ESTUDIO DE LA INTEGRAL DEFINIDA MEDIANTE LA FUNCIÓN DE ACUMULACIÓN

Martha Patricia Jiménez Villanueva
Cinvestav-IPN, Escom-IPN
mpjvillanueva1972@gmail.com
Hugo Rogelio Mejía Velasco
Cinvestav-IPN
hmejia@cinvestav.mx

Resumen

El trabajo que aquí se presenta es un avance de la investigación que trata de responder la pregunta ¿cuáles son las construcciones mentales sobre la integral definida que desarrollan los estudiantes cuando el concepto se presenta mediante la función de acumulación de una función dada?. La experiencia de enseñanza se realizó con 10 estudiantes de primer semestre de ingeniería en sistemas computacionales del IPN. El desarrollo de este trabajo toma como base el ciclo de investigación propuesto por la teoría APOE. Los resultados de la experiencia preliminar muestran que la construcción de la integral definida vía la función de acumulación implica la realización y uso de varias construcciones mentales dentro de las cuales podemos destacar los siguientes Procesos: construcción de una función escalonada, sucesión como función, partición, suma de Riemann interpretada como función de acumulación y límite de una suma de Riemann.

Palabras claves: Integral definida, función de acumulación de una función dada, teoría APOE, construcciones y mecanismos mentales.

Introducción

La integral definida es uno de los conceptos fundamentales del cálculo, es una herramienta muy importante para otros campos como física, economía, estadística, etc., y es un concepto relevante para abordar una amplia gama de problemas que los estudiantes de ingeniería utilizan en sus programas de estudio. Sin embargo, en diferentes investigaciones (Orton, 1983; Bezuidenhout & Olivier, 2000; Saley, 2006) se ha manifestado que los estudiantes no logran una comprensión real de este concepto. Esto ha motivado que distintos trabajos se centren en identificar las dificultades en la comprensión de la integral definida y en buscar alternativas didácticas que contribuyan a una mejor comprensión del mismo.

La comprensión de la integral definida por parte de los estudiantes, de acuerdo con nuestra experiencia y los resultados obtenidos en diversas investigaciones, presenta deficiencias, dentro de las cuales se pueden destacar las siguientes: generalmente los estudiantes identifican la integral como una primitiva, las integrales definidas se identifican con la regla de Barrow y no se integra el concepto de área con el de integral (Bezuidenhout & Olivier, 2000). Estas deficiencias se manifiestan cuando los estudiantes tienen problemas para interpretar el área limitada por la gráfica de una función que pasa de positiva a negativa o viceversa o bien, presenta discontinuidades; cuando no logran establecer una conexión entre el pensamiento numérico, algebraico, geométrico y analítico; cuando utilizan su definición de manera algorítmica, mecánica o memorística; o bien cuando piensan la integral definida asociada al concepto de área pero aislada de otros contextos.

Una arista del problema es la forma en que se produce el cambio del bachillerato a la universidad en la enseñanza de la integral definida: reglas de integración contra significado de la integral definida. La manera como diferentes libros de texto presentan este concepto y como algunos de ellos hacen mayor énfasis en los procesos algorítmicos y algebraicos, antes que el significado analítico, es otra arista del problema, esto ha conducido a que el significado que los estudiantes asocian a la integral definida sea el de encontrar una *primitiva*, esto es, una función de la que se conoce la derivada, la cual se debe evaluar en los límites de integración para encontrar un valor (que quien sabe que signifique). También ha conducido a que el acercamiento por medio de sumas de Riemann esté asociado sólo al cálculo de áreas de regiones planas sin conexión con la integral definida.

Debido a la cantidad de elementos que intervienen en la construcción de la integral definida (función, partición, sucesión, límite) hacen de éste, un concepto realmente complejo en la enseñanza de las matemáticas. Los libros de texto, revisados, presentan la integral definida de una función dada en un intervalo cerrado $[a, b]$ mediante la suma de Riemann y hasta que se aborda el Teorema Fundamental del Cálculo se hace referencia a la función de acumulación, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Thompson y Silverman (2007) señalan que sin un enfoque adicional en la construcción, representación y comprensión de las sumas de Riemann, hay pocas razones para creer que los alumnos comprenderán que la función de acumulación de una función dada juega un papel central en el Teorema Fundamental del Cálculo.

Tomando como base las ideas de Thompson y Silverman (2007) quienes plantean que el análisis de la función g (denominada por los autores como función de acumulación de Riemann), definida como, $g_{\Delta x,a}(x) = \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{x-a}{\Delta x} \right\rfloor} f(i\Delta x + a)\Delta x,\ \ a \leq x \leq b$, donde f es una función continua real sobre $[a, b]$ y $\Delta x > 0$, podría permitir a los estudiantes desarrollar una concepción Proceso de las sumas de Riemann (una concepción Proceso en términos de la teoría APOE se describe más adelante), hemos encontrado en la función de acumulación g de una función dada f, una manera alternativa para presentar la integral definida. En el ciclo de investigación de la teoría APOE directrices para el diseño e implementación de este enfoque y en el software Mathematica un ambiente para expresar las construcciones de los objetos matemáticos que realizan los estudiantes. Lo anterior nos ha conducido al planteamiento del siguiente problema de investigación en el marco de la teoría APOE.

