ARGUMENTACIÓN ABDUCTIVA Y PRUEBA EN PROBLEMAS DE GEOMETRÍA ANALÍTICA UTILIZANDO GEOGEBRA

Ma. Dalia Lozano Grande
CINVESTAV, México
dlozanog@cinvestav.mx

Resumen

Este artículo resume un anteproyecto de doctorado que aborda el proceso de aprendizaje de la prueba matemática a través de la argumentación utilizando Geogebra en un contexto de Geometría Analítica. El estudio será aplicado a estudiantes de bachillerato del IPN quienes cursan dicha asignatura. Interesa observar cómo transitan de la abducción hacia una prueba algebraica con características deductivas. El Marco Teórico a utilizar es el de la "Unidad Cognitiva y la Continuidad Estructural". La observación se hará a través de una serie de prácticas para el aprendizaje del software y la resolución de cuatro problemas finales con la intervención de la investigadora quien cuestionará los procedimientos de resolución empleados por los estudiantes.

Palabras claves: Prueba, argumentación, abducción, deducción, Geometría Analítica, Geogebra, Unidad Cognitiva, Continuidad Estructural.

Introducción

En bachillerato, y en el sistema escolarizado en general, se da poca importancia al desarrollo de la capacidad de los estudiantes para verificar o argumentar y en particular en desarrollar habilidades para la prueba matemática. La responsabilidad de la validez de los resultados obtenidos en clase generalmente recae en la autoridad del profesor; por tal razón, con demasiada frecuencia se priva al estudiante de acceder por cuenta propia a la verdad o falsedad del conocimiento matemático. Salvar esta dificultad puede buscarse en situaciones que permitan a los estudiantes sustentar sus afirmaciones y devolverles la responsabilidad de lo que producen.

Con el uso del software, se abre una posibilidad para adentrarse en la práctica de probar mediante la actividad argumentativa. Si bien es cierto, que la cultura de la prueba debe introducirse en todas las áreas del aprendizaje matemático en el aula, el caso geométrico, por tradición, resulta ser el que más se ha trabajado en este sentido. La introducción de los ambientes de geometría dinámica (DGE) en el salón de clases durante la década pasada, ha planteado una posibilidad (y un reto al mismo tiempo) para lograr el acceso paulatino al proceso de prueba por parte del estudiante comenzando por la generación de conjeturas al observar el comportamiento de las figuras geométricas y posibilitando la transformación de dichos planteamientos iniciales a explicaciones cada vez más generales basadas en las propiedades matemáticas de tales objetos. No obstante, debido a la naturaleza inductiva de tales ambientes, la brecha teórica-experimental existente en la adquisición y justificación del conocimiento geométrico se vuelve un asunto pedagógico y epistemológico muy importante.

En ese sentido, se ha discutido durante varios años la conveniencia de que el estudiante aprenda a probar matemáticamente a través de un trabajo de exploración de un problema geométrico con ayuda del software, elaboración de una conjetura explicativa a partir de lo observado y la transformación de sus afirmaciones iniciales (conjeturas) a través de un proceso de argumentación hasta encontrar una justificación final (aceptada por la comunidad matemática en la que se encuentre) mediante la cual explique porqué una conjetura es cierta (o por qué no lo es). Es decir, se plantea la conveniencia de abordar la prueba a través de la argumentación, considerando esta última como la acción de encadenar proposiciones, mediante relaciones lógicas para llegar a convencer a un interlocutor. La prueba en ese sentido resulta ser un tipo particular de argumento pues logra convencer a una comunidad determinada de la validez de una afirmación.

Este proceso de aprendizaje, sustentado por la llamada Teoría de la Unidad Cognitiva, requiere se estudien aún muchos aspectos como encontrar las razones por los cuales los estudiantes frecuentemente no logran transitar de la elaboración de conjeturas, a la justificación argumentativa de las mismas hasta llegar a una prueba final.

