

DISEÑO, DESARROLLO Y PRUEBA DE UNA HERRAMIENTA AD HOC PARA EL SENTIDO DE LA ESTRUCTURA EN ÁLGEBRA

Valentina Muñoz Porras, Teresa Rojano Ceballos
Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV
valentina.munoz@gmail.com, rojanot@gmail.com

En álgebra de bachillerato, una vez salvadas las dificultades clásicas del paso de la aritmética al álgebra, todavía quedan por salvar las dificultades del reconocimiento de las estructuras típicas de expresiones algebraicas en la resolución de problemas. Presentamos el diseño, desarrollo y prueba un entorno virtual que hemos denominado Máquina de Expresiones (ME) el cuál está orientado específicamente a ayudar a los estudiantes a adquirir el sentido de la estructura en álgebra. El marco teórico que adoptamos es una vertiente de la Teoría de la Actividad (TA) que ha sido desarrollada dentro de la disciplina denominada Human-Computer Interaction (HCI). Se presenta un estudio exploratorio con siete estudiantes orientado a validar la utilidad y usabilidad de la ME, se analizan las interacciones de los estudiantes con la ME y se comparan las producciones de un pre-test con las del post-test.

Palabras claves: álgebra, bachillerato, uso de tecnología, sentido de la estructura.

Introducción y justificación

Hoch y Dreyfus (2007) definieron *structure sense* como un conjunto de habilidades que involucran 1) reconocer una estructura familiar en su forma más simple; 2) tratar con un término compuesto como una entidad única y, a través de una sustitución adecuada, reconocer una estructura familiar dentro de una forma más compleja; y 3) elegir manipulaciones apropiadas para hacer un mejor uso de la estructura.

Las aportaciones de Hoch y Dreyfus son principalmente dos: 1) formalizaron el problema del sentido de la estructura en álgebra y 2) diseñaron un conjunto de tareas que pusieron en práctica mediante entrevistas clínicas para investigar este problema. Las tareas que ellos diseñaron, si bien tienen una componente didáctica, no se pueden utilizar fácilmente en el aula pues están pensadas para usarse en entrevistas con instrucción.

Nosotros decidimos continuar esas investigaciones sobre sentido de la estructura, pero incorporando el uso de tecnología. Así que el proyecto que nos planteamos fue el de diseñar, desarrollar y poner a prueba un entorno virtual de aprendizaje ad hoc para la enseñanza del sentido de la estructura. Los usuarios objetivo son los estudiantes de bachillerato que ya saben álgebra.

Las preguntas de investigación que guiaron este proyecto de doctorado fueron las siguientes:

1. ¿Es la exposición a los métodos de sustitución y cambio de variable una estrategia eficaz para la enseñanza del sentido de la estructura a estudiantes de bachillerato que ya saben álgebra?
2. ¿Qué características debe tener un entorno virtual de aprendizaje de acuerdo a los principios actuales de la Teoría de la Actividad y el HCI, para apoyar al

alumno en la adquisición del sentido de la estructura en álgebra a través de la sustitución?

3. ¿Cómo deben diseñarse, según la Teoría de la Actividad y el HCI aplicadas a la educación matemática, los niveles de dificultad en una herramienta virtual ad hoc de aprendizaje orientada a la enseñanza del sentido de la estructura en álgebra y restringida a los productos notables?
4. ¿Es posible, por medio de *affordances* y *feedback*, guiar al estudiante hacia las acciones necesarias para completar las tareas orientadas a desarrollar su sentido de la estructura?

Antecedentes

Arcavi (1994) define el sentido del símbolo en matemáticas de forma operativa enlistando un conjunto de habilidades observadas en los expertos. En el caso particular del álgebra, Arcavi comenta que a la mayoría de los estudiantes de bachillerato les hace muy poco sentido los símbolos algebraicos, y esto a pesar de que han recibido instrucción algebraica por varios años.

En cuanto a los errores típicos de los estudiantes de álgebra escolar, Kirshner (2004) presentó evidencia de que los estudiantes responden espontáneamente a los patrones visuales de las expresiones, independientemente de las reglas declarativas. Con ello sugiere que los errores típicos reflejan la preponderancia de los aspectos visuales sobre el conocimiento declarativo en muchos estudiantes.