¿Qué esquemas de la integral definida desarrollan los estudiantes de ingeniería cuando el concepto se presenta mediante la función de acumulación?

Para hacer un acercamiento a la respuesta de esta pregunta, se intentará responder las siguientes cuestiones más específicas.

¿Qué construcciones (Acciones, Procesos y Objetos) de la Integral Definida realizan los estudiantes cuando el concepto se presenta mediante la función de acumulación?

¿De qué manera el uso del ambiente Mathematica contribuye al desarrollo de esquemas de la integral definida cuando el concepto se presenta mediante la función de acumulación?

Antecedentes

Algunas investigaciones sobre la integral definida revelan las dificultades en el aprendizaje y comprensión de este concepto y la necesidad de una mayor indagación en este campo del conocimiento. En este sentido, Orton (1983) pone de manifiesto las dificultades de los estudiantes en comprender la integral definida como el límite de una suma debido a una comprensión no adecuada del proceso de límite; Bezuidenhout y Olivier (2000) indican que una de las dificultades radica en concebir la integral definida como un área, sin acabar de precisar que para ello se requiere que la función sea positiva; Llorens y Santoja (1997) ponen de manifiesto que las dificultades están relacionadas con el dominio de los procedimientos algorítmicos frente a los aspectos conceptuales de la integral definida.

Por otro lado, investigaciones sobre el desarrollo de la comprensión de la noción integral definida aportan información en el campo de la enseñanza, en esta línea. Por ejemplo, Turégano (1998) propone presentar la integral a partir de su definición geométrica; Czarnocha, Prabhu y Vidakovic (2001) plantean la necesidad de coordinar dos esquemas: el esquema visual de la suma de Riemann y el esquema del límite de una secuencia numérica; Thompson y Silverman (2007) plantean introducir el concepto mediante la función de acumulación; Camacho y Depool (2003a) analizan la influencia del uso del CAS *Derive* en la idea de área limitada por una curva y el eje OX; y Boiges, Llinares y Struch (2010) proponen un modelo de aprendizaje que integra las nociones de partición de un intervalo, de sumas de Riemann y de límite de una sucesión de sumas de Riemann de manera anidada ya que desde su punto de vista el uso de la idea de sucesión entendida como una función dependiendo del valor de n de la partición aplicado a las sumas de Riemann les debe permitir construir un esquema de la integral definida.

En relación a presentar el concepto integral definida mediante la idea de área bajo una curva Bezuidenhout y Olivier (2000) revelan que una concepción de los estudiantes es “la integral definida provee un valor positivo”, una razón de tal procedimiento es la conexión de la integral definida con el área entre la gráfica y el eje OX, Bezuidenhout y Olivier creen que esa concepción puede deberse a una abstracción insuficiente de las imágenes del concepto de integral, ligadas al área como contexto. De acuerdo con estos resultados, el estudio realizado por Turégano (1998) destaca que el enunciado “área bajo la curva” resultó conflictivo para los estudiantes cuando la función toma valores negativos.

Los resultados de estas investigaciones señalan que la comprensión de la integral definida toma en cuenta la necesidad de relacionar las nociones de función, sucesión y límite con la de suma de Riemann, para potenciar una comprensión que vaya más allá de la pura manipulación procedimental y considerar el desarrollo de la comprensión de la integral definida como un concepto dinámico que va incorporando nuevos elementos. Pensamos que la presentación de la integral definida mediante la noción de acumulación en otros contextos además del matemático, donde las cantidades acumuladas toman valores positivos, negativos o cero, puede contribuir a una construcción más rica donde la suma de Riemann no se aplique únicamente en situaciones que implican cantidades fijas de alguna cantidad (por ejemplo: trabajo total, área, volumen, etc.) sino cantidades variables de alguna cantidad.

Referentes teóricos

Como señalamos anteriormente, el desarrollo de este trabajo se realizó tomando como referencia el ciclo de investigación propuesto por la teoría APOE, desarrollada por Dubinsky y por un grupo de investigadores (Arnon et al., 2014). Este ciclo está compuesto por tres componentes: 1) Análisis teórico, 2) Diseño e implementación de la enseñanza y 3) observación, análisis y verificación de datos.

El propósito del análisis teórico de un concepto es proponer modelos que pueden desarrollarse en la mente de un individuo cuando está tratando de aprender un concepto matemático. Un primer acercamiento al análisis teórico da lugar a un modelo preliminar conocido dentro de esta teoría como *descomposición genética preliminar* del concepto el cual es un conjunto estructurado de construcciones mentales (Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas) que pueden describir cómo el concepto puede desarrollarse en la mente de un individuo (Asiala et al., 1996). Las abstracciones reflexivas utilizadas para realizar las construcciones mentales se conocen en la Teoría APOE como mecanismos mentales y son caracterizados de la siguiente forma (Asiala et al., 1996):

La **interiorización**, es la construcción mental de un proceso que tiene que ver con la reflexión sobre la repetición de una serie de acciones sobre objetos cognitivos. La **coordinación,** es la acción mental de tomar dos o más procesos y usarlos para construir un nuevo proceso. La **inversión** puede realizarse una vez que el proceso existe internamente ya que el sujeto tiene la posibilidad de invertirlo, en el sentido de deshacerlo, para construir un nuevo proceso original. La **encapsulación** es la transformación mental de un proceso dinámico en un objeto cognitivo estático. La **desencapsulación,** es el proceso mental de regresarse desde un objeto al proceso desde el cual fue encapsulado el objeto o tuvo su origen. La **generalización** ocurre cuando el sujeto llega a ser consciente de una aplicación más amplia de un esquema determinado. Por último, la **tematización** es la reflexión sobre la comprensión de un esquema, concibiéndolo como "un todo", sobre el cual se pueden realizar acciones.

