

# ANÁLISIS DE CONFIGURACIONES Y PROCEDIMIENTOS EN SITUACIONES DE PROPORCIONALIDAD

Juan Carlos Ramírez Maciel, Claudia Margarita Acuña Soto

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.

[jcrmaciel@yahoo.com.mx](mailto:jcrmaciel@yahoo.com.mx), [claudia\\_as@gmail.com](mailto:claudia_as@gmail.com)

*El presente es un avance de investigación que tiene por objetivo analizarla la forma cómo los estudiantes construyen el razonamiento proporcional bajo la óptica del tipo de cantidades involucradas en problemas de valor faltante. El marco teórico en el que nos basamos es el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición Matemática, mismo que nos sugiere herramientas de análisis que contrastan configuraciones epistémicas con cognitivas. Sugerimos que elementos del razonamiento proporcional como la detección de la razón unitaria y la iteración podrían funcionar para delinear prácticas significativas que permitan articular éstas con la llamada la regla de tres.*

Palabras claves: Proporcionalidad, Enfoque Ontosemiótico, Problemas de valor faltante, Configuración epistémica y cognitiva.

## Introducción

En este artículo se analizan los procesos involucrados cuando los estudiantes de bachillerato resuelven problemas de proporcionalidad. Investigamos sobre la influencia del tipo de cantidad en las estrategias o procedimientos utilizadas por los estudiantes. Pretendemos establecer cómo esta diferencia influye la construcción de la idea de proporcionalidad y si la interpretación bajo estas circunstancias tiene los mismos requisitos cognitivos en cada caso, además de dar elementos que permitan observar cómo esta diferencia impacta en la construcción del razonamiento proporcional en los estudiantes. En ese sentido es necesario explorar la naturaleza de los atributos que están presentes cuando el estudiante utiliza distintas estrategias de solución y cuáles favorecen al desarrollo del razonamiento proporcional. Para ello se plantean problemas donde se debe encontrar el llamado *valor faltante* tomando como grupo de estudio a estudiantes de bachillerato.

En el trabajo de Tjoe & De la Torre (2014) se investigan las relaciones entre la habilidad de los estudiantes de secundaria para resolver problemas de *valor faltante* y qué tanto identifican y distinguen relaciones de proporcionalidad y no proporcionalidad. Encontraron que la habilidad de resolver problemas de este tipo

no tiene relación directa con la solución de problemas que requieran del razonamiento proporcional, lo que implica que el mecanismo para resolver problemas de valor faltante no presupone la concepción de razonamiento proporcional. También encuentran que los estudiantes resuelven problemas de proporcionalidad en una práctica automática, dejando de lado una actitud crítica.

Una de las hipótesis de este trabajo consiste en considerar que bajo ciertas circunstancias, los problemas de encontrar el valor faltante sí requieren de elementos que sugieren un razonamiento proporcional. Pretendemos establecer cómo esta diferencia influye en la construcción del razonamiento proporcional y si la interpretación bajo estas circunstancias tiene los mismos requisitos cognitivos en cada caso, además de dar elementos de la forma en cómo esta diferencia impacta en la construcción del razonamiento proporcional.

El trabajo se desarrolla analizando los mecanismos que están presentes cuando la proporcionalidad es puesta en juego. Para ello se hizo una revisión de investigaciones sobre la proporcionalidad con el fin de construir un marco de referencia sobre los trabajos previamente realizados en este tema, donde se ha documentado que algunos procesos subyacentes del problema en efecto influyen en el razonamiento proporcional, tales como: comparar fracciones, ordenar fracciones, construir razones, construir proporciones. El marco teórico que soporta esta investigación es el Enfoque Ontológico y Semiótico (EOS). En éste, la actividad matemática juega un rol central y se encuentra modelada en términos de sistemas de prácticas operativas y discursivas que un individuo pone en juego ante un tipo de situaciones-problema; en dichas prácticas intervienen objetos ostensivos (símbolos, gráficos, etc.) y no ostensivos (a los que evocamos al hacer matemáticas, por ejemplo: los conceptos matemáticos) lo cuales son representados en forma textual, oral o incluso gestual. Una situación-problema es entendida como cualquier tipo de circunstancia que precisa y pone en juego actividades matemáticas que promueven y contextualizan la actividad.