Por otro lado, Anna Sfard y L. Linchevski (1994) documentaron la persistencia de los estudiantes de mantenerse dentro del aspecto procedimental del álgebra. Su tesis principal es: la concepción operacional del álgebra es dominante. (Los estudiantes tienden a interpretar las expresiones algebraicas como procesos de cálculo.) Sin embargo, eventualmente llega la reificación. Para Sfard, la reificación es un proceso no controlado de la eventual emergencia de un concepto en la mente del aprendiz, como un resultado de la aplicación repetida (entrenamiento) de un procedimiento (algoritmo). Eventualmente el procedimiento se convierte en un objeto, algo sobre lo cual se puede reflexionar.

Finalmente, desde el punto de vista didáctico la cuestión es ¿cómo facilitar al estudiante el paso de novicio a experto? Una de las respuestas es: mediante tecnología. Sin embargo, sobre el uso de la tecnología en álgebra, la mayoría de los estudios de matemática educativa privilegian el uso de herramientas universales (hojas de cálculo, software de geometría dinámica, calculadoras Texas Instruments – TI). Pero, para poder utilizar herramientas universales para la enseñanza, es necesario diseñar hojas de trabajo con actividades para guiar a los estudiantes a entender algún concepto matemático --lo cual pone la carga de la enseñanza sobre el profesor.

Esto contrasta con los juegos serios orientados a la enseñanza, como DragonBox donde las actividades o tareas están incorporadas en el juego. Es por eso que los dispositivos móviles (*smartphones, tablets*) con sus múltiples aplicaciones (*apps*) están presionando para dejar las TI en la prehistoria. Como ha dicho Truche y Drijvers (2010):

La modelación del aprendizaje de las matemáticas como un reto o como un juego (Brousseau, 1997), donde el alumno construye su conocimiento al participar en el juego, es lo usual en nuestra comunidad de investigación. Por lo general, sin embargo, el profesor diseña el juego, sus reglas y su gestión. En el caso de los juegos serios, el juego y sus reglas se diseñan fuera de las escuelas. En los tempranos años de las calculadoras, los educadores tenían que pensar en la integración de estos HHT (*handheld-technologies*) en las aulas; en la actualidad, deberíamos quizá considerar seriamente la integración de los juegos serios en la escuela, lo cual podría ser considerado como HHA (*handheld-activities* -- actividades de mano), debido a su apropiación muy natural. Un cambio de enfoque desde las tecnologías hacia las actividades requiere un replanteamiento de las formas de instrumentalización y orquestación. (p. 680)

Como se sabe Truche y Drijvers forman parte de la escuela francesa que teorizó (mediante su teoría de la Génesis Instrumental) la experiencia francesa de la década de los 90's sobre el uso de la TI en la educación matemática en Francia. En el artículo recién citado reconocen la importancia de los juegos serios y la obsolescencia de las calculadoras como artefactos para la enseñanza de las matemáticas. Artigue (2002) documentó las complicaciones de la génesis instrumental con las TI y, sobre todo, el tiempo excesivo de la apropiación del artefacto. En palabras de Lagrange (2003):

Los artículos innovadores o de investigación así como el curriculum enfatizan las poderosas potencialidades de las tecnologías de la información y la comunicación para la enseñanza de las matemáticas en todos los niveles. Sin embargo, su integración en el aula parece ser más difícil de lo que se esperaba. (2003, p. 1)

Por lo anterior --y por otras razones-- nosotros decidimos experimentar con un desarrollo ad hoc inspirado en los juegos serios y las aplicaciones *touch*, donde el tiempo de instrumentación es virtualmente cero.

Marco Teórico

Creemos que lo que está en el fondo en el reconocimiento de la estructura es una técnica que se usa en el cálculo denominada cambio de variable (y sustituciones diversas en el álgebra avanzada). Esto es a lo que Freudenthal (1983) llama la sustitución algebraica y a la cual considera como la tarea algebraica por excelencia.