Las construcciones mentales que, desde el punto de vista de la teoría APOE, un individuo desarrolla en la construcción de un concepto matemático se describen a continuación.

Cuando un individuo realiza una transformación física o mental como resultado de un estímulo externo que da detalles precisos de los pasos que se van a seguir se dice que el individuo desarrolla una construcción de **Acción**. Cuando un individuo reflexiona sobre la acción y construye una operación interna que realiza la misma transformación, esto es, puede pensar en cómo llevar a cabo el mismo tipo de acción, sin la necesidad de estímulos externos, además puede describir los pasos involucrados en la transformación e incluso invertirlos teniendo de esta manera más control de la misma entonces se dice que la acción se ha interiorizado a un **Proceso.** Cuando un individuo se da cuenta que se pueden realizar transformaciones sobre un proceso particular y es capaz de construir explícitamente o en su imaginación tales transformaciones, se dice que el proceso se ha encapsulado en un **Objeto**. Esta encapsulación se logra cuando el individuo llega a ser consciente del proceso como una totalidad y se da cuenta que las transformaciones pueden actuar sobre dicho proceso. Dentro de esta teoría se considera que un **Esquema** de un individuo es la totalidad de conocimiento el cual para él está conectado (consciente o subconscientemente) a un tópico matemático determinado y precisan un esquema como un conjunto coherente de Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas previamente construidos al que se recurre para tratar con una situación matemática (Asiala, et al., 1996; Arnon, et al., 2014).

Cuando un individuo se enfrenta a una situación matemática específica, evoca un esquema para resolverla, pone en juego aquellos conceptos que están disponibles para él en ese momento, establece relaciones entre ellos y realiza el tipo de construcciones que posee del concepto (Acciones, Procesos y Objetos). Diferentes estudiantes pueden establecer distintas relaciones usando los mismos conceptos cuando enfrentan una misma situación, el tipo de relaciones y construcciones que hacen los estudiantes depende del conocimientos matemático que se tenga (Trigueros, 2005).

En la teoría APOE el término concepción se refiere a la idea o comprensión del individuo la cual se desarrolla como resultado de la actividad reflexiva (Arnon et al 2014, p. 18). Un estudiante puede tener una concepción Acción, una concepción Proceso o una concepción Objeto de un concepto matemático determinado. Por ejemplo, en el caso de función, un individuo que requiere de una expresión explícita para sustituir la variable por un valor específico y manipularla, se considera que tiene una comprensión de Acción de función (Dubinsky el al. 2005a, p. 338, referido en Arnon et al. 20014, p. 19), en este sentido se dice que tiene una concepción Acción del concepto de función; en cambio, un individuo con una comprensión de Proceso de función podría construir un proceso mental para una función dada y pensar en esta en términos en entradas, posiblemente no especificadas, y transformarlas para producir salidas, en este caso se dice que el individuo tiene una concepción Proceso de función.

Para el caso de la integral definida Arnon et al. (2014) señalan que un individuo con una concepción Acción puede determinar una estimación de la integral definida como un área bajo una curva, dando subintervalos específicos de un tamaño dado, construyendo un rectángulo bajo la curva para cada subintervalo y calculando la suma de las áreas de los rectángulos. Así al trabajar con una situación que involucra la integral definida, el estudiante necesitará de pista externas (una expresión algebraica, una gráfica o una tabla) que le indique como determinar la altura de cada rectángulo, así como el ancho de cada subintervalo. La Acción de determinar las sumas de Riemann para una partición particular es interiorizada en un Proceso cuando un individuo puede describir como determinar la suma de Riemann para cualquier partición y puede imaginar que este proceso continúa cuando decrece la longitud del subintervalo más grande. Se necesita aplicar una Acción al Proceso suma de Riemann para obtener el área bajo la curva de una función en un intervalo cerrado. La acción aplicada es el "límite" de la suma de Riemann. Para determinar la existencia de este límite y /o para calcular su valor, el estudiante necesita encapsular el Proceso "suma de Riemann" en un Objeto.

En el desarrollo de esta investigación hemos comenzado con la segunda componente del ciclo de investigación, diseño e implementación de la enseñanza, con el objetivo de identificar las construcciones mentales que realizan los estudiantes y las relaciones entre ellas que nos permita plantear una descomposición genética de la integral definida.