En la parte metodológica se muestra cómo se utilizan distintos procesos de análisis de datos, los cuales se realizan de manera cuantitativa (respuestas más comunes) y de manera cualitativa donde se utilizan a las configuraciones epistémicas y cognitivas para la producción de los estudiantes como instrumentos de análisis. Además se realizaron entrevistas clínicas con el fin de poder tener indicadores más confiables en la interpretación y argumentación por parte de los estudiantes. Finalmente se presenta el análisis de estos procesos y a partir de ello la generación de un espacio para la discusión, reflexión y futuras investigaciones en esta dirección.

## Antecedentes

La proporcionalidad es una de las ideas más complejas de la matemática del currículo de educación media superior. Involucra diversos conceptos, formas de pensar y formas de actuar, las cuales se encuentran ligadas a la construcción de diversas estructuras: estableciendo razones, proporciones, algoritmos, formas funcionales. Es un tema que ha sido objeto de diversas investigaciones que evidencian la problemática que surge cuando los estudiantes se enfrentan con éste. Algunas de esas investigaciones han identificado que la forma de enfrentar problemas escolares de razonamiento proporcional es susceptible al cambio, es decir, si a un problema se le hacen ligeros cambios en los datos, puede ser que la estrategia para su resolución y el razonamiento que lo sustenta sean diferentes, Lesh & Doerr (2003); también se han identificado las deficiencias que existen cuando la situación del problema cambia, Mellar (1991). En su trabajo Mellar presenta modelos sobre sistemas de producción del pensamiento en un grupo de adultos jóvenes y encontró que muchos de sus sujetos recurrieron a la suma reiterada, de manera incorrecta, como una estrategia para dar una solución en lugar de detectar la relación propiamente proporcional.

También se ha mostrado que el razonamiento multiplicativo y proporcional podría verse afectado también por: 1. Los procesos físicos subyacentes a la situación del problema, 2. Formación de relaciones cuantitativas y 3. La invariancia multiplicativa (Harel et al. 1991). Además se ha encontrado que los procesos multiplicativos, así como los constructos tales como la “unidad” e iteración juegan un papel relevante en el pensamiento proporcional como se muestra en (Singh 2000) y (Ramírez & Acuña 2014). También se han intentado establecer modelos para el razonamiento proporcional, (Alatorre & Figueras 2005).

Con el fin de establecer los criterios para establecer cuándo asumimos que está presente el razonamiento proporcional se han realizado trabajos como el de (Tjoe et al. 2013), donde se estudian atributos del razonamiento proporcional: comparar fracciones, ordenar fracciones, construir razones, construir proporciones, identificar una relación multiplicativa entre conjuntos de valores, diferenciar la relación proporcional de una no proporcional, y aplicar algoritmos en la solución de problemas de razonamiento proporcional. Encontrando que estos constituyen una gama de conocimientos conceptuales y procedimentales que los estudiantes necesitan dominar para ser competentes en este tema.

Por otro lado, desde una perspectiva histórica, encontramos que la idea de la razón y la proporción muestra una fuerte relación con el tipo de cantidad, en el libro V de Euclides se dice que: “una razón es determinada relación con respecto a su tamaño entre dos magnitudes homogéneas”, mientras que el producto de tales

cantidades no tenía sentido, (Gairín & Oller 2013). Esta definición muestra un énfasis sobre la homogeneidad de las magnitudes. Posteriormente se observa una evolución en los procedimientos que constituyen la base de la llamada regla de tres; esto ocurrió cuando el concepto de proporcionalidad se desarrolló en China, estos procedimientos aceptan la relación entre cantidades no homogéneas (Gairín & Oller 2013). Esto nos deja ver cierto conflicto relacionado con la interpretación de los tipos de objetos involucrados, que a final de cuentas se relacionan con distintos tipos de cantidades comparadas. Por lo anterior consideramos que el llegar a la idea de razón entre cantidades no homogéneas no es una inclinación natural, por lo observado es necesario estudiar la forma en cómo este hecho influye en la construcción de la idea de razón y de proporción. Para tal fin es necesario establecer cuáles son las prácticas asociadas ante distinciones de este tipo de diferenciación, con el fin de tener elementos para construir las configuraciones adecuadas para la construcción de la proporcionalidad en este tipo de situaciones ya antes mencionadas.