En una expresión algebraica, si dos símbolos son equivalentes, entonces uno puede ser reemplazado por el otro. A esto se le llama principio de sustitución algebraica. Se puede reemplazar una variable con una expresión o viceversa (Freudenthal, 1983, p. 483; Kindt, 2010, p. 149).

Por otra parte, respecto a la forma en que podría adquirirse el sentido de la estructura por el aprendiz del álgebra, hemos recurrido a algunos conceptos del segundo Wittgenstein (1988) –en su teoría de cómo el significado surge en el uso y en la actividad, en prácticas socialmente compartidas en una comunidad. Pero, asociados al concepto del significado como uso están sus conceptos de entrenamiento, seguir la regla y *ver-como* (Huemer, 2006).

Para el diseño y evaluación de la Máquina de Expresiones (ME) se utilizó la Teoría de la Actividad en su vertiente de HCI, con especial énfasis en *affordances*.

Según Kuutti (1996), una actividad es una forma de hacer dirigida hacia un objeto y las actividades se distinguen unas de otras por sus objetos (objetivos):

Una Actividad, en otras palabras, consiste en una persona o personas haciendo algo hacia algún fin. El aprendizaje, en consecuencia, está fuertemente ligado a este hacer, el fin a llevar a cabo en este hacer, las herramientas utilizadas en el hacer y el sistema social en el que el hacer se lleva a cabo. Las tecnologías de aprendizaje, de acuerdo a la teoría de la actividad, no son un medio que transmite el conocimiento a un usuario, sino más bien una herramienta que da estructura y media el aprendizaje a través de la actividad. La TA ve las tecnologías de aprendizaje no como "máquinas de enseñar", sino como un "sistema de apoyo" para aprender haciendo. El aprendizaje no sólo se lleva a cabo mediante la observación, sino también por el hacer, y las tecnologías de aprendizaje sirven para apoyar y estructurar ese quehacer. (DeVane, B., & Squire, K. D. 2012, p. 242)

Con este marco teórico redefinimos el sentido de la estructura en álgebra en términos de acciones. Un estudiante muestra sentido de la estructura en álgebra si hace una combinación de las siguientes acciones con el objetivo de resolver una tarea de manipulación algebraica de forma eficiente:

- Reconocimiento de estructuras, por ejemplo, de los productos notables.
- Ver-como. Cambiar (*switchear*) entre diversas formas de ver la ecuación o expresión para sacar provecho de las estructuras. En particular, escapar de la perspectiva proceso y aprender a ver subexpresiones como un objeto o entidad.
- Sustitución, ya sea interna o explícita.

- Aplicación oportuna de identidades conocidas.

La ME presentada aquí es una aplicación web que desarrollamos para que los usuarios, a través de la experimentación y la práctica, aprendan las reglas que utiliza la máquina para generar los ejercicios y, con el tiempo, adquieran sentido de la estructura. La ME tiene incorporadas las reglas del álgebra escolar incluidas la sustitución algebraica y la equivalencia de expresiones.

En contraste con el uso de herramientas universales para la enseñanza, en el cual el diseño de las tareas por parte del profesor es crítico, la ME ya tiene las tareas incorporadas en forma de ejercicios o niveles en escenarios y, en consecuencia, en la exploración libre de la ME por parte del aprendiz, el riesgo de que esa exploración sea improductiva se reduce a un mínimo.

Con la ME, nuestro objetivo es que los estudiantes adquieran fluidez con las acciones asociadas a la sustitución algebraica y que logren convertirlas en operaciones (acciones rutinizadas) de manera que puedan utilizarlas fuera de la ME.

El estudiante interactúa con la ME ya sea configurándola (definiendo la función generadora) o anticipando las expresiones que arrojará la máquina con una configuración dada. El objetivo del estudiante es el de resolver cada nivel de cada escenario. Para poder resolver los ejercicios propuestos en la ME, los estudiantes realizarán una combinación de las acciones mencionadas arriba, junto con otras operaciones básicas para navegar e interactuar con la máquina (presionar botón, por ejemplo). Algunas de estas acciones las realizará el estudiante fuera de la ME ya sea internamente (en su cabeza) o bien en lápiz y papel.