Diseño del estudio

La experiencia preliminar se realizó con diez estudiantes de primer semestre de Ingeniería en Sistemas Computacionales de la Escuela Superior de Cómputo del Instituto Politécnico Nacional (ESCOM-IPN). Los estudiantes, voluntarios, participaron en 11 sesiones presenciales, extra clase. Tres sesiones de entrenamiento con el software *Mathematica* con el propósito de familiarizarse con su entorno y ocho sesiones para la enseñanza y el aprendizaje de la integral definida.

Enseñanza de la Integral Definida

La estrategia pedagógica empleada en esta investigación toma como base el ciclo de enseñanza **ACE** (**A**ctividades en el laboratorio, discusión en el salón de **C**lases y **E**jercicios extraclase) sugerido por la teoría APOE, con algunas modificaciones. El ciclo de enseñanza propuesto inicia con **A**ctividades en computadora usando el software *Mathematica*, **E**jercicios extra clase con *Mathematica* y **D**iscusión de las soluciones en un foro y en el laboratorio. La organización de la estrategia pedagógica da lugar al ciclo de enseñanza **AED**.

La enseñanza de la integral definida se desarrolló en 8 sesiones (90 minutos cada una), dos sesiones cada semana, durante cuatro semanas y se integró por 20 actividades. El trabajo de las sesiones se realizó en parejas y algunas actividades extraclase se realizaron de forma individual.

Para el diseño de las actividades se propone una serie de pasos relacionados, que integran las nociones de: partición de un intervalo cerrado, sucesión, función, función de acumulación de una función dada y límite de una función, tanto a nivel geométrico como analítico.

Dada una función f, un intervalo cerrado $[a , b]$ subconjunto del dominio de f y un entero positivo n, en el camino geométrico, se colocan marcas, sobre el segmento de recta que representa al intervalo cerrado $[a, b]$, para dividir el intervalo dado en n subintervalos regulares, se identifican los puntos sobre la gráfica de f, que corresponden al valor de la función en los extremos de los subintervalos, se construye la gráfica de una función escalonada considerando que la función f es constante en cada subintervalo y se construyen rectángulos tomando como base la función escalonada. En el camino analítico, se determinan los extremos de los subintervalos, se calcula el valor de la función en los extremos de los subintervalos, se determina el ancho de cada subintervalo, se calculan las cantidades formadas multiplicativamente (ancho del subintervalo por el valor de la función en el extremo inferior de cada subintervalo) y se construye una lista finita de acumulaciones.

Las actividades de enseñanza se estructuraron de la siguiente forma: acumulación de una función constante, acumulación de una función constante a trozos y acumulación de una función continua no constante. Las actividades de la experiencia exploratoria están planteadas en el contexto de la matemática y de la física. En este documento se hace referencia a la acumulación de una función dada en el contexto de la matemática.

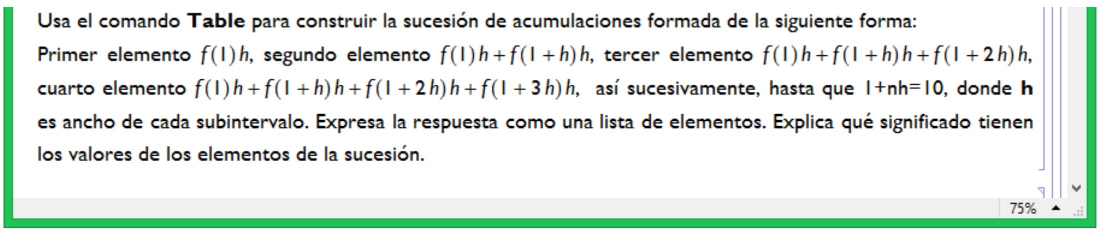
Descripción de los resultados

La experiencia de aprendizaje comenzó con actividades donde los estudiantes realizan acciones sobre intervalos fijos y funciones específicas como la división del intervalo dado en un número fijo de subintervalos y la evaluación de la función en el extremo inferior de los subintervalos evidenciando sus acciones a través de algunos comandos de Mathematica.

Así, los estudiantes comienzan construyendo una suma de Riemann para diferentes valores de n, construyendo de esta manera una sucesión de sumas de Riemann

Dentro de las actividades propuestas una cuestión que se plantea es construir una lista ordenada de acumulaciones de una función usando el comando Table (este comando permite generar una lista de elementos) del software Mathematica como se muestra en la figura 1.

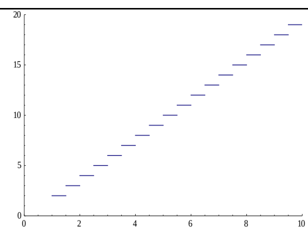
Figura 1. Cuestión planteada sobre una lista ordenada de acumulaciones


Usa el comando **Table** para construir la sucesión de acumulaciones formada de la siguiente forma:
Primer elemento $f(1)h$, segundo elemento $f(1)h+f(1+h)h$, tercer elemento $f(1)h+f(1+h)h+f(1+2h)h$, cuarto elemento $f(1)h+f(1+h)h+f(1+2h)h+f(1+3h)h$, así sucesivamente, hasta que 1+nh=10, donde **h** es ancho de cada subintervalo. Expresa la respuesta como una lista de elementos. Explica qué significado tienen los valores de los elementos de la sucesión.