### **Marco teórico**

La investigación se lleva a cabo utilizando al Enfoque Ontológico y Semiótico de la Cognición Matemática (EOS), Godino, J. D. (2002), Font, V, Godino, J. D. y D'Amore, B. (2007). Dentro de esta postura, la descripción de la actividad matemática se lleva a cabo, en términos de sistemas de prácticas operativas y discursivas. En dichas prácticas, intervienen objetos matemáticos que pueden ser considerados desde distintas facetas duales: personal-institucional, ostensivo no ostensivo, expresión-contenido, extensivo-intensivo y unitario-sistémico. Además se establecen funciones semióticas, las cuales permiten por un lado entender las posibles interpretaciones del significado de un objeto matemático y por el otro caracterizar las relaciones que se establecen entre dichos objetos. Los sistemas de prácticas realizadas en el seno de las instituciones determinan la emergencia progresiva de los "objetos matemáticos", donde el significado de estos objetos está íntimamente ligado con los problemas y la actividad realizada para su resolución, no pudiéndose reducir este significado del objeto a su mera definición matemática, D'Amore & Godino (2006, p14). Los significados están ligados a las prácticas matemáticas desarrolladas por los individuos y las instituciones, cuando resuelven situaciones problemáticas, dándose en un sentido pragmático.

El primer elemento de análisis son las *situaciones-problema* que promueven y contextualizan la actividad; *el lenguaje* (símbolos, notaciones, gráficas) representa otras entidades que sirven como herramientas para la acción; *los argumentos* que justifican los procedimientos y las proposiciones relacionan a los conceptos. Finalmente, los objetos que aparecen en las prácticas matemáticas y aquellos que

emergen de esas prácticas dependen del juego de lenguaje en el que participan y encuentran su significado en las actividades donde se desarrollen Font et al (2007). En el caso de la resolución de problemas de proporcionalidad que propusimos, las situaciones-problema utilizadas son diversas. Identificamos los elementos presentes que emergen de la actividad de resolución, a partir de ello, hicimos una configuración epistémica de los objetos involucrados: la situación, el lenguaje, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos.

En este trabajo, la situación está determinada por los problemas de proporcionalidad de valor faltante en distintos contextos. En el lenguaje consideramos símbolos, expresiones y representaciones diagramáticas. En conceptos ubicamos a la razón, proporción y tasa. En propiedades entendemos a los distintos elementos presentes, tales como contexto y tipo de cantidad. En los procedimientos consideramos el tipo de estrategias que los estudiantes utilizan para dar solución. Y en los argumentos las respuestas de los estudiantes al problema. Dentro del EOS se distingue entre configuraciones; estas configuraciones pueden ser cognitivas (conglomerado de objetos personales) o epistémicas (conglomerado de objetos institucionales) según se considere la práctica desde la perspectiva personal o institucional. A su vez, estas configuraciones son emergentes de las prácticas realizadas para resolver un campo de problemas (Godino, Font y Wilhelmi, 2006, p. 135). En ese sentido, ésta se ve asociada a la elección de estrategias que le permiten abordar el problema, poniendo en funcionamiento las configuraciones cognitivas que dan solución a las tareas planteadas desde la perspectiva del estudiante.

## **Metodología**

El estudio constó de análisis cuantitativo, el cual se realizó a través de un estudio estadístico del cuestionario aplicado considerando: respuestas correctas, incorrectas y tipos de estrategias utilizadas. El segundo análisis fue de corte cualitativo, para ello utilizamos como herramienta metodológica a las configuraciones, configuraciones epistémicas y cognitivas para la producción de los estudiantes. La configuración epistémica de referencia incluía los atributos que en teoría deben estar presentes y se compara con la configuración cognitiva. En esta última obtuvimos los atributos que los estudiantes ponen en juego cuando resuelven problemas de proporcionalidad. Para el desarrollo de la configuración cognitiva se aplicó un cuestionario en la que el alumno ten que resolver problemas donde había que encontrar el valor faltante. Complementamos el análisis con entrevistas clínicas a fin de explorar las configuraciones cognitivas que realizadas por el estudiante. Este instrumento permitió una exploración más fina y detallada,

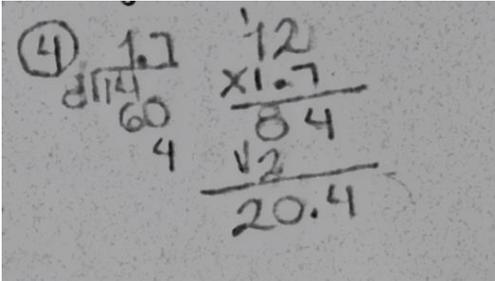
para encontrar suficiente evidencia de los procesos que intervienen en estas configuraciones.