Métodos para las pruebas

La ME se puso a prueba siguiendo a Hoch y Dreyfus (2007). Es decir, utilizando un cuestionario inicial (pre-test) y un cuestionario final (post-test), el primero antes de interactuar con la ME y el segundo después de la interacción. Por otro lado, siguiendo la Teoría de la Actividad, se registraron las acciones de los estudiantes al usar la ME. En particular, se utilizó el método reportado en Bødker (1995) para analizar videograbaciones detectando cambios de foco y *breakdowns*. Para ello se grabó la pantalla de cada estudiante a medida que transcurría la interacción usando el software de tipo *screencasting* llamado *CamStudio*. Después de varias pruebas piloto, la prueba final, que es la que se reporta en este artículo, fue en el Colegio de Ciencias y Humanidades Vallejo (CCH Vallejo) con alumnos de quinto semestre.

El pre-test se aplicó al grupo de 35 estudiantes. Con los resultados se eligieron, para probar la ME, los 16 estudiantes que quedaron por arriba de los 15 puntos (de un puntaje máximo de 32). Un mes después, a estos 16 estudiantes se les invitó a probar la ME durante una hora y media. Debido a causas externas sólo asistieron 7 de los 16

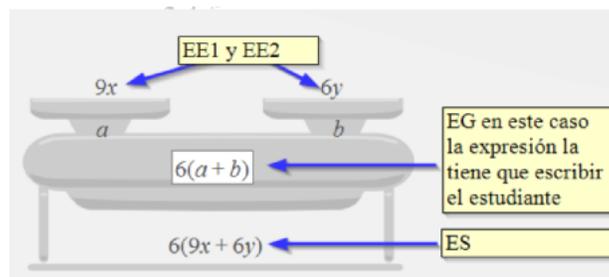
estudiantes elegidos para la prueba. Al terminar esa sesión de prueba se les proporcionó el URL de la aplicación web ME y se les pidió que, si tenían tiempo, la utilizaran en su casa.

El post-test se les aplicó una semana después de la sesión de prueba. Cabe aclarar que el pos-test es igual que el pre-test salvo coeficientes y tiene un reactivo adicional. El día que resolvieron el post-test se les pidió que anotaran su nombre en las hojas de respuestas y el tiempo que utilizaron la ME en casa. Para evaluar el pre-test y el post-test se asignó de 0 a 2 puntos a cada reactivo: 0 si no se respondió o la respuesta fue errónea; 1 si se resolvió parcialmente bien; y 2 si se resolvió correctamente. Además se marcó con una "S" a los reactivos donde se encontró sentido de la estructura al resolverlo.

Resultados, análisis y discusión

La secuencia interactiva se diseñó según el esquema de una máquina o sistema (usado en el diseño de artefactos) que consta, en su forma más simple, de *input*, proceso y *output*. La idea clave es que, dados dos de esos componentes, se encuentre el tercero. Esto da lugar a tres tipos de tareas o actividades. En el caso de la ME, esos tres componentes son (ver figura 1): el *input*, dos expresiones de entrada EE1 y EE2; el proceso, una expresión generadora (EG); y el *output* (ES), una expresión que resulta de sustituir EE1 y EE2 en EG.

Figura 1. La máquina de expresiones.



En todos los casos, la máquina de expresiones genera una expresión de salida (ES) al sustituir las expresiones de entrada (EE1 y EE2) en la expresión generadora (EG). Por ejemplo, si las expresiones de entrada son $9x$ y $6y$, y si la expresión generadora es $6(a+b)$ entonces la máquina arrojará $6(9x+6y)$ como expresión de salida, pues sustituye a por $9x$ y b por $6y$.

Las actividades propuestas con esta máquina son de tres tipos, a las cuales se puede acceder en la pantalla inicial. Estas actividades son: conjetura las expresiones de entrada; anticipa la expresión de salida; y conjetura la expresión generadora. En Muñoz y Rojano (2014) se puede encontrar una descripción de los elementos de la interfaz de la ME y de su funcionamiento.

Resultados Pre/post-test

El cuadro 1 muestra los puntajes generales y los de sentido de la estructura (SE). La puntuación máxima tanto en el pre-test como en el post-test es de 32, y de 13 puntos en sentido de la estructura.