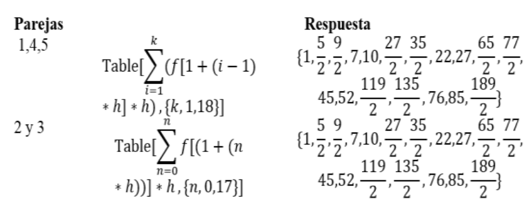
75%

En la figura 2 se muestra el trabajo de los estudiantes en la construcción de una lista ordenada de acumulaciones de la función $f(x) = \lfloor 2x \rfloor$ como se define en la figura 1.

Figura 2. Construcción de una lista ordenada de acumulaciones de la función $f(x) = \lfloor 2x \rfloor$ en el intervalo [1,10]



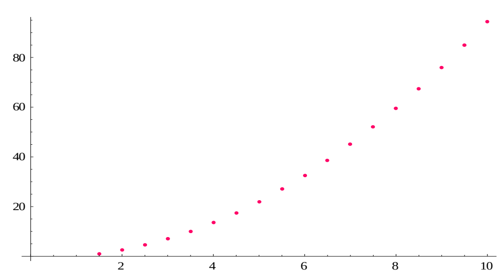
$f(x) = \lfloor 2x \rfloor$ en [1,10]



Parejas		Respuesta
1,4,5	$\text{Table}[\sum_{i=1}^{k}(f[1+(i-1)*h]*h),\{k,1,18\}]$	$\{1,\frac{5}{2},\frac{9}{2},7,10,\frac{27}{2},\frac{35}{2},22,27,\frac{65}{2},\frac{77}{2},45,52,\frac{119}{2},\frac{135}{2},76,85,\frac{189}{2}\}$
2 y 3	$\text{Table}[\sum_{n=0}^{n}f[(1+(n*h))]*h,\{n,0,17\}]$	$\{1,\frac{5}{2},\frac{9}{2},7,10,\frac{27}{2},\frac{35}{2},22,27,\frac{65}{2},\frac{77}{2},45,52,\frac{119}{2},\frac{135}{2},76,85,\frac{189}{2}\}$

$$\text{ListPlot}[\{\{\tfrac{3}{2},1\},\{2,\tfrac{5}{2}\},\{\tfrac{5}{2},\tfrac{9}{2}\},\{3,7\},\{\tfrac{7}{2},10\},\{4,\tfrac{27}{2}\},\{\tfrac{9}{2},\tfrac{35}{2}\},\{5,22\},\{\tfrac{11}{2},27\},\{6,\tfrac{65}{2}\},\{\tfrac{13}{2},\tfrac{77}{2}\},\{7,45\},\{\tfrac{15}{2},52\},\{8,\tfrac{119}{2}\},\{\tfrac{17}{2},\tfrac{135}{2}\},\{9,76\},\{\tfrac{19}{2},85\},\{10,\tfrac{189}{2}\}\},$$

$$\text{PlotStyle} \to [\text{RGBColor}[1.,0.,0.4]]$$



Del análisis del trabajo podemos destacar que los estudiantes son capaces de determinar una lista ordenada de acumulaciones de una función constante a trozos, para funciones específicas definidas en un intervalo dado. Consideramos que el hecho de que la función con la que trabajaron fue escalonada permitió a los estudiantes identificar el cambio en el argumento de la función lo que no ocurrió cuando la función con la que trabajaron fue una función constante. Surge de manera natural el uso del símbolo de sumatoria en la construcción de la lista ordenada de acumulación, incluso algunos de ellos son capaces de representar gráficamente las acumulaciones apareando las abscisas de los extremos superiores de los subintervalos con los elementos de la lista ordenada de acumulaciones (ver figura 2).

Por otro lado, explicar cómo construir una función algebraica que les permita determinar las acumulaciones obtenidas en la figura 2, fue difícil para los estudiantes. Consideramos que una de las razones de esta dificultad fue la diferenciación entre parámetro y variable así como el hecho de que los estudiantes identifican con el mismo nombre diferentes parámetros, otra de las razones es que los estudiantes requieren conocimientos de una concepción Proceso de función que les permita identificar el dominio y la imagen de la función de acumulación. Las explicaciones de los estudiantes se muestran en la tabla 1.

Tabla 1: Explicaciones de los estudiantes sobre cómo construir una función de acumulación

Parejas	**Respuesta**
1	La función para determinar las acumulaciones sería la función original evaluada en el inicio del intervalo más una variable por el ancho del intervalo, y eso multiplicado por el ancho del intervalo.
2	Con una integral definida de la función $f(x)$, desde el inicio del intervalo "a" hasta el final del intervalo "b".
3	Con la función $f(x)$ evaluada en un número que vaya desde uno a 18, obtendremos el área formada entre la función $f(x) = \lfloor 2x \rfloor$ y el eje de las abscisas correspondiente al intervalo $(1,x)$
4	Con una sumatoria de la sumatoria anterior
5	Como en el ejemplo anterior, nos podemos basar en que necesitamos tanto la función $f(x)$ a la cual se le determina las acumulaciones, la función $g(x) = 1 + nh$,el número de subintervalos y su longitud que es $h = \frac{b-a}{n}$, donde a es el inicio del intervalo total y b el fin del intervalo total. Después para las acumulaciones solo sería una función que relacione las dos de esta manera y tabule los resultados.

