EL RAZONAMIENTO PROBABILÍSTICO INFORMAL EN LA ARTICULACIÓN DE LAS INTERPRETACIONES FRECUENCIAL Y CLÁSICA DE PROBABILIDAD

Julio César Valdez Monroy, Ernesto Sánchez Sánchez

Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN

jvaldez@cinvestav.mx, esanchez@cinvestav.mx

En este informe de investigación se examina cómo se lleva a cabo la articulación de las interpretaciones Frecuencial y Clásica de probabilidad por parte de un grupo de estudiantes de bachillerato de tercer grado, quienes se encontraban cursado la materia de Probabilidad y Estadística II. Mediante el análisis de las respuestas de 10 de ellos a tres situaciones planteadas en un contexto de urnas, se busca identificar cuáles son las ideas principales que emergen, y cuáles las inferencias que se formulan en relación con dichas ideas, durante el proceso de articulación. Del análisis se desprende que inferencias informales relacionadas con la aleatoriedad, la independencia y la variabilidad son claves en este proceso. Se concluye con una propuesta de las proposiciones informales correspondientes a estas ideas que orienta sobre el razonamiento probabilístico informal de los estudiantes.

Palabras claves: Articulación de los enfoques frecuencial y clásico, razonamiento probabilístico informal, aleatoriedad, variabilidad, independencia.

Antecedentes y pregunta de investigación

En su reseña de la investigación en didáctica de la probabilidad, Jones, Langrall y Mooney (2007) mencionan que uno de los aspectos importantes de la probabilidad es el desarrollo conjunto de la aproximación frecuencial y la interpretación clásica. Chernoff y Sriraman (2014) hablan sobre el surgimiento de una nueva fase de investigación del pensamiento probabilístico y especulan que una de sus características sería la adopción de un enfoque unificado para la enseñanza y aprendizaje de las interpretaciones de probabilidad clásica, frecuencial y subjetiva.

Hasta el momento, se han encontrado pocas investigaciones en las que el objetivo es analizar cómo los estudiantes articulan las interpretaciones frecuencial y clásica de probabilidad (Stohl, Rider & Tarr, 2004; Ireland & Watson, 2009; Konold et al., 2011; Prodromou, 2012; Nilsson, 2014; entre otros). De acuerdo con estos trabajos, un concepto clave en el proceso de articulación, y que resulta difícil de entender para los estudiantes, es la Ley de los Grandes Números. Subyacentes en este concepto se hallan las ideas de Aleatoriedad, Variabilidad e Independencia, las cuales resultan ser más complejas de lo que a primera vista aparentan (Gal, 2005).

En la búsqueda de resolver el problema de las dificultades que implica la enseñanza de la inferencia estadística y su aprendizaje, se ha propuesto explorar la posibilidad de enseñar a razonar con las ideas que subyacen a los procedimientos de inferencia antes de su formalización (Pratt & Ainley, 2008). La misma argumentación que justifica tal propuesta se puede aplicar a la probabilidad. Resulta válido preguntarse si es posible identificar y desarrollar, sobre la base de las intuiciones y conocimientos, razonamientos informales que incluyan las grandes ideas de la probabilidad, previamente, o de manera paralela, al aprendizaje de los procedimientos y cálculos tradicionales. Así, la pregunta de investigación que se pretende responder es: ¿Cuáles son los rasgos importantes del *razonamiento probabilístico informal* en relación con las grandes ideas de la probabilidad que pueden hacer los estudiantes de bachillerato durante la articulación de los enfoques de probabilidad clásico y frecuencial?

Marco conceptual

El marco que se ha elegido para organizar los resultados del análisis consiste de tres componentes importantes:

i) *Razonamiento probabilístico informal*. Se refiere a la manera en que los estudiantes utilizan sus conocimientos y creencias para entender y argumentar la respuesta a una pregunta, la solución a un problema o la verdad de un enunciado probabilístico con el que se comprometen. Es dual; por un lado, son las representaciones o formulaciones que hacen de los razonamientos que contienen enunciados informales de probabilidad; por otro lado, los procesos en que los estudiantes descubren y justifican enunciados de probabilidad con base en sus conocimientos previos, sin utilizar los métodos y técnicas matemáticas formales de la probabilidad.