Cuadro 1: Resultados individuales del *pre/post test*.

	Pre-test		Post-test		SE Pre-test		SE Post-test	
	pts	pts/32	pts	pts/32	pts	pts/13	pts	pts/13
Bedani	31	96.88%	28	87.50%	12	92.31%	11	84.62%
Karla	18	56.25%	15	46.88%	5	38.46%	5	38.46%
Edwin	20	62.50%	27	84.38%	4	30.77%	9	69.23%
David	18	56.25%	19	59.38%	3	23.08%	5	38.46%
Fabiola	16	50.00%	20	62.50%	3	23.08%	7	53.85%
Eduardo	14	43.75%	20	62.50%	5	38.46%	8	61.54%
Jenifer	15	46.88%	16	50.00%	3	23.08%	5	38.46%

Grupalmente los estudiantes mejoraron significativamente al pasar del pre-test al post-test, tanto en la puntuación general como en la puntuación del sentido de la estructura. Y la mejora es más significativa si consideramos que la exploración interactiva con la ME consistió de sólo una sesión de poco más de una hora. La excepción es Bedani, cuyas habilidades algebraicas son muy superiores a las del resto del grupo.

A continuación presentamos 2 extractos de las producciones de los estudiantes comparando el pre-test con el post-test.

En el problema 9 (figura 2), Edwin muestra buena manipulación algebraica en el pre-test pero no reconoce $5-x$ como entidad. Sin embargo, en el post-test factoriza correctamente el $7-y$ para obtener un producto de binomios y encuentra la solución rápidamente.

De manera similar, en el problema 12 del pre-test, Edwin aplica varias reglas e incluso trata de asignar valores a las literales pero no logra encontrar la solución. En el post-test, en contraste, logra ver el producto como una entidad y hace una sustitución explícita para encontrar la solución por medio de la fórmula general. (Ver figura 3.)

Cabe destacar que la técnica de sustitución no se les enseñó explícitamente en ninguna de las actividades de la sesión de pruebas con la ME, pero sí está incorporada

en ésta --la sustitución es el proceso que sigue la máquina. Esto sugiere que la ME sí es útil para desarrollar el sentido de la estructura en álgebra.

Figura 2. Problema 9 (Edwin pre-test/Edwin post-test)

9. Resuelve $6(5-x) + 3x(5-x) = 0$

$$\textcircled{9} \quad 6(5-x) + 3x(5-x) = 0$$

$$30 - 6x + 15x - 3x^2 = 0$$

$$0 = -3x^2 + 9x + 30 \rightarrow$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4(-3)(30)}}{2(-3)}$$

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 360}}{-6}$$

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{-279}}{-6}$$

R = No tiene solución

9. Resuelve $4(7-y) + 2y(7-y) = 0$

⑨ Ejercicio 9

$$4(7-y) + 2y(7-y) = 0$$

$$(7-y)(4+2y) = 0$$

$$7-y=0 \quad 4+2y=0$$

$$y=7 \quad y = -\frac{4}{2}$$

$$y = -2$$

$$R = y = 7 \quad y = -2$$

Figura 3 Problema 12 Edwin. (Edwin pre-test/Edwin post-test)

12. Si $9x^2y^2 + 6xy + 1 = 0$ ¿cuánto vale xy ?

$$\textcircled{12} \quad 9x^2y^2 + 6xy + 1 = 0$$

$$(3xy)(3xy) + 6xy = -1$$

$$9xy \cdot (xy + \frac{2}{3}) = -1$$

$$9xy = -\frac{1}{xy + \frac{2}{3}} \quad \frac{9xy + 1}{xy + \frac{2}{3}} = 0 \quad 9xy + 1 = 0 \quad xy = -\frac{1}{9}$$

$$9\left(-\frac{1}{9}\right)^2 + 6\left(-\frac{1}{9}\right) + 1 = 0$$

$$9 \cdot \frac{1}{81} + \left(-\frac{6}{9}\right) + \frac{9}{9} = 0$$

$$\frac{1}{9} - \frac{6}{9} + \frac{9}{9} = 0$$

$$\frac{1-6+9}{9} = 0$$

$$\frac{4}{9} = 0$$

12. Si $4a^2b^2 - 4ab + 1 = 0$ ¿cuánto vale ab ?

1 = 0 ¿cuánto vale ab ?