Ante esta dificultad, la profesora que implementa la actividad, solicita a los estudiantes representar simbólicamente, en la pizarra, lo que explican. En la tabla 2 se muestra lo escrito en la pizarra.

Tabla 2: Representación simbólica de las explicaciones de los estudiantes dadas en la tabla 1.

Parejas	Respuesta
1	$f(1+nh)h$
2	$\int_a^b f(x)$
3	$f(x)=\sum_{i=1}^{x} f(1+nx)x$ para todo $x \in [1,18]$
4	$\sum_{\square}^{\square} \sum_{i=1}^{k} f[1+(i-1)*h]*h]$ k=1, 2,…., 18
5	$f(x)=\sum_{i=1}^{x} f(1+nh)h$ x=0, 1, 2,…, 18

Mediante preguntas planteadas como ¿Cuáles son las variables que están cambiando? ¿Qué valores toma la variable independiente? la profesora que implementa la actividad propicia la reflexión de los estudiantes. Los estudiantes analizan las expresiones escritas en la pizarra, hacen comentarios entre ellos e identifican a las expresiones de las parejas 2 y 5 como aquella que podrían permitirles obtener las acumulaciones obtenidas en la figura 2. Después de intercambiar opiniones los estudiantes logran construir las siguientes funciones $Itg(x)=\int_1^x f(t)dt$ y $acum(x)=\sum_{i=1}^{x}[f(1+(i-1)h)]h$. La primera, es la función de acumulación de la función f en el intervalo [1, x], los estudiante construyen esta función en base a la expresión $\int_a^b f(t)dt$ dejando fijo el límite inferior, a=1, y variando el límite superior, b=x. La segunda, es una función que construyen los estudiantes para intentar generar la acumulación de una función f desde uno hasta los extremos de los subintervalos. Al evaluar para diferentes valores de x los estudiantes se dan cuenta que las funciones construidas son diferentes (figura 3).

Figura 3. Evaluación para diferentes valores de x (extremos de los subintervalos) de las funciones construidas por los estudiantes $Itg(x)=\int_1^x f(t)dt$ y $acum(x)=\sum_{i=1}^{x}[f(1+(i-1)h)]h$

```
Itg[x_] := ∫_1^x f[t] dt

Itg[1]
Itg[1.5]
Itg[2]
Itg[2.5]
Out[39]= 0
Out[40]= 1.
Out[41]= 5/2
Out[42]= 4.5
```

```
In[43]:= acum[x_] := Sum[(f[1 + (i - 1) h]) h, {i, 1, x}]

acum[1]
acum[1.5]
acum[2]
acum[2.5]
Out[44]= 1.
Out[45]= 1.
Out[46]= 2.5
Out[47]= 2.5
```

Como se puede observar, los estudiantes no tienen dificultades para calcular una expresión, $\sum_{i=1}^{n}[f(1+(i-1)h)]h \;\; con\, n = 1,2,3,4,\ldots,18,$ que les permita calcular las acumulaciones obtenidas en la figura 2, pero presentan dificultades para construir una función algebraica que les permita determinar tales acumulaciones. En las funciones de acumulación construidas los estudiantes identifican las cantidades formadas multiplicativamente $(f(t)dt \;\; y\; [f(1+(i-1)h)]h$, pero no es claro para ellos el papel de la variable independiente en la función de acumulación. Hasta que una de las estudiantes señala que el límite superior de la notación de sumatoria debe ser un entero que indica el número de veces que se deben sumar las cantidades formadas multiplicativamente, pueden establecer el límite superior de la sumatoria como $\left\lfloor\frac{x-a}{\Delta x}\right\rfloor$ y replantear la función de acumulación como $acum(x) = \sum_{i=1}^{\left\lfloor\frac{x-a}{\Delta x}\right\rfloor}[f(1+(i-1)\Delta x)]\Delta x$, llamada función de acumulación de Riemann por Thompson y Silverman (2007).

Cabe aclarar que consideramos una función de acumulación de Riemann en el sentido de Thompson y Silverman quienes modifican la suma de Riemann considerando dx como un parámetro y x variable, es decir de la siguiente manera

Esto evidencia que un estudiante que ha construido el proceso de calcular la acumulación de una función escalonada en el intervalo $[a,\, b]$ es capaz de deshacer el proceso para calcular la acumulación de una función escalonada en el intervalo $[a,\, x]$, donde x es el extremo de los subintervalos, además es capaz de explicar que para todos los valores de x tales $x_i \leq x < x_{i-1}$ la acumulación es la misma. Cuando esto ocurre, se puede decir que el estudiante muestra evidencia de una concepción Proceso de la integral definida.

