, con el propósito de dar sentido a la demostración a partir de los indicadores del rigor matemático y contribuir a que los estudiantes comprendan los alcances, limitaciones y el papel de los diferentes tipos de razonamiento en la construcción del conocimiento matemático.

### Uso del conflicto cognitivo

Distintos estudios (ej. Hadas, Hershkowitz y Schwarz 2000; Prusak, Hershkowitz y Scharwz 2011; Stylianides y Stylianides 2008, 2009; Zaslavsky 2005) han abordado el uso del conflicto cognitivo como un mecanismo para promover un aprendizaje significativo sobre ella. Lo anterior, puede ser planteado a través de confrontar la comprensión, las creencias y las concepciones de los estudiantes con el fin de fomentar una necesidad de explicaciones deductivas que superen el conflicto planteado.

Se dice que el llamado conflicto cognitivo ocurre cuando los estudiantes se confrontan con datos u opiniones que contradicen sus argumentos iniciales (Prusak *et al*, 2011). Es por medio del contraejemplo y la contradicción que se intenta establecer un conflicto cognitivo entre los estudiantes. La contradicción puede conducirlos hacia la incertidumbre de los resultados que obtienen, llevándolos a una búsqueda de explicaciones, eventualmente deductivas, que superen la contradicción (Hadas, Hershkowitz y Schwarz 2000, 2002; Hadas y Hershkowitz 2002). Además, la incertidumbre puede hacer que los estudiantes tomen conciencia del papel de la demostración como una herramienta de convicción (Hadas y Hershkowitz, 1999).

Por otra parte, la investigación muestra que no es suficiente con tratar de establecer un conflicto para fomentar el desarrollo de la comprensión de los alumnos de manera estable, sino que es necesario establecer un medio adecuado para superarlo (Zazkis y Chernoff, 2008).

De esta manera, teniendo en cuenta la importancia del diseño de la tarea, la forma en que ésta se lleva a cabo frente al grupo en el salón de clases y el rol del profesor, el conflicto cognitivo puede ser usado como “catalizador” de las readecuaciones del estudiante de la forma en que construye su conocimiento.

### **Preguntas de investigación**

El interés que guía nuestro trabajo es dar cuenta sobre los procesos cognitivos involucrados en el cambio de racionalidad del estudiante cuando debe enfrentar situaciones problemáticas en matemáticas, particularmente, cuando confronten argumentos empíricos contra los deductivos.

Lo anterior, se pretende alcanzar a través del diseño y planteamiento de problemas donde se establezcan proposiciones localmente válidas cuyo propósito es develar el dominio en el que lo son, situación que por su naturaleza los coloca en situación de conflicto. Otro tipo de problemas que se consideran son tareas de

construcción de configuraciones geométricas de imposibilidad. Así mismo, como objetivo secundario, establecer una secuencia de acciones en la instrucción que permitan gestionar el uso de este tipo de situaciones de conflicto.

Se pretende realizar una investigación de orden cualitativa con estudiantes universitarios que recién comiencen un estudio formal de la Geometría a quienes pretendemos proponer actividades del tipo mencionado en talleres en los que combinaremos trabajo individual con trabajo colaborativo. A continuación presentamos nuestras preguntas de investigación:

¿Cómo enfrentan los estudiantes problemas que incluyen un conflicto cognitivo donde se pretende transitar de un razonamiento basado en supuestos empíricos hacia un razonamiento apoyado en afirmaciones teórico deductivas?

¿El conflicto cognitivo de los problemas planteados contribuye al tránsito de la argumentación al razonamiento deductivo? ¿De qué manera sucede este tránsito?

¿Es suficiente establecer conflictos cognitivos para lograr un cambio en la racionalidad del estudiante?

¿Las argumentaciones perceptuales tienen un carácter robusto en la racionalidad de los estudiantes pese al conflicto cognitivo? ¿Cómo pueden ser eventualmente cambiadas?

Nuestra hipótesis de investigación es que una situación de conflicto cuidadosamente diseñada puede fomentar un cambio en la racionalidad de los estudiantes al enfrentar problemas geométricos. De manera que el conflicto cognitivo puede dar indicios de lograr un desarrollo de la racionalidad del estudiante que se refleja en sus acciones, los argumentos y las decisiones que tienen que ver con los procesos de prueba. Sin embargo, no ocurre de manera automática, sino que depende de: (1) la aceptación del conflicto, (2) la forma como se resuelve éste y (3) el medio en que se desenvuelve el problema.

## Referencias

- Alibert, D., & Thomas, M. (1991). Research on mathematical proof. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 215-230). The Netherlands: Kluwer.
- Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en alumnos de matemáticas*. Bogotá: Una Empresa Docente.
- Bell, A. (1976). A study of pupils' proof- explanations in mathematics situations. *Educational Studies in Mathematics*, 7, 23-40.
- Chazan, D. (1993), High School Geometry Students' Justification for their Views of Empirical Evidence and Mathematical Proof. *Educational Studies in Mathematics*, 24 (4), 359-387.
- Duval, R. (2007). Cognitive functioning and the understanding of mathematical processes of proof. En P. Boero (Ed.), *Theorems in school: From history, epistemology and cognition to classroom practice* (pp. 137-162). Rotterdam: Sense publishers.

- Fischbein, E., & Kedem, I. (1982). Proof and Certitude in the Development of Mathematical Thinking. En A. Vermandel (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 128-31). Antwerp, Belgium.
- Hadas, N., & Hershkowitz, R. (1999). The role of uncertainty in constructing and proving in computerized environment. *Proceedings of the 23th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 3-57).
- Hadas, N., Hershkowitz, R., & Schwarz, B. B. (2000). The role of contradiction and uncertainty in promoting the need to prove in dynamic geometry environments. *Educational studies in Mathematics*, 44(1-2), 127-150.
- Hadas, N., Hershkowitz, R., & Schwarz, B. B. (2002). Analyses of activity design in geometry in the light of student actions. *Canadian Journal of Math, Science & Technology Education*, 2(4), 529-552.
- Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, 2, 805-842.
- Marrades, R., & Gutiérrez, Á. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational studies in mathematics*, 44(1-2), 87-125.
- Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed?. *Educational Studies in Mathematics*, 66(1), 23-41.
- Perraudeau, M. (1999). Piaget Hoy. Respuestas a una controversia. Mexico: Fondo de cultura económica.
- Prusak, N., Hershkowitz R. & Schwarz. (2011). From visual reasoning to logical necessity through argumentative design, *Educational Studies in Mathematics*, published on line 23 de junio de 2011.
- Stylianides, A. J., & Stylianides, G. J. (2008). "Cognitive conflict" as a mechanism for supporting developmental progressions in students' knowledge about proof. Artículo disponible en la página web Del 11th International Congress on Mathematical Education, under Topic Study Group 18 (<http://tsg.icme11.org/tsg/show/19>). Monterrey, México.
- Stylianides, G. J., & Stylianides, A. J. (2009). Facilitating the transition from empirical arguments to proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, 40(3), 314-352.
- Vinner, S. (1983). The notion of proof—some aspects of students' views at the senior high level. En *Proceedings of the Seventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 289-294).
- Zaslavsky, O. (2005). Seizing the opportunity to create uncertainty in learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 60, 297-321.
- Zazkis, R., & Chernoff, E. J. (2008). What makes a counterexample exemplary? *Educational Studies in Mathematics*, 68, 195-208.