⑩ Ejercicio 12

$$4a^2b^2 - 4ab + 1 = 0$$

$$4(ab)^2 - 4ab + 1 = 0$$

suponiendo que ab es "x"

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(4)(1)}}{2(4)}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{8}$$

$$x = \frac{4 \pm 0}{8}$$

$$x = \frac{4}{8}$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$R = ab = \frac{1}{2}$$

Resultados sesión de exploración interactiva con la ME

La sesión de exploración con la ME duró aproximadamente una hora y media y se recolectaron 4 grupos de datos correspondientes a 4 actividades: 2 hojas de respuestas sobre el funcionamiento de la máquina antes de utilizarla (actividad 1), y después de 10 minutos de uso (actividad 2); video de interacciones con *CamStudio* (actividades 2 y 3); y audio de resolución grupal de ejercicios de la ME (actividad 4).

Actividad 1. La primera actividad consistió en mostrar con el proyector un pantallazo de la ME y preguntar ¿qué crees que hace la máquina? y ¿cómo se opera? En las respuestas por escrito de tres estudiantes se puede leer que hablan de sustitución, aunque algunos de forma implícita. David, Jenifer y Bedani utilizan los verbos elaborar, sustituir y asignar, respectivamente. De ellos sólo Bedani respondió a la pregunta de cómo se opera, y lo hace de manera acertada.

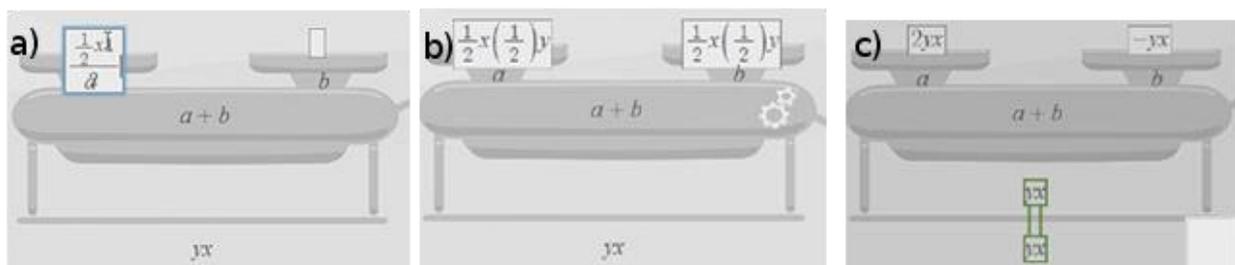
Actividad 2. Por su diseño, la ME no necesita un manual para aprender a usarla. La instrumentación se logra a través de *affordances*, *feedback* y la presentación progresiva de niveles. Es por eso que la segunda actividad consistió en una exploración libre de 10 minutos. Se pudo observar que, en menos de 10 minutos, no sólo aprendieron a utilizar la máquina sino que se dieron una idea bastante acertada de su funcionamiento. En promedio tardaron 1 minuto 44 segundos en resolver correctamente su primer ejercicio.

Actividad 3. La tercera actividad de la sesión de pruebas fue una exploración libre de la ME durante 40 minutos. El análisis se concentró en los *breakdowns* de los estudiantes al interactuar con la ME. Identificamos 3 tipos de *breakdowns*: uno asociado a la dualidad proceso/objeto y los otros dos asociados a la retroalimentación.

Vamos a analizar enseguida el ejercicio 3/22 del escenario *Encuentra Input (EI)*. Aunque sencillo, este ejercicio tiene una dificultad: la EG es una suma y la ES es un producto, es decir, no tienen la misma estructura. Esto implica que, para resolver el ejercicio, se tenga que pensar al producto xy (ES) como una entidad. Si bien seis de los siete estudiantes intentaron resolverlo, de esos 6 solamente 3 lograron ver al xy como entidad al primer intento, 2 lo hicieron después de varios intentos, y 1 se quedó atrapado en la concepción operacional y, en consecuencia, no pudo resolverlo.