Ahora bien, para determinar una aproximación a la integral de una función continua f en el intervalo $[a,\, b]$, mediante una función de acumulación de Riemann, se requiere construir una función escalonada, la cual se puede construir, por ejemplo, usando el extremo inferior de los subintervalos, $[x_i, x_{i-1}]$ del intervalo $[a, b]$ y considerando que para todos los valores de x, tales $x_i \leq x < x_{i-1}$, la función es constante y su valor es $f(x_i)$. En este caso se ha llamado a la función escalonada como rizq(x,a, Δx), donde a y Δx son valores específicos. Posteriormente usar rizq(x,a, Δx) para calcular una aproximación al valor de la integral en el intervalo [a, x] como $acuizq(x, a, \Delta x) = \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{x-a}{\Delta x} \right\rfloor} [rizq(a + (i-1)\Delta x)]\Delta x$. Para hacer esto, el estudiante primero necesita construir el proceso función escalonada, para ello requiere una concepción proceso de función que le permita identificar el dominio y la imagen de la función escalonada. Para dar mejores aproximaciones al valor de la integral el estudiante necesita encapsular el proceso partición, para hacer particiones más finas que le lleven a mejores aproximaciones y le conduzcan a la necesidad de usar el proceso de límite aplicado a la acumulación de la función escalonada para obtener la acumulación exacta de la función continua.

La dificultad que presentan los estudiantes para construir una función algebraica que les permita determinar las acumulaciones obtenidas en la figura 2 muestra que para construir un esquema de la integral definida vía la función de acumulación, $g(x) = \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{x-a}{\Delta x} \right\rfloor} f(i\Delta x + a)\Delta x,\ \ a \leq x \leq b$, se requiere que el esquema de función del estudiante incluya un proceso de construcción de una función escalonada que genere las acumulaciones para cualquier x en [a ,b]. Dado que la construcción de este proceso es un acto complejo para los estudiantes ya que no identifican cuál es la variable de la función de acumulación, es necesario especificar en la descripción de la descomposición genética preliminar la relevancia de este proceso. La dificultad de este se evidencia cuando los estudiantes escriben funciones como la siguiente

$$\text{acuizq}[x\_, a\_, h\_] := \sum_{i=1}^{x} \text{rizq}[x, -2, .2] * h$$

Donde rizq$[x, -2, .2]$ es una función escalonada, construida considerando el extremo inferior de cada subintervalo de ancho 0.2 y valor inical a = -2; para un valor específico de x la función escalonada tiene un valor determinado, el estudiante no se da cuenta que está sumando el mismo valor. Depués de la intervención de la profesora mediante preguntas de lo que están acumulando, algunos estudiantes pudieron construir la función de acumulación de una función escalonada como se muestra a continuación.

$$\text{acuizq}[x\_, a\_, h\_] := \sum_{k=1}^{\text{Floor}[\frac{x-a}{h}]} \text{rizq}[a + (k-1)h, a, h]h$$

La forma en que los estudiantes operan con la función de acumulación muestran elementos que dan evidencia de una concepción Acción o una concepción Proceso, por ejemplo, algunos estudiantes evalúan para valores específicos de x, a y h, lo que consideramos una evaluación puntual de la función de acumulación (ver figura 4).

Figura 4. Evaluación puntual de una función de acumulación de la función $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$ para valores de x en el intervalo [-2,2]

acuizq[-1.5,-2,0.1]	0.3856
acuizq[0.4,0,0.1]	-0.1024
acuizq[1,0,0.1]	-0.4125
acuizq[1.2,1,0.1]	0
acuizq[1.4,1,0.1]	0.0682
acuizq[2,1,0.1]	2.5881

Otros estudiantes, usan el comando *Manipulate* para determinar la acumulación para diferentes valores de a, x y h. A diferencia de los estudiantes que usan la evaluación puntual, estos estudiantes además de determinar cuándo la función de acumulación toma valores positivos y cuándo toma valores negativos, son capaces de determinar los intervalos en que la función de acumulación de Riemann de la función $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$ en el intervalo [-2,2] es creciente o decreciente mediante la manipulación de los parámetros del comando *Manipulate* o usando la representación gráfica de la función de acumulación (ver figuras 5 y 6).

Figura 5. Manipulación de los parámetros que involucra la función de acumulación de la función $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$ para x en el intervalo [-2,2]

```
Manipulate[acuizq[x,a,h],{x, -2,2},{a, -2,1},{h,.01,.2}]
```

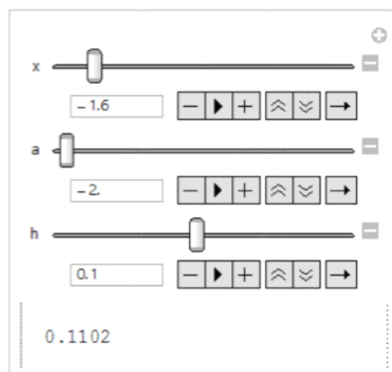
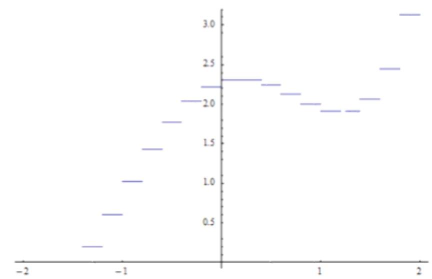


Figura 6. Una representación gráfica de la función de acumulación de Riemann de la función $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$ en [-2,2]

Plot[acuizq[x,-2,0.2],{x,-2,2}]



Pensamos que el uso del comando *Manipulate* permite ver características generales mediante la manipulación de los parámetros que intervienen en la función de acumulación, como variar el ancho de los subintervalos cuando el número de subintervalos crece (particiones refinadas) lo que da la oportunidad de generar una sucesión de funciones escalonadas que se van aproximando a la gráfica de la función de acumulación de una función continua o la gráfica de la función integral que vale cero en x=a.