En el presente trabajo, la prueba se aborda desde esta teoría y de forma más específica se retoman los resultados de Bettina Pedemonte relacionados con la continuidad estructural (entendiéndose esta como el tipo de conexión lógico-cognitiva o razonamiento entre las afirmaciones hechas al argumentar y que continúan al obtener la prueba) y su relación con la abducción (tipo de razonamiento que aparece cuando a partir de un hecho observable "sorpresivamente" se encuentra una posible explicación de la situación a tratar). De acuerdo con Pedemonte (2007 b), cuando se resuelven problemas de prueba de tipo geométrico, difícilmente los estudiantes transforman las argumentaciones abductivas en pruebas deductivas a diferencia de lo sucedido al resolver problemas de prueba en el contexto algebraico.

Preguntas de Investigación y Objetivos del estudio

Dado que en geometría analítica se combinan ambos contextos (geométrico y algebraico) cabe preguntarse sobre la prevalencia de las dificultades señaladas por Pedemonte cuando los estudiantes intentan transformar argumentaciones de tipo abductivo (a partir de lo observado en sus construcciones creadas con Geogebra) en pruebas algebraicas de tipo deductivo. Debido a lo anterior, considero pertinente plantear las siguientes preguntas de investigación:

1. ¿Qué elementos facilitan o dificultan la obtención de una prueba algebraica en problemas de geometría analítica cuando se utiliza el software?
2. ¿De qué forma evoluciona la argumentación abductiva hacia la obtención de una prueba algebraica deductiva en problemas de este tipo?
3. ¿Qué elementos de la Unidad cognitiva se presentan durante la resolución de problemas de prueba en geometría analítica?
4. ¿Cuál es el tipo de prueba obtenida en problemas de geometría analítica considerando el razonamiento puesto en marcha en los ámbitos algebraico y geométrico?

En consecuencia, se plantean los siguientes objetivos:

1. Identificar las dificultades o facilidades encontradas para la obtención de una prueba en problemas de geometría analítica utilizando Geogebra.
2. Identificar los casos en los cuales se generan diferentes patrones de razonamiento abductivo y cómo éste evoluciona hacia la obtención de una prueba.
3. Analizar la relación entre el sistema referencial (sistemas de representación y conocimientos) y el estructural (tipos de razonamiento) al pasar de la conjetura a la prueba en problemas de geometría analítica con ayuda del software.
4. Caracterizar el tipo de prueba obtenida en dichos problemas, considerando el razonamiento puesto en marcha en los ámbitos algebraico y geométrico.

Marco Teórico

El estudio de las relaciones entre argumentación y prueba se ha llevado a cabo desde diferentes puntos de vista. Algunos investigadores como Duval enfatizan la discrepancia entre ambos procesos, mientras que otros como Boero, Mariotti, Douek o Pedemonte, resaltan la estrecha relación entre estos dos procesos e incluso proponen que la argumentación previa a una demostración puede resultar útil para la construcción de ésta o para llevar a cabo acercamientos aceptables en el ámbito escolar (Teoría de la Unidad Cognitiva). Nicolas Balacheff por su parte, en su artículo "Is argumentation an obstacle?: Invitation to a debate" indica la posibilidad de un acercamiento a la prueba matemática por medio de la argumentación si se considera la perspectiva teórica de Toulmin, según la cual, un argumento es la exposición de una tesis controversial cuya validez descansa en premisas apoyadas en un conjunto de reglas aceptadas hasta ese momento por una comunidad. De acuerdo con Balacheff, siguiendo la línea de Toulmin, es posible acceder a la prueba matemática por medio de la argumentación si se considera a la prueba como un género particular de argumento, aunque la existencia de una relación entre ambas parece dudosa si se consideran otras perspectivas teóricas sobre argumentación (Balacheff, 1999).