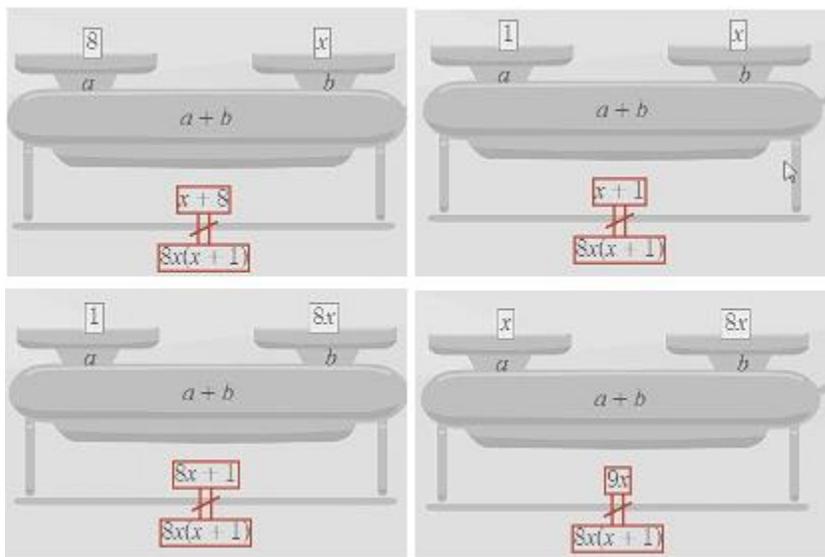
En ese mismo ejercicio, Fabiola no logra resolverlo a la primera, posiblemente porque no logra concebir a xy como entidad (Figura 4a) y, en consecuencia, abandona. Pero en el minuto 17:53, regresa al ejercicio. En el minuto 19 (Figura 4b) se anima a escribir algo. Al separar las literales, su parseo de xy es claramente uno de proceso y no de objeto. En este intento no logra operar con xy como entidad. Sin embargo, al final del minuto 21 (Figura 4c) logra ver al xy como una entidad y propone una solución correcta.

Figura 4 Extractos de interacción de Fabiola. Ejercicio 3/22 de EI.



Un caso parecido sucede en la interacción de Jenifer (Figura 5) con el ejercicio 20/22 de *Encuentra Input*. Se puede observar que no logra resolverlo debido, posiblemente, a que trata de adivinar la respuesta siguiendo la saliencia visual del *output*. Jenifer trata de combinar subexpresiones de $8x(x+1)$ para resolverlo pero no logra proponer una solución correcta.

Figura 5. Extractos de interacción de Jenifer. Ejercicio 20/22 de EI.



La solución esperada era transformar el producto $8x(x+1)$ en una suma $8x^2+8x$ para así poner cada sumando en un plato; o bien ver a $x(x+1)$ como una entidad y poner en cada plato un múltiplo de esta expresión para que al sumarlos de $8x(x+1)$. (Cabe destacar que en otros ejercicios de este escenario el *output* se presenta ya como suma lo cual facilita la tarea.)

Conclusión y comentarios finales

Los resultados del análisis de las interacciones sugieren una respuesta positiva a las preguntas de investigación. En primer lugar, puesto que la ME es en esencia una máquina de sustitución, favorece la apropiación de esta técnica. La evidencia es Edwin, quien de forma espontánea utiliza la técnica de cambio de variable para resolver dos problemas del post test. En este sentido, y dado que los estudiantes grupalmente mejoraron su sentido de la estructura, se puede decir que la ME facilita y promueve la adquisición del sentido de la estructura en álgebra.

Respecto al diseño siguiendo los principios de la Teoría de la Actividad y el HCI, creemos que el diseño minimalista, las *affordances*, el *feedback*, y el *level-up* tuvieron un efecto positivo de usabilidad en los estudiantes. La evidencia es la constatación de un tiempo de instrumentación prácticamente nulo. Pero, además, los estudiantes continuaron la exploración y resolvieron los ejercicios sin ninguna intervención de la investigadora ni del profesor.

