TEXTOS PRODUCIDOS POR ALUMNOS DE CUARTO GRADO DE PRIMARIA AL RESOLVER PROBLEMAS ELEMENTALES CON NÚMEROS ENTEROS

José Luis Mejía y Aurora Gallardo

Centro de investigación y de Estudios Avanzados (CINVESTAV) IPN

jose.luc.am@hotmail.com, agallardo@cinvestav.mx

En este artículo se presenta un avance de la investigación diseñada para estudiar la posibilidad de incluir algunos temas de números enteros ausentes en el currículo de primaria, dada la problemática existente en relación con la comprensión de este campo numérico. Se trata del análisis de los textos producidos por 16 niños de cuarto grado de primaria, en la fase inicial, que permite describir sus procesos cognitivos al enfrentar operaciones de adición y sustracción y problemas de orden, con dichos números, sin alguna instrucción previa. Este estudio se basa en el método cualitativo de investigación, usando como instrumentos el cuestionario y la entrevista en profundidad. El análisis de las ideas previas de los niños muestra su apego a los números naturales y a la relación de éstos con la vida cotidiana para hacer sentido de las situaciones propuestas con números enteros.

Palabras clave: números enteros, educación primaria, procesos cognitivos, orden, adición y sustracción.

Introducción

Destacadas investigaciones pertenecientes al campo de la matemática educativa han puesto de manifiesto diversas dificultades con el conocimiento de los números enteros estudiantes de educación secundaria. A pesar de que se han logrado avances en la didáctica de dichos números y que la investigación al respecto continúa creciendo, el problema sigue vigente. Esta situación aunada al hecho de que existen trabajos que muestran la competencia de los niños de cortas edades en el desarrollo del razonamiento con números enteros, abrieron la posibilidad de cuestionarnos en relación a la inclusión de características fundamentales de este campo numérico en el currículo de educación primaria, lo que permitiría acercar a los alumnos en este tema ríspido, tratando de hacerlo más comprensible para ellos en el futuro.

Nos proponemos en esta investigación:

1. Analizar las concepciones de los niños (de cuarto grado de primaria, 9-10 años) acerca de los números negativos antes de llevar a cabo un periodo de instrucción.

2. Conocer las vías de acceso a la comprensión de los números negativos, y los obstáculos a los que se enfrentaron los estudiantes de cuarto de primaria, después de una fase de instrucción.
3. Plantear las posibilidades de la inserción del tema de los números negativos en el currículo de educación primaria.

Nuestro estudio se fundamenta en el marco teórico-metodológico de los Modelos Teóricos Locales (MTL) y en el término semiótico de Sistemas Matemáticos de Signos (SMS), así como en nociones que se desprenden de éste: texto, espacio textual, y significado y sentido. Se trata de un estudio de tipo cualitativo con intervención didáctica, en la cual utilizamos como herramienta metodológica principal la entrevista individual, previa proposición de un cuestionario.

La investigación completa se compone de tres fases: obtención de ideas previas de los niños de cuarto de primaria en relación a los números enteros, mediante el diseño del cuestionario y entrevistas iniciales; construcción y desarrollo de una ruta didáctica a través de un periodo de enseñanza en el salón de clases y, análisis de los obstáculos y vías de acceso al conocimiento de los enteros; por parte de los alumnos posterior a la fase didáctica.

Investigaciones previas

Gallardo (2002) realiza una investigación de tipo histórico epistemológico donde, entre otros hechos, destaca las dificultades que los alumnos enfrentan al resolver problemas verbales con números enteros y en la aceptación de las soluciones negativas y muestra la necesidad de los adolescentes de recurrir a una explicación “realista” para aceptar dichas soluciones. Asimismo, Bruno y Martinón (1997) se refieren a la solución de problemas verbales, pero enfocándose en las estrategias y procedimientos de resolución para descubrir cómo los alumnos frecuentemente se aferran al dominio numérico de los naturales. Además, Peled (1992) propone niveles de conocimiento de los enteros en dos dimensiones a las cuales llama de cantidad y de recta numérica. Pone al descubierto los bajos niveles de desempeño mostrados por los jóvenes, de hecho, ellos pueden colocarse en los dos primero niveles de la recta y los primeros tres niveles de la cantidad de cuatro niveles existentes.