Paulo Boero y el grupo encabezado por él en la Universidad de Génova en Italia, retoman la posibilidad de abordar la prueba mediante la argumentación. No obstante, de acuerdo con ellos, la prueba debe verse como un proceso evolutivo que comienza en el ámbito escolar. El proceso de probar considera varios tipos de actividades algunas de las veces vistas como "etapas" aunque no se presentan de forma lineal: 1) Producción de una conjetura 2) Formulación de una afirmación 3) Exploración de un contenido y de los límites de validez de una conjetura, estimación de la relación entre hipótesis y tesis 4) Acomodo de los argumentos en orden deductivo 5) Organización de los argumentos en la forma de una prueba aceptable de acuerdo con ciertas convenciones o normas matemáticas actuales y 6) Acercamiento a una prueba formal o demostración. Según ellos, las cuatro primeras etapas son accesibles en un ámbito escolar en el cual se introduce el aprendizaje de la prueba (y es en este sentido que se retoma el concepto para el presente trabajo). En cuanto al punto 6, la demostración se da únicamente en el contexto de un sistema axiomático por lo que toda demostración es una argumentación, pero no toda argumentación es una demostración.

Bettina Pedemonte utiliza el constructo de unidad cognitiva y le aporta nuevos elementos. Ella muestra que este análisis no cubre todos los aspectos de la relación entre conjetura y prueba pues además de considerar el sistema referencial (sistemas de representación, conocimientos, heurísticas, etc.) se necesita considerar el sistema estructural (tipo de conexión lógico-cognitiva o razonamiento).

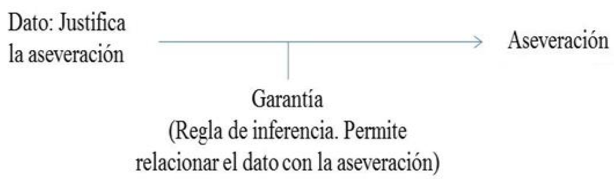
De acuerdo con ella, la prueba implica un razonamiento de tipo deductivo, pero descubrir y conjeturar implican razonar de forma abductiva. En un razonamiento deductivo, los conocimientos teóricos conducen a la prueba; en uno de tipo abductivo, son las observaciones. La continuidad estructural entre los procesos de argumentación y prueba al resolver problemas geométricos es una de las posibles dificultades para construir esta última, pues los estudiantes muchas veces no son capaces de transformar la estructura abductiva en una de tipo deductivo (Pedemonte, 2007 a y b). Sin embargo, en el caso algebraico la continuidad estructural a veces no se presenta y los estudiantes son capaces de construir pruebas correctas con más frecuencia (Pedemonte, 2008).

Para el análisis cognitivo de la continuidad que puede existir entre los procesos de argumentación y prueba de una conjetura desde ambos puntos de vista: el estructural y el del sistema de referencia, Pedemonte (2008) plantea una herramienta basada en la integración del modelo cK¢ (Balacheff, 1995, Balacheff y Margolinas, 2005) en el modelo de Toulmin (1958).

Modelo de Toulmin

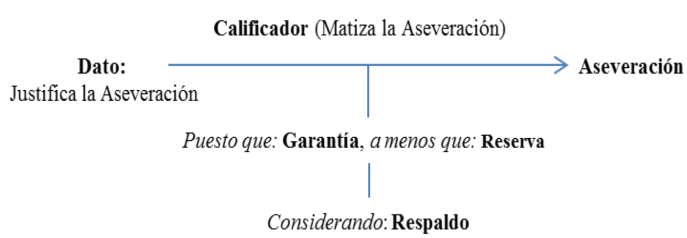
De acuerdo con el modelo de Toulmin, el primer paso de cualquier argumento está dado por la expresión de un punto de vista. En la terminología de Toulmin, el punto de vista inicial es llamado "Claim" (Afirmación o Aseveración). El segundo paso consiste en la producción de datos que le dan sustento a dicha afirmación: "Data" (Dato, en el esquema). Es importante también proveer una justificación o garantía para utilizar los datos que sustentan dicha afirmación: "Warrant" (Garantía), ésta puede expresarse como un principio o una regla y actúa como un "puente" entre los datos y la afirmación (ver Figura 1).