Respecto a los niveles de dificultad incorporados en la ME de acuerdo a la Teoría de la Actividad y la HCI aplicadas a la educación matemática, creemos que *level-up* es una de las características distintivas de la ME. Sentimos, sin embargo, que como trabajo futuro deberían incorporarse ejercicios con mayor grado de dificultad orientados a

provocar las tensiones de (Egnström) y los *breakdowns* (Bodker) para expandir el aprendizaje de los estudiantes.

En las pruebas se vio que la saliencia visual conduce a los estudiantes con demasiada frecuencia a resolver rápidamente los ejercicios, sin necesidad de ningún análisis cognitivo. Ello sugiere que, como trabajo futuro, la incorporación de niveles con menos saliencia visual que le exijan al estudiante un mayor esfuerzo cognitivo.

Para los estudiantes más avanzados y los matemáticos expertos, la saliencia visual se hace aparente de forma internalizada. El experto hace que aparezca la saliencia visual a través de una expresión equivalente y ello hace que las estructuras realmente útiles para la resolución del problema se vuelvan aparentes sin realmente estar presentes en el enunciado del problema. Por ejemplo, para un experto la expresión $(x+y)(x-y)$ la puede ver-como x^2-y^2 , y esta otra estructura provocaría una saliencia visual con respecto a los restantes elementos del problema. En resumen, para cada estructura, primero se deben presentar ejercicios de mayor saliencia visual de manera explícita, pero después esa saliencia debe esconderse con estructuras equivalentes más complejas (con más niveles en su árbol de parseo).

Finalmente, respecto a la utilidad de las *affordances* y el *feedback*, queda sugerido en los datos de tiempos de uso de la ME, que tales características de la ME son de gran utilidad. Como evidencia adicional se puede aportar el hecho de que, para usar de manera productiva la ME, no se requirieron ni la intervención de la investigadora, ni del profesor, ni sesiones de entrenamiento ni manuales.

Bibliografía

- Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the learning of mathematics* 14 (3), p. 42-47.
- Artigue, M. (2002). Learning Mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*.
- Bødker, S. (1995). Context and Consciousness. En B. A. Nardi (ed.), (pp. 147-174). Massachusetts Institute of Technology. (ISBN: 0-262-14058-6.)
- DeVane, B., & Squire, K. D. (2012). 10 Activity Theory in the Learning Technologies. *Theoretical foundations of learning environments*.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures (Mathematics Education Library)*. Reidel. (ISBN: 9027715351.)
- Hoch, M. & Dreyfus, T. (2007). Recognising an algebraic structure. En D. P. Pantazi & G. Philippou (ed.), *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 436-445).
- Huemer, W. (2006). The Transition from Causes to Norms: Wittgenstein on Training.. In M. Kober (ed.), (pp. 205-225). Rodopi.

- Hunt, J. (2003). *Guide to the Unified Process Featuring UML, Java and Design Patterns*. Springer. (ISBN: 9781852337216.)
- Kaptelinin, V. & Nardi, B. A. (2012). *Activity Theory in HCI: Fundamentals and Reflections*. Morgan & Claypool Publishers.
- Kaptelinin, V. & Nardi, B. A. (2006). *Acting with technology: activity theory and interaction design*. The MIT Press.
- Kindt, M. (2010). Principles of Practice. In P. Drijvers (ed.), *Secondary Algebra Education* (pp. 137-178). SensePublishers.
- Kuutti, K. (1996). Activity theory as a potential framework for human-computer interaction research. *Context and consciousness: Activity theory and human-computer interaction*, 17--44.
- Trouche, L. & Drijvers, P. (2010). Handheld technology for mathematics education: Flashback into the future. *ZDM* **42** (7), 667--681.
- Lagrange, J. (2003). Analysing the impact of ICT on mathematics Teaching Practices. In *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*.
- Munoz, V. & Rojano, T. (2014). ALGEBRAIC EXPRESSION MACHINE: A WEB AD HOC LEARNING ENVIRONMENT FOR DEVELOPING STRUCTURE SENSE. In G. Futchek & C. Kynigos (ed.), *Proceedings of the 3rd International Constructionism Conference 2014* (pp. 540-541). Österreichische Computer Gesellschaft (OCG) (ISBN: 978-385403-301-1).
- Sfard, A. & Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification — The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics* **26** (2), 191-228.