También analizamos trabajos recientes respecto al tema por parte de niños pequeños de entre 6 y 10 años de edad (Bishop, Lamb, Philipp, Whitacre, Schappelle & Lewis, 2014; Bofferding, 2014). Bishop et al. (2014) realizan una investigación histórica epistemología en relación a los números enteros poniendo de manifiesto algunas similitudes entre los obstáculos enfrentados por los autores que ahí mencionan y los niños de hoy al resolver problemas de tipo numérico. No sólo encontraron dificultades, sino hallaron formas creativas de pensamiento para resolver problemas que también coinciden con las usadas por los matemáticos del pasado. Estos autores descubrieron significativos retos conceptuales en la introducción de los números negativos, por parte de los alumnos, agrupándolos en tres obstáculos persistentes: una visión del número usado para representar algo concreto y contable en conflicto al requerimiento de representar números "menores que nada", intentar quitar más de lo que se tiene y las contradicciones en cuanto a las ideas de los niños respecto a las formas en que funcionan la adición y sustracción de números naturales.

Bishop et al. (2014) mencionan además tres formas correctas de razonamiento usadas por los niños, las cuales les permitieron resolver algunos problemas con números negativos, y que fueron registradas en la historia por diferentes matemáticos. En la primera, los niños aprovecharon la naturaleza ordinal y secuencial de los enteros; en la segunda, el razonamiento de los niños pertenece al principio de permanencia algebraico, el cual significa que las fórmulas válidas en el sistema de los números naturales deben permanecer también válidas en los sistemas numéricos extendidos (Hefendehl-Hebeker, 1991). Por último, en la tercera, se considera la idea de magnitud, utilizada productivamente. Estas tres formas de pensamiento de los alumnos resultan importantes para nuestro estudio en la construcción de la ruta didáctica (Gallardo & Basurto, 2013) constituida por trayectorias hipotéticas de aprendizaje utilizada para observar los procesos cognitivos y la competencia lograda por los niños en la resolución de problemas.

Bofferding (2014) lleva a cabo un estudio con niños de primer grado (6 años aproximadamente) para estudiar los efectos de una instrucción sobre los modelos mentales de los alumnos en relación a la conceptualización de los enteros utilizando tres categorías: valor numérico, orden y magnitudes dirigidas. Para ello analiza qué tanto cambiaron sus modelos mentales del pre-test al post-test en cada categoría. La autora descubre que al comienzo los niños confían demasiado en los principios de los números naturales para entender los enteros negativos, sin embargo, después de un período de instrucción, una cantidad significativa de estudiantes logró evolucionar sus modelos mentales del inicial al sintético y llegar el modelo formal.

Bofferding (2014) señala que los estudiantes con modelos mentales iniciales usan reglas de los enteros positivos, a través de sus experiencias directas con el mundo; los de un modelo sintético asimilan la nueva información mientras permanece su estructura cognitiva actual y, los de un modelo formal reorganizan exitosamente la nueva información alineada con las formas matemáticas canónicas de la cultura. También estudia el papel que juega la comprensión de los dos significados del signo *menos* en su desarrollo hacia el entendimiento de los números negativos, para ello crea tres grupos instruccionales: instrucción unaria, instrucción binaria e instrucción combinada. En este estudio se señala la importancia de trabajar el signo *menos* en su forma unaria, pues el grupo "instrucción unaria" dio los mejores resultados. Ningún estudiante de este grupo exhibió el uso de modelos mentales iniciales en el post-test aunque la mayoría lo hizo en el pre-test. El grupo de instrucción binaria fue el que mostró más modelos mentales iniciales.