Figura 1. Modelo básico de argumentación de Toulmin



Lo anterior constituye la estructura base de la argumentación, pero podrían requerirse elementos auxiliares para describirla. Toulmin precisa tres de estos: "Qualifier" (Calificador), "Rebuttal" (Reserva) y "Backing" (Respaldo). La validez de la garantía puede debilitarse si existen excepciones a la regla, en tales condiciones, se insertan los casos de excepción o reservas. Entonces, también la fuerza de la afirmación se debilita por medio del calificador. Así mismo, se requiere un respaldo si la autoridad de la garantía no se acepta de manera directa (ver figura 2).

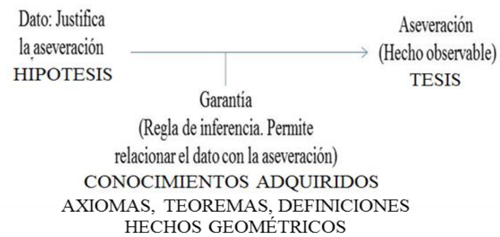
Figura 2. Modelo completo de Toulmin



Componentes del Modelo de Toulmin en abducción y deducción

La naturaleza del razonamiento llevado a cabo (abducción o deducción), ya sea en una prueba o en un argumento de conjetura o de justificación, determina el sentido de aparición de los elementos del diagrama de Toulmin (Ver Figura 3).

Figura 3. Modelo de Toulmin: Elementos equivalentes para abducción y deducción



En un razonamiento abductivo, dada una aseveración o hecho observable, se debe encontrar el dato que justifica o da evidencia a tal afirmación. En este caso, la garantía (formulada implícitamente en gran número de ocasiones) es el sustento teórico (o hecho geométrico) que permite esa relación. El equivalente utilizando la terminología de la prueba deductiva o de la demostración es: Dada una Tesis (lo que se quiere demostrar) es necesario encontrar la Hipótesis (lo que se supone) puesto que hay un Teorema u axioma (conocimiento teórico o hecho geométrico) que justifica esa relación. Cómo puede observarse, el sentido de aparición es el inverso al razonamiento deductivo: Dada una hipótesis (supuesto) y considerando ciertos Teoremas o axiomas (garantía), se obtiene la Tesis (lo que se quiere demostrar.

El análisis estructural - unidad cognitiva estructural - puede ser realizado con el modelo de Toulmin. La estructura es la conexión cognitiva lógica entre afirmaciones (la inducción, o la deducción). Hay una continuidad estructural entre la argumentación y la prueba si algunos pasos abductivos, deductivos o inductivos usados en la argumentación están presentes también en la prueba. De lo contrario, si la estructura de la argumentación es abductiva o inductiva y la prueba es deductiva, entonces hay una distancia estructural entre ambas. Por otro lado, se puede afirmar que existe continuidad referencial entre argumentación y prueba si algunas palabras, dibujos y teoremas usados en la prueba han sido usadas previamente en la argumentación que da soporte a la conjetura. (Pedemonte, 2008).

Según Pedemonte (2002, 2005) el modelo de Toulmin nos permite analizar el proceso de resolución de un problema como una concatenación de pasos de la argumentación constructiva (de la conjetura) a la argumentación estructural (de la prueba), pero no es suficiente para el objetivo de realizar un análisis cognitivo, por lo que se necesita una herramienta que permita considerar el sistema de referencia y los aspectos relacionados con los conocimientos del estudiante que están en juego durante la resolución del problema. Esta herramienta la ofrece el modelo cK¢.

Modelo ckc

El modelo cK¢ es una herramienta metodológica propuesta por Balacheff (1995, 2002, 2005) para el análisis de los conocimientos que movilizan los estudiantes en la resolución de un problema. En este modelo una concepción consta de:

P: un conjunto de problemas.

R: un conjunto de operadores.

L: un sistema de representación.

Σ: una estructura de control.

El ámbito de validez o de aceptación de la concepción (esfera de práctica), está formado por el conjunto de problemas que dicha concepción permite solucionar.