ii) *Las grandes ideas de probabilidad*. Engloba cuatro conceptos claves de la probabilidad: *aleatoriedad, independencia, variabilidad, predicción/incertidumbre*. Estos fueron propuestos por Gal (2005) como parte de las ‘grandes ideas’ de la competencia probabilística. Es difícil dar una definición simple de *aleatoriedad* (Batanero, 2015) que refleje su complejidad y pueda ser utilizada de forma precisa para clasificar un evento o proceso dado. Debido a que en el presente estudio se busca explorar el razonamiento probabilístico informal de los estudiantes, una propiedad de la *aleatoriedad* que se utiliza es la impredecibilidad, es decir, si se acepta que un fenómeno es aleatorio, como consecuencia se admite que sus resultados son impredecibles. No obstante, si un evento tiene probabilidad muy cercana a uno, prácticamente se puede decir que va a ocurrir (la incertidumbre es mínima), pero estos casos no son considerados. Por su parte, la *independencia* se presenta cuando el resultado de un evento no altera las probabilidades de otros eventos (previos, simultáneos o futuros). La *variabilidad* en probabilidad se refiere a las diferencias entre las frecuencias de los eventos y las frecuencias esperadas, o las frecuencias relativas y la probabilidad de los eventos. La relación dual *predicción/incertidumbre* se construye en combinación con los conceptos anteriores y su representación formal es la Ley de los Grandes Números.

iii) *Enfoques de probabilidad clásico y frecuencial*. Aunque la aplicabilidad del enfoque clásico es muy limitada, tiene un valor didáctico enorme, pues permite construir modelos de probabilidad (distribuciones) de situaciones manipulables. No obstante, dichos modelos son estáticos y con pocas posibilidades de aplicación si no se vinculan con el enfoque frecuencial de probabilidad. Al hacerlo, los modelos construidos con el enfoque clásico se vuelven instrumentos de predicción (con incertidumbre) que revelan el potencial y sentido práctico de la probabilidad. Aunque la Ley de los Grandes Números es un teorema más general de la probabilidad que no depende de la definición clásica, lo cierto es que una interpretación o instancia de dicha ley expresa la relación entre el enfoque clásico y el enfoque frecuencial de probabilidad.

Metodología

Participantes. En el estudio participaron 10 alumnos del tercer grado de bachillerato (17–18 años). Al momento del estudio asistían a la clase de Probabilidad y Estadística II, por lo que tenían los conocimientos básicos de un primer curso de probabilidad; en particular, habían estudiado los enfoques de probabilidad clásico y frecuencial.

Instrumento para la recolección de datos. Consistió de un cuestionario constituido por tres situaciones con tres preguntas cada una. La primera situación se adaptó de un problema de Metz (1998) y la segunda de un problema de Cañizares (1997). A continuación se exponen las situaciones, las respuestas normativas y las ideas que exploran.

> *Situación 1*. El resultado de 1000 extracciones (una muestra) de una urna que contiene 4 bolas (entre blancas y negras), fue de 489 bolas blancas y 511 bolas negras: a) ¿Cuántas bolas blancas y cuántas negras tiene la urna?; b) Si se realiza la extracción 1,001, ¿qué color de bola crees que se obtendría?; c) ¿Qué color de bola consideras que se obtuvo en la primera extracción? Justifica tus respuestas.

La respuesta normativa es que el contenido de la urna es de 2 bolas blancas y 2 negras, ya que bajo esta hipótesis el resultado dado de las 1000 extracciones es plausible. En la pregunta 1b, se espera que la respuesta sea *se tiene la misma expectativa de bola blanca o negra*. En la pregunta 1c, la respuesta es que pudo ocurrir *cualquiera de los dos eventos*.

El estudiante debe evaluar que la *variabilidad* de los resultados respecto a los valores del modelo equiprobable (2 blancas y 2 negra) es poca y, por tanto, aceptable; el resultado sería imposible con cualquier otro modelo con la restricción de contener 4 bolas. En las respuestas a las preguntas 1b y 1c se debe considerar el modelo establecido y la *independencia* de las extracciones; pero también se explora la *aleatoriedad*, en el sentido de que el estudiante debe inferir que no es posible predecir con certeza lo que se obtendrá en un ensayo, o decir lo que ocurrió en el primer ensayo sin más información.