Gallardo (2002) pone de manifiesto la génesis algebraica de los números negativos en la cultura china (400 a. c.) donde se realizaban cálculos sobre un tablero con números barra, utilizando varillas de color rojo para representar los números positivos y, de color negro, para los números negativos. El método para realizar cálculos con estos números era aplicable no sólo a problemas particulares sino que podía generalizarse a conjuntos de problemas. Mediante un arreglo matricial, semejante al actual, los chinos pasaron del lenguaje retórico al lenguaje notacional, permitiéndoles resolver problemas prácticos por medio de sistemas de ecuaciones lineales. Los números negativos, cobraron sentido en el contexto de la resolución de ecuaciones. También, Gallardo (1994) señala que la aceptación de la solución negativa fue un paso decisivo en el reconocimiento y aceptación de los números negativos. Según esta autora, la principal dificultad que enfrentaron los matemáticos medievales, en la resolución de problemas concretos, fue la interpretación de las soluciones negativas.

Asimismo, Freudenthal (1983) afirma que el origen de los números negativos es el álgebra de ecuaciones. Los métodos de solución de las ecuaciones se fueron desarrollando y automatizando gradualmente y a medida que la automatización progresaba, se pensó en extender su domino de validez, de tal manera que las ecuaciones pudieran resolverse bajo todas las circunstancias. Específicamente fueron las ecuaciones cuadráticas las que crearon la necesidad de hallar la solución de x bajo todas las circunstancias.

El origen algebraico de los números negativos nos condujo a revisar trabajos relacionados con el álgebra temprana (*early algebra*). En la investigación de Butto y Rojano (2004) se desarrollan ideas algebraicas no formalizadas en los niños (de entre 6 a 8 años) respecto al razonamiento proporcional y a los procesos de generalización. Los resultados del estudio son alentadores, e indican la capacidad de los alumnos en su avance hacia un pensamiento algebraico y nos condujeron a preguntarnos si los alumnos pueden acceder al tema de los números negativos, y en qué forma lo harían, además qué obstáculos enfrentarían al trabajar este contenido escolar.

Fundamento teórico

Nuestro trabajo se fundamenta en el marco teórico-metodológico del Modelo Teórico Local (MTL) (Filloy, 1999; Filloy, Puig & Rojano, 2008). Estos autores señalan que los fenómenos de la matemática educativa deben estudiarse desde cuatro componentes interrelacionados: la competencia, la enseñanza, los procesos cognitivos y la comunicación. El modelo describe, explica y predice los fenómenos ocurridos en los procesos de enseñanza y aprendizaje sin excluir la posibilidad de una diferente descripción, explicación y predicción de parte de otros modelos. Su carácter local reside en el hecho de que se elabora para explicar los fenómenos producidos en los procesos de enseñanza-aprendizaje de unos contenidos matemáticos concretos y se pretende que sólo se adecuado para esos fenómenos.

Respecto a los procesos cognitivos, Filloy (1999) y Filloy et al. (2008) señalan la existencia de tendencias debido a las estructuras cognitivas del sujeto, que aparecen en cada etapa de su desarrollo individual, y que le permite usar diferentes estrategias para resolver problemas. Dichas tendencias cognitivas pueden entenderse como hechos que siempre se presentan cuando en una situación de enseñanza se está tratando de pasar de un estrato de lenguaje más concreto a uno más abstracto. En cuanto al modelo de competencia, éste debe explicar y predecir la conducta de un sujeto ideal, que conoce el conjunto de las matemáticas socialmente establecidas en un momento histórico determinado. Afortunadamente, basta con que el observador cuente con un modelo formal descrito en un Sistema Matemático de Signos (SMS) más abstracto que el utilizado por los sujetos observados que permita descodificar todos los textos que se producen en el intercambio de mensajes en el que los actores tienen diversos grado de competencia de uso de los SMS utilizados (Filloy, 1999).