Un operador es todo aquello que permiten la manipulación de los elementos del sistema de representación, y por lo tanto la transformación de los problemas. Los operadores son visibles en las producciones y en los comportamientos de los estudiantes. Los operadores, al igual que las garantías, legitiman el paso entre datos y conclusión y se explicitan a menudo en la forma "si…entonces" (Pedemonte 2005).

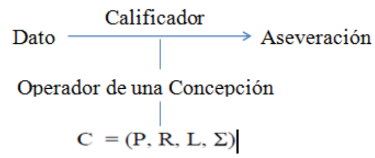
Un sistema de representación (lingüístico o no) permite la expresión tanto de los problemas como de los operadores. Las modalidades de representación tienen una gran diversidad: representaciones lingüísticas y no lingüísticas, eventualmente constituidas en registros semióticos.

Finalmente, una estructura de control organiza las funciones de elección, de decisión, de juicio de validez y de adaptación de la acción (Pedemonte, 2005). La estructura de control asegura la no contradicción de la concepción y contiene las herramientas de decisión sobre la legitimidad del uso de un operador o sobre el estado (solucionado o no) de un problema. Los controles reúnen decisiones, juicios, medios de elección, métodos, estructuras y organización de los operadores. Permiten las anticipaciones y posibilitan la construcción de planes.

Modelo de Pedemonte: el modelo cK¢ en el modelo de Toulmin.

Las concepciones de los estudiantes que permiten construir una conjetura constituyen la base de la argumentación. La concepción movilizada durante la construcción de un argumento puede entonces remplazar su soporte pues justifica la existencia misma del argumento. Como el soporte de un argumento corresponde a la concepción movilizada, entonces la garantía es uno de los operadores que constituyen la concepción (Pedemonte 2008). La estructura del modelo de Toulmin queda de la siguiente manera al integrar el modelo cK¢ en él (Fig. 4).

Figura 4. Integración del Modelo cK¢ al Modelo de Toulmin



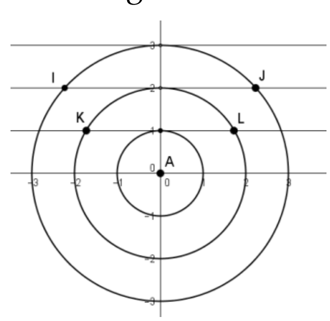
Metodología

El trabajo considerará una población de estudiantes de Nivel Medio Superior quienes estarán cursando el tercer semestre de bachillerato en el IPN (la edad oscila entre 16 y 17 años aproximadamente); en este semestre se estudia el curso de Geometría analítica. Para el estudio se considerarán problemas donde se construyan las curvas geométricamente y a partir de la apariencia observada, el estudiante elabore una conjetura sobre el lugar geométrico del cual se trata para que a través de un trabajo de argumentación, resultado de cuestionamientos por parte de la profesora, justifique su conjetura buscando obtener la ecuación de dicho lugar geométrico (prueba deductiva). Es importante indicar que hasta el momento, el trabajo se encuentra en la fase de adecuación de ciertos problemas rutinarios para su tratamiento como problemas de prueba utilizando Geogebra. Los instrumentos considerados son en una serie de prácticas a manera de preparación así como la aplicación de cuatro problemas finales con un cuestionario que brinde información específica sobre las respuestas. Se piensa tomar videograbaciones durante el proceso de resolución así como el análisis de los archivos de las construcciones recabadas.

A continuación se muestran dos ejemplos de problemas considerados hasta el momento.