Conclusiones y comentarios finales

Con relación a la metodología usada: **A**ctividades en la Laboratorio, **E**jercicios Extraclase y **D**iscusión en el foro y el laboratorio, podemos señalar que el *Software Mathematica* (un ambiente que permite manipular expresiones simbólicas y con posibilidades de programar y construir objetos matemáticos) resultó adecuado para ayudar a los estudiantes a realizar contrucciones mentales de Acción y de Proceso, los estudiantes reforzaron lo aprendido en el laboratorio y tienen la oportunidad de contrastar sus respuestas e identificar sus errores y aciertos durante la sesión de discusión.

En base a los resultados de la experiencia preliminar podemos señalar que la construcción de un esquema de la integral definida de una función f en un intervalo $[a, b]$ vía la función de acumulación requiere de conocimientos previos de función, sucesión, y límite de una sucesión; el esquema de función del estudiante debe incluir al menos dos procesos: un proceso de evaluación de función y un proceso para construir una función escalonada, además debe incluir el Objeto función que permita al estudiante construir un conjunto de funciones escalonadas al disminuir el ancho de los subintervalos; el esquema de sucesión debe incluir un proceso para generar una lista ordenada de elementos y un proceso que permita al estudiante generar una función, dada una lista de elementos. Por otro lado, el esquema de la integral definida debe incluir un esquema de partición y un esquema de suma de Riemann, los procesos de estos esquemas deben coordinarse con los procesos de los esquemas de función y sucesión vía la construcción de una sucesión de suma de Riemann como función a fin de que el estudiante pueda construir una comprensión de la integral definida como proceso. Para construir la integral definida como Objeto el estudiante debe encapsular el proceso "función de acumulación de Riemann" vía la aplicación del límite de una sucesión como resultado del refinamiento de la partición.

Por último, podemos señalar que las actividades realizadas permiten la construcción de manera sistemática de la función de acumulación de una función dada y proporcionan evidencia sobre las construcciones mentales, con relación a la integral definida, que realizan los estudiantes. La identificación de estas construcciones mentales y las relaciones entre ellas nos dan la oportunidad de plantear una descomposición genética preliminar de la integral definida la cual es un conjunto estructurado de construcciones mentales que pueden describir como un concepto puede desarrollarse en la mente de un individuo.

Referencias

Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktac, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS Theory A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education.* New York Heidelberg Dordrecht London: Springer.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. *Research in collegiate mathematics education. 2*(3), 1-32.

Bezuidenhout, J., & Olivier, A. (2000). Student's conceptions of the integral. *Proceedings of the 24th Conference of International Group of the Psycology of Mathematics Education, 2*, 73-80.

Boigues, F.-J., Llinares, S., & Estruch, V. D. (2010). Desarrollo de un esquema de la integral definida en estudiantes de ingenieria relacionadas con las ciencias de la naturaleza: Un análisis a través de la lógica Fuzzy. *13*(3), 255-282.

Camacho, M., & Depool, R. (2003a). Un estudio gráfico y numérico del calculo de la integral definida utilizando el programa de cálculo simbólico (PCS) DERIVE. In *Educat* (E. Santillana, Trans., Vol. 15, pp. 119-140). Distrito Federal, México: Editorial Santillana.

Czarnocha, B. L., Prabhu, V., & Vidakovic, D. (2001). The Concept of definite integral: Coordination of two Schemas. In M. v. Penhuizen (Ed.), *Proceedings of the XXV Conference of the International Group of Mathematics Education. 2*, pp. 297-304. Utrecht: Freudenthal Institute.

Kouropatov, A. (2008, August). Approaches to the Integral Concept the case of high school calculus. *YESS, 4*, 1-13.

Llorens, J. L., & Santoja, F. J. (1997). Una Interpretación de las dificultades en el aprendizaje del Concepto Integral. *Divulgaciones Matemáticas, 1*(2), 61-67.

Orton, A. (1983). Students' understanding of integration. *Educational Studies in Matematics, 14*, 1-18.

Sealey, V. (2006) Definite integrals, Riemann sums, and area undeer a curve: what is necessary and sufficient?, In Alatorre, S., Cortina, J.L., Sáiz, M., and Méndez, A.(Eds). *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, 46-53. Mérida, México.

Thompson, P. W., & Silverman, J. (2007). The concept of acumulation in calculus. In M. C. Rasmussen (Ed.). (pp. 117-131). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. *Education Mathematica, 17*(001), 5-31.

Turégano, M. P. (1998). Del área a la integral un estudio en el contexto educativo. *Enseñanza de las ciencias, 16*(2), 233-249.