Es importe mencionar que el SMS es una herramienta para analizar los textos producidos por los estudiantes cuando se les está enseñando matemáticas. Esta idea implica estudiar los fenómenos didácticos desde un enfoque semiótico más que lingüístico. El término SMS acepta el hecho de que en textos, matemáticos o no matemáticos, no existen signos individuales. La distinción entre unos y otros deja de ser decisivo desde el punto de vista de los procesos de significación. Lo que interesa al análisis semiótico de las producciones de los alumnos es el sistema de signos tomado como un todo y lo que debe ser descrito como matemático es el sistema y no lo signos, porque es el sistema el responsable del significado de los textos (Filloy, 1999; Filloy et al., 2008).

En este sentido es importante considerar la diferencia entre los términos *texto* y *espacio textual* que se relacionan dialécticamente y que se corresponden a las expresiones *significado* y *sentido*. Los textos no deben identificarse con los textos escritos, sino como "el resultado de la lectura/transformación realizada sobre un espacio textual" (Talens & Company, 1984, p. 32). Así, el espacio textual es un sistema que impone una restricción semántica en la persona que lo lee y los textos como una nueva articulación de ese espacio textual. El objetivo de la lectura/transformación no es extraer o descifrar un significado inherente a éste, sino producir sentido. El nuevo texto estará en la posición de espacio textual para un nuevo lector (Filloy, et al., 2008).

El método

Realizamos una investigación de tipo cualitativo con estudio de casos. Esta clase de investigación se interesa por entender los fenómenos sociales desde la propia perspectiva del actor. Respecto al estudio de casos, a través de la observación se posibilita analizar intensamente el fenómeno diverso que constituye la unidad individual con la mira de establecer generalizaciones acerca de la más amplia población a la que pertenece (Cohen & Manion, 1990).

Nos interesa describir en detalle la competencia y los procesos cognitivos de los estudiantes, dando así preminencia a estas componentes del MTL. En este trabajo, consideramos a los mismos investigadores como los sujetos competentes quienes poseen un grado mayor de competencia formal que la de los sujeto de estudio. Además para analizar la competencia-actuación de los alumnos frente a problemas con números negativos, recurrimos al concepto de "flexibilidad de la negatividad" (Vlassis, 2004) y los sentidos de uso de los números negativos (Gallardo, 2002). Según Vlassis (2004) volverse flexible en la negatividad significa utilizar el "signo menos" en sus significados estructurales y operacionales. Haremos énfasis en el uso del signo menos en su naturaleza unaria y binaria. Por su parte Gallardo (2002) indica que los sujetos que extienden el dominio numérico de los naturales a los enteros entienden los negativos en sus sentidos de uso sustractivo, relativo, signado y aislado.

El análisis de la competencia y de los procesos cognitivos de los estudiantes pre y post período de enseñanza, considerará el origen epistemológico de los números negativos, en tanto obstáculos en su comprensión, tales como los planteados en los trabajos de Bishop et al. (2014): el número como expresión de cantidad, la suma como aumento, la resta como disminución, el orden en los negativos es el mismo que el orden natural. Dichos temas pueden resumirse en valor, orden y operaciones de suma y resta.

El estudio empírico

Constituyen los sujetos de estudio un grupo de 16 niños de cuarto grado (entre 8 y 9 años) y la profesora titular del grupo. Se llevó a cabo la experimentación en una escuela primaria, turno vespertino, ubicada en el Distrito Federal.

En este estudio utilizamos como instrumentos metodológicos principales el cuestionario y la entrevista. Usamos la entrevista cualitativa en profundidad (Taylor & Bogdan, 1990), aquella de naturaleza dinámica y flexible, no estructurada, en la que el protocolo es sólo una guía no limitando el diálogo profundo con los sujetos.