Para la puesta en escena se realizó un cuestionario de preguntas cerradas, se aplicó a 45 estudiantes entre 15 y 16 años del primer semestre de bachillerato del Colegio de Ciencias y Humanidades Naucalpan, quienes conocían la regla de tres y que estaban familiarizados con el tipo de problemas. El cuestionario constó de ocho reactivos y para dar solución a estos reactivos, no se especificó una forma de dar solución a los problemas. La configuración de referencia utilizada con los lineamientos esperados institucionalmente fue contrastada con la configuración cognitiva, Ramírez y Acuña (2015). Tabla I.

### Análisis y Resultados

De la parte cuantitativa se desprende que los estudiantes prefieren usar la iteración como herramienta de solución antes que la regla de tres o construir una razón entre las cantidades del problema, esto se observa principalmente cuando trabajan con cantidades homogéneas o familiares (distintas unidades conocidas por ellos). Este hecho cambia cuando las cantidades involucradas en el problema no son homogéneas, donde la regla de tres es el proceso más utilizado, siendo la iteración la estrategia menos usada.

Tabla 1. Cognitiva para la solución de las tareas de proporcionalidad propuestas.

Situación problema: María necesita 8 tazas de harina para hacer 14 donas, usando el mismo recipiente ¿cuántas donas puede hacer con 12 tazas de harina?	
Configuración epistémica	Configuración Cognitiva Dulce
Lenguaje: Dentro del contexto del problema específico, donde aparece el uso de objetos ostensivos matemáticos para establecer relaciones entre las cantidades involucradas. Razones que pueden ser de la forma $k = \frac{y}{x}$ o bien presentarse en su forma decimal.	 <p>Se establecen razones de la forma <math>k = \frac{y}{x}</math></p>

---

Proporciones  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Recursos cómo tablas y gráficas

Conceptos:

Multiplicación, Razón, Proporción, Función

Razón, multiplicación.

Procedimientos:

Establecer la proporcionalidad al comparar las cantidades del problema ya sea iterando o través de una razón entre ellas, establecer las proporciones adecuadas para dar solución.

Entrevistador:

Me podrías decir cómo hiciste el problema 4 el de las donas, “maría necesita 8 tazas de harina para hacer 14 donas, usando el mismo recipiente, cuantas donas puede hacer con 12 tazas de harina.

Argumentos:

Los encontramos en la solución del problema mostrando que se ha razonado sobre los problemas y no sobre las operaciones.

Dulce:

Ah pues dividí las 14 donas entre las 8 tazas y me dio 1.7 para saber cuántas donas se hacen por taza y este 1.7 lo multipliqué por 12, que son las 12 tazas de harina para las donas.

---

Se encontró que ante una situación problema que involucra cantidades homogéneas y heterogéneas familiares, los estudiantes son capaces de interpretar el fenómeno y argumentar sobre algunos de los aspectos relacionados con el pensamiento proporcional, a través de la detección de la unidad de proporción que les permite: 1. Asociar numéricamente la relación entre las cantidades involucradas y 2. Identificar los tipos de unidades obtenidas con base en relaciones de familiaridad mientras que, si las relaciones se establecen entre cantidades heterogéneas, para algunos estudiantes, no es fácil establecerlas, ni las unitarias ni las generales que se requieren la proporcionalidad, dada esta situación ellos recurren a herramientas algorítmicas que no permiten dar una explicación convincente de la solución, Ramírez y Acuña (2015).

Por otro lado, en el análisis de las configuraciones encontramos que los estudiantes que tienden a utilizar herramientas como la iteración o establecer comparaciones a través de razones pueden interpretar *el todo en término de sus partes* para después asociar las partes correspondientes, son capaces de justificar y argumentar su respuesta en términos del problema y no en términos de las operaciones realizadas para llegar a la solución. En cuanto al uso de la regla de

---

tres, se observa que no está asociada necesariamente con una justificación convincente de su respuesta. La mayoría de nuestros estudiantes no pudieron explicar la relación que hay entre las cantidades, se restringen a indicar qué número multiplican por otro y por cuál dividen. La solución es correcta, sin embargo ni en la configuración cognitiva, ni en la entrevista se logran observar elementos que indiquen que se desarrollen nociones de proporcionalidad.