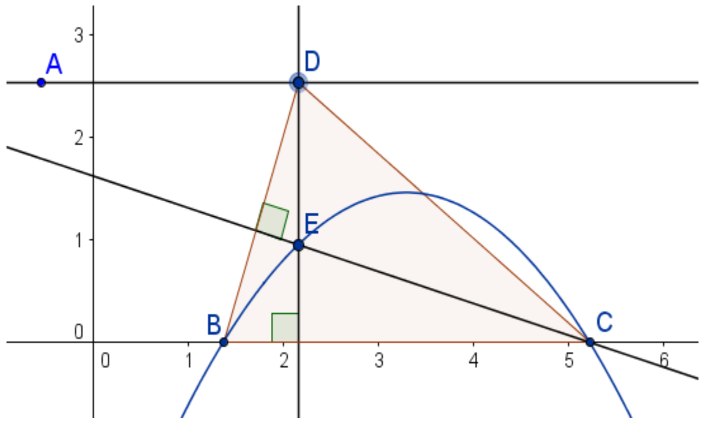
Problema 1. Construir tres circunferencias concéntricas en el origen del plano con radios 1, 2 y 3. En las intersecciones de estas circunferencias con el eje y, trazar rectas paralelas al eje x. Ubicar los puntos de intersección (restantes) de dichas rectas con las circunferencias. ¿A qué lugar geométrico pertenecen estos cinco puntos? ¿Por qué? Justifica tu respuesta (ver figura 5).

Figura 5



Problema 2. Dibuja una recta paralela al eje x. Ubica dos puntos sobre el eje x y un tercer punto sobre la recta paralela. Dibuja un triángulo uniendo estos tres puntos. Traza dos alturas a dos lados cualesquiera de dicho triángulo y ubica el punto donde se intersectan estas rectas. ¿Qué sucede con este punto de intersección (punto E) al mover el punto que se encuentra sobre la recta paralela (punto D)? ¿Cuál es el lugar geométrico que describe E? ¿Cómo justificarías tu respuesta de modo que no haya lugar a dudas? Ver figura 6.

Figura 6.



La intención de los problemas es observar si se logra obtener una prueba algebraica a partir de construcciones geométricas de las curvas de tal modo que el estudiante se percate que la ecuación cumple el papel de justificación final de la conjetura, la cual parte de una impresión visual. Es decir, se intenta ver cómo transita de un razonamiento abductivo a uno de tipo deductivo y los elementos que intervienen durante el proceso. Algo importante es lograr la construcción del lugar geométrico a partir de relaciones con objetos de geometría euclidiana para que las definiciones de los elementos o parámetros característicos de las curvas cobren sentido. También es importante que las preguntas detonantes del proceso argumentativo (entre profesor y estudiante) sean abiertas para intentar un tránsito progresivo a partir del análisis del estudiante.

Referencias Bibliográficas

Balacheff, N., Margolinas, C. (2005). cK¢ Modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques. En A. Mercier, C. Margolinas (Eds.), *Balises pour la didactique des mathématiques* (pp. 75-106). Francia: La Pensée Sauvage –Editions.

Balacheff, N. (1999). Is argumentation an obstacle? Invitation to debate…. *Preuve: International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof*. Recuperado de http://www.lettredelapreuve.org/OldPreuve/Newsletter/990506Theme/990506ThemeUK.html

Boero, P. (1999). Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. *Preuve: International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof*. Recuperado de http://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:http://www.lettredelapreuve.org/OldPreuve/Newsletter/990708Theme/990708ThemeUK.html&gws_rd=cr&ei=onaiVZqDNYfsoASf8ZPQCw

Díaz, D. J., & Zuluaga Duque, D. D. G. (2013). *De la producción de conjeturas a la demostración en un contexto de geometría sintética-analítica: El caso de la circunferencia.* (Tesis Doctoral, Universidad del Valle). Recuperado de http://bibliotecadigital.univalle.edu.co/xmlui/bitstream/handle/10893/4791/CB-478777.pdf?sequence=1.

Fiallo, J., Camargo, L., y Gutiérrez, A. (2013). Acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración en matemáticas. *Revista Integración,* 31(2), 181-205.

Pedemonte, B. (2007a). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics*, 66, 23–41.

Pedemonte, B. (2007b). Structural relationships between argumentation and proof in solving open problems in algebra. *Proceedings of the V Congress of the European Society for Research in Mathematics Education CERME 5*, pp. 643–652. Larnaca, Cyprus.

Pedemonte, B. (2008). Argumentation and algebraic proof. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 40(3), 385–400.