El cuestionario y el protocolo de entrevista fueron puestos a prueba con sujetos diferentes a los del estudio, pero de las mismas edades y formación académica. Después de esta prueba, el cuestionario propuesto tanto a los estudiantes como a la profesora, quedó con 35 ítems referidos a los siguientes temas de los números enteros: valor numérico y orden, recta numérica, problemas de enunciado verbal y operaciones de adición y sustracción. El protocolo de entrevista incluye los mismos temas que el cuestionario, pero se sustituyeron algunos problemas y se aumentaron otros considerados pertinentes. La sesión de entrevista, de 40-50 minutos, se llevó a cabo con un niño de bajo desempeño en el cuestionario y en el grupo, ya que esto nos permitirá encontrar un punto de partida en la ruta didáctica posteriormente utilizada.

Resultados de la fase inicial

En este documento presentamos los procesos cognitivos de los alumnos respecto de los números negativos obtenidos del cuestionario y las entrevistas individuales de la fase inicial.

En seguida se presentan en Tablas los ítems más representativos de cada uno de los temas en relación a los números enteros, así como los procesos cognitivos exhibidos por los alumnos de cuarto grado de primaria, al darles solución.

Tabla 1

Valor numérico y orden

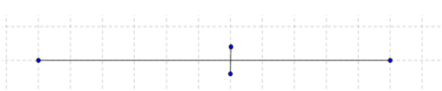
Ítem	Comentarios de las estrategias más frecuentes
Escribe el número más chico que conozcas	El límite del dominio numérico de estos alumnos es el 0 y para algunos, el 1. Este último hecho nos indica que para ellos el 0 no es un número o no lo conocen.
En cada inciso escribe los números que siguen a) 12, 9, 6, 3, __. b) 10, 8, 6, 4, __, __, __. c) 5, 4, 3, 2, __, __, __, __.	Varios alumnos llenaron el espacio faltante con 0 o 1. Otros escribieron ceros o dejaron los espacios en blanco. También escribieron una cantidad ascendente de ceros (uno, dos, tres o más ceros). Un alumno respondió correctamente el inciso b).
Para cada inciso subraya el número que sea más grande. Pon un signo = si las cantidades son iguales. a) 3 -7 b) -5 -15 c) 8 -8 d) -4 -4	Algunos alumnos ignoran el signo unario. Otros responder correctamente al comparar dos números negativos iguales. Observamos que los niños consideran estos números como naturales. Aunque muchos alumnos respondieron bien el inciso d), ello puede deberse sólo a la igualdad de los símbolos. Un alumno respondió bien todos los incisos.
Escribe los números que faltan en la siguiente recta numérica.  1	Hay alumnos que colocaron correctamente los números a la derecha del 1. Otros, no colocan el cero a la izquierda del 1. Hubo quienes reflejaron los números naturales a la izquierda del 1. Además, algunos dejaron vacías las marcas o repitieron números en forma decreciente. Sin embargo, ningún estudiante colocó el cero, además de que tampoco conocen el orden de los enteros en dicha recta.

Tabla 2

Problemas de enunciado verbal

Ítem	Comentarios de las estrategias más frecuentes
Resuelve y escribe las operaciones que dan solución a los siguientes problemas. - En una ciudad la temperatura se encontraba a 9 grados por la tarde, para la noche bajó 17 grados. ¿A qué temperatura se encontraba en la noche? - En una película de guerra, un submarino estaba a 30 metros bajo el nivel del mar y luego bajó 23 metros. ¿A qué profundidad estaba finalmente el submarino?	En ambos problemas ningún alumno escribió la operación utilizada y casi 50% de los alumnos no resolvieron los problemas, además, las soluciones correctas e incorrectas pertenecen al campo de los números naturales y las soluciones correctas, además en el ámbito contextual. Primer problema: algunos alumnos usaron el cero como respuesta, con lo cual advertimos que para ellos no existen cantidades menores que cero o bien que equiparan los negativos con el cero. Segundo problema: un alumno usó la sustracción y suponemos que se debió al contexto.
Escribe un problema donde se usen cada una de las siguientes operaciones. a) -16 + 25 = b) + 24 + + 36 =	La mayoría de los alumnos se limitan a resolver correctamente las operaciones ignorando los signos unarios, usando los números como naturales, en el inciso a) consideran al negativo en su sentido de uso de número sustractivo. Algunos convierten los signos unarios en binarios, agregando números y resolviendo también correctamente la nueva expresión. Otros redactan una situación en contexto tomando los números como si fueran naturales.