En otras palabras encontramos que en las respuestas presentadas por los estudiantes que utilizan la razón unitaria a través de la iteración, son capaces de comparar cantidades a través de razones, tienen un acercamiento e interpretan el problema, identifican el cambio constante. Consideramos que bajo esta perspectiva los problemas de valor faltante sí contribuyen al razonamiento proporcional, es decir, logran la construcción de las razones y proporciones, identifican las relaciones entre las cantidades y argumentan mostrando elementos que dan evidencia de que el razonamiento proporcional está presente. Encontramos así que el procedimiento de la iteración es una buena base para la interpretación de la proporción, Ramírez J.C. (2014), Ramírez & Acuña (2014).

Consideramos que estas estrategias deben predominar en el discurso matemático escolar en particular en la educación media, buscando configuraciones didácticas que conecten e incorporen estos procedimientos y no centrando el discurso sobre el recurso de la regla de tres, que en este tipo de situaciones-problema no fomenta el desarrollo del razonamiento proporcional ya que se centra en las operaciones que se deben hacer para dar solución y no en la interpretación del problema.

Para continuar la investigación y futuras investigaciones es necesario establecer las conexiones entre las distintas configuraciones, aspectos epistémicos y cognitivos para poder construir unidades didácticas adecuadas que permitan la inserción de todos los procesos encontrados hasta ahora además de que nos planteamos la necesidad de construir y caracterizar configuraciones didácticas que permitan articular de manera coherente la iteración con la regla de tres.

## Referencias

- Alatorre y Figueras (2005). A developmental model for proportional reasoning in ratio comparison tasks En: A. Olivier i K. Newstead (eds.): *Proceedings of the 22nd PME Conference*, (Vol 3, pp. 3-1 a 3-8). Stellenbosch: University of Stellenbosch, Faculty of Education
- Font, V., Godino, J. D. y D'Amore, B. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *DM. The International Journal on Mathematics Education*, Vol. 39 (1-2): 127-135.

- Gairín, José María y Oller Marcén, Antonio M. (2013). *La génesis histórica de los conceptos de razón y proporción y su posterior aritmetización*. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 16(3), pp. 317-338.
- Godino, J.D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22(2/3), 237-284.
- D'Amore, B., & Godino, D. J. (2006). Puntos de vista antropológico y ontosemiótico en Didáctica de la Matemática. *La matemática e la sua didattica*, 1, 7-36. Special Issue on Semiotics, Culture and Mathematical Thinking, 131-155.
- Harel, G., Behr, M., Post, T. & Lesh, R. (1991), Variables Affecting Proportionality: Understanding of Physical Principles, Formation of Quantitative Relations, and Multiplicative Invariance. In F. Furinghetti (ed.) *Proceedings of PME XV Conference* (pp. 125-133). Assisi, Italy.
- Lesh, R., & Doerr, H. (2003). Foundations of a models and modelling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving. In R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 3-34). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Mellar, H. (1991). Modeling students' thinking on a proportional reasoning task. *International Journal of Mathematics Education, Science and Technology*, 22, 1. 111-119.
- Ramírez, J.C., Acuña (2014). El concepto de razón y proporción: una mirada desde la matemática educativa. *First International Conference on Mathematics and its applications*. Puebla, México
- Ramírez J.C. (2014). Proporcionalidad e Iteración en problemas de Valor Faltante un estudio desde el Enfoque Ontosemiótico. *Primer encuentro SUMEM. La educación Matemática en el bachillerato: retos y avances*. UNAM. México Noviembre 2014.
- Ramírez, J.C, Acuña (2015). El Tipo de Cantidad en Proporcionalidad con Problemas de Valor Faltante. *En la XIV conferencia Interamericana de Educación Matemática CIAEM-IACME*, Chiapas, México, 2015. Recuperado de: [xvi.ciaem-iacme.org/index.php/xvi\\_ciaem/ciaem/paper/viewfile/546/249](http://xvi.ciaem-iacme.org/index.php/xvi_ciaem/ciaem/paper/viewfile/546/249)
- Singh, P. (2000). Understanding the Concepts of Proportion and Ratio Constructed by two grade six students. *Educational Studies in Mathematics*. Vol. 43, No. 3 (2000), pp. 271-292.
- Tjoe et al. (2013). Identification and validation process of proportional reasoning attributes: an application of a cognitive diagnosis modeling frame work. *Mathematics Education Research Journal* 1-19.
- Tjoe et al. (2014). On recognizing proportionality: Does the ability to solve missing value proportional problems presuppose the conception of proportional reasoning? *Journal of Mathematical Behavior* 1-7.