Tabla 3

Adición y sustracción de números enteros

Ítem	Comentarios de las estrategias más frecuentes
Escribe en el cuadrito vacío el número que falta para que la operación sea correcta $6 + \boxed{} = 4$.	Algunas respuestas fueron trazar una raya (-) sobre el cuadrito y consideramos que ello no equivale a dejar sin resolver la operación; otros alumnos escribieron 0 o 1, lo cual nos indica que el número más chico les sirve a los alumnos a "no aumentar la cantidad", y varias escolares trasformaron la adición en sustracción, lo cual mostró que para ellos es absurda esta operación. Sólo un alumno dio respuesta correcta a la primera sustracción.
$-11 + -6 = \boxed{}$ $-5 + 2 = \boxed{}$ $0 – 2 = \boxed{}$ $3 – 4 = \boxed{}$	Hubo alumnos que ignoraron los signos unarios y resolvieron las operaciones como adición con naturales. Otros restaron los valores absolutos y escribieron positivo o negativo el resultado, pues el signo *menos* los condujo a resolver las operaciones como sustracción (número sustractivo), y un alumno usó el signo negativo en el resultado (número aislado). La solución de algunos alumnos estuvo basada en una lectura de derecha a izquierda. En otros, en la idea de "quitar todo lo que se puede". Hubo una solución para la primera sustracción.

Tabla 4

Adiciones y sustracciones (preguntas)

Ítem	Comentarios de las estrategias más frecuentes
- ¿Cuál es el número que sumado a 5 resulta 2? - ¿Cuánto es 0 menos 5?	Las respuestas dadas a estas preguntas confirman los procesos cognitivos mostrados en las operaciones numéricas, recurriendo al campo de los números naturales. Para la primera pregunta, la mayoría convierte la adición en sustracción, otros restan o suman ambos números. Para la segunda, mucho alumnos realizan una lectura de derecha a izquierda, dando como respuesta 5; otros, respondieron: 0, debido a la idea "no se puede quitar más de lo que se tiene". Hubo dos respuestas correctas (-3 y -5) y suponemos que se debió al lenguaje verbal utilizado en el planteamiento de los problemas.

Tabla 5

El signo unario "menos" en situaciones en contexto

Ítem	Comentarios de las estrategias más frecuentes:
Representa con un número las siguientes situaciones - La temperatura en la ciudad de Chihuahua es de "10 grados bajo cero" :___ - El Sr. Juan "perdió 1000 pesos" en una apuesta: __	Ambos ítems fueron las más desconcertantes para los alumnos, más aún en el contexto de las "deudas". Primer problema: algunas respuestas fueron escribir nuevamente el número (10), usar el símbolo de grados (10°), entrecomillar el número ("10") o resolver la operación 15 – 5, cuyo resultado es 10 y sólo un alumno escribió la respuesta correcta (-10°). Segundo problema: varios alumnos escribieron nuevamente el número, otros colocaron el símbolo de pesos ($1000) o dieron 0 como respuesta. No hubo ninguna respuesta correcta.

Comentarios finales

De acuerdo con los resultados del análisis de los procesos cognitivos de los alumnos de cuarto grado de primaria, éstos no mostraron competencia en el manejo de los números negativos; pero todos ellos tendieron a otorgarles sentido a los problemas enfrentados, basándose en sus experiencias con los números naturales en la escuela. Es notable que un alumno mostrara un grado de competencia mayor al de sus pares al resolver correctamente algunos problemas con negativos.

La mayoría del grupo mostró el sentido de uso del número negativo en su carácter de sustractivo, en detrimento de su naturaleza relativa y aislada. Esto se observó, por ejemplo, en la resolución de las sustracciones 0 – 2 y 3 – 4 donde los niños recurrieron a la lectura de derecha a izquierda. El desconocimiento de los otros sentidos de uso del negativo no les permitió resolver los problemas en la recta numérica, los de enunciado verbal, ni los de representar una situación "real" con un número entero, donde se requiere la idea de opuestos. Sólo un alumno manifestó el sentido del uso aislado del número negativo, y encontró que el resultado de restar 0 menos 5 es -5.

La falta de flexibilidad en el uso del signo menos condujo a los estudiantes a cometer errores en la resolución de adiciones y sustracciones numéricas. Puede deducirse que los niños no tienen experiencia escolar con los números negativos o al menos la idea de opuestos presente en situaciones cotidianas. Esto los llevó a mostrar algunas concepciones consideradas como obstáculos, enfrentados por los matemáticos del pasado en la aceptación de esos números. Por ejemplo, la operación $6 + \square = 4$, fue las más desconcertante para ellos porque “la adición no puede disminuir la cantidad”. Otra respuesta: “si la temperatura se encuentra a 9 grados y baja 17 grados, ahora se encuentra a 0 grados”, exhibe la idea de que “no existen números menores que la nada”.

Referencias

Bishop, J., Lamb, L., Philipp, R., Whitacre, I., Schappelle, B. & Lewis, M. (2014). Obstacles and affordances for integer reasoning: an analysis of children´s thinking and the history of mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 45*(1), 19-61.

Bofferding, L. (2014). Negative integer understanding: characterizing first graders´ mental models. *Journal for Research in Mathematics Education, 45*(2), 194-245.

Bruno, A. & Martinón, A. (1997). Procedimientos de resolución de problemas aditivos con números negativos. *Enseñanza de las Ciencias, 15(2),* 249-258.

Butto, C. & Rojano, T. (2004) Introducción temprana al pensamiento algebraico: abordaje basado en la Geometría. *Educación Matemática, 6*(1), 113-148.

Cohen, L. & Manion, L. (1990). *Métodos de investigación educativa*. Madrid: La Muralla.

Filloy, E. (1999). *Aspectos teóricos del Álgebra educativa*. México, DF: Grupo Editorial Iberoamericana.

Filloy, E., Puig, L. & Rojano, T. (2008). *Educational algebra. A theorical and empirical approach*. New York: Springer.

Freudenthal, H. (1983). Negative numbers and directed magnitudes. In Didactical phenomenology of mathematics structures (pp. 432-460). Dordrect, The Netherlands: Reidel.

Gallardo, A. (1994). *El status de los números negativos en la resolución de ecuaciones algebraicas*. Tesis de doctorado no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Gallardo, A. (2002). The extention of domain number of the natural of the integres. *Journal for Research in Mathematics Education*, *21*(2), 132-144.

Gallardo, A. & Basurto, E. (2013). Los parámetros de las funciones polinomiales. Una experiencia con Geogebra en el bachillerato. En T. Rojano (Ed.). Las *tecnologías digitales en la enseñanza de las matemáticas.* (pp. 83-103). México: Trillas.

Hefendel-Hebeker, L. (1991). Negative numbers: Obstacles in their evolution from intuitive to intellectual constructs. *For the Learning of Mathematics. II* (1), 26-32.

Peled, I. (1992). Levels of knowledge about signed numbers: efects of age and ability. *Proceedings of the 15th International Conference of PME,* Assisi (Italia), 145-152.

Talens, J. & Company, J.M. (1984). The textual space: On the notion of text. *Journal for Research in Mathematics Education*, *17*(2), 24-36.

Taylor, S. & Bogdan, R. (1990). *Introducción a los métodos cualitativos de investigación.* Barcelona: Paidós.

Vlassis, J. (2004). Making sense of the minus sign or becoming flexible in “negativity”. *Learning and instruction. 14*, 469-484.