> *Situación 2.* Se tienen dos urnas: La urna B contiene 6 bolas en total y la urna C contiene 3 bolas en total (entre blancas y negras). Se hicieron 1000 extracciones al azar de cada urna. En la urna B se obtuvieron 324 bolas blancas y 676 bolas negras. En la urna C se obtuvieron 344 blancas y 656 negras. a) ¿Cuál urna elegirías para hacer la extracción 1,001, de tal forma que la bola resultante sea negra?; b) ¿Qué valor [*numérico*] le asignarías a que ocurra el evento 'Sacar una bola negra de la urna B en la extracción 1,001'?; c) ¿Qué valor [*numérico*] le asignarías a que ocurra el evento 'Sacar una bola negra de la urna C en la extracción 1,001'? Justifica tus respuestas.

En esta situación se espera que los estudiantes deduzcan los contenidos de ambas urnas: B: 2 blancas y 4 negras; C: 1 blanca y 2 negras. Una vez hecha esta hipótesis, la repuesta a la pregunta 2a es que *cualquier urna se puede elegir*, no hay diferencia entre ellas. La respuesta a la pregunta 2b, es 2/3, y la respuesta a la pregunta 2c es también 2/3.

La respuesta a la pregunta 2a se basa en la identificación de que ambas urnas son equivalentes, asumiendo que la diferencia entre los resultados y los valores esperados es parte de la *variabilidad* natural del fenómeno, ya que 9 y 11 de mil es relativamente poco. Se debe tener en cuenta también la *independencia* del resultado 'bola negra' respecto a lo ocurrido en ensayos anteriores. Asimismo, es necesario considerar la *aleatoriedad*, es decir, que con ninguna urna se puede asegurar obtener bola negra en la extracción 1001. En las respuestas a las preguntas 2b y 2c se deben considerar los modelos establecidos y la *independencia* de las extracciones.

> *Situación 3.* Los resultados de sacar 10 bolas de cada urna se presentan en seguida (con los contenidos establecidos en el inciso anterior: B: 2 blancas y 4 negras; C: 1 blanca y 2 negras):

Tabla 1: Resultados de 10 extracciones hechas de las urnas B y C (b = bola blanca, n = bola negra).

Urna B	*n*	*b*	*n*	*n*	*n*	*n*	*n*	*n*	*b*	*n*
Urna C	*b*	*n*	*n*	*n*	*n*	*b*	*b*	*b*	*n*	*b*

> a) ¿Cuál urna elegirías para hacer la onceava extracción de tal forma que la bola resultante sea blanca?; b) ¿Qué valor [*numérico*] le asignarías a que ocurra el evento 'Sacar una bola blanca de la urna B en la onceava extracción'?; c) ¿Qué valor [*numérico*] le asignarías a que ocurra el evento

'Sacar una bola blanca de la urna C en la onceava extracción'? Justifica tus respuestas.

En esta situación los estudiantes deben responder con base en la hipótesis establecida en la situación anterior: B: 2 blancas y 4 negras; C: 1 blanca y 2 negras. Por tanto, se espera que la respuesta a la pregunta 3a sea que *cualquier urna puede ser elegida*; la respuesta a las preguntas 3b y 3c es 1/3 en ambos casos.

Las preguntas se responden bajo la hipótesis de que las extracciones son *independientes* y teniendo en cuenta el modelo (Urna B: 2 blancas y 4 negras; Urna C: 1 blanca y 2 negras). Sin embargo, puede surgir la cuestión de si la *variabilidad* de los resultados observados (Urna B: 2 blancas y 8 negras, Urna C: 5 blancas y 5 negras) respecto al modelo es aceptable. Teniendo en cuenta la *aleatoriedad* se puede deducir que una desviación de ocurrencias de 2 o 3 resultados respecto al valor esperado es totalmente posible. El valor esperado está entre 6 y 7 (6.67), luego los resultados 8 y 5 no representan desviaciones mayores a 2 unidades.

Procedimiento de ejecución. La aplicación del cuestionario se efectuó dentro del horario de clases y los participantes tuvieron 50 minutos para responderlo. Se les comunicó que los resultados contribuirían a su evaluación; esto con el fin de que se comprometieran con los problemas y sus soluciones. Las respuestas fueron transcritas, analizadas y, posteriormente, clasificadas.

Resultados

Tabla 2: Respuestas de los alumnos a las preguntas.

	Situación 1			Situación 2			Situación 3		
Alumno	1a	1b	1c	2a	2b	2c	3a	3b	3c
A1	(3n, 1b)	n	n	B	677/1001	657/1001	C	3/11	6/11
A2	(2n, 2b)	n/a	n	B	677/1001	657/1001	C	2/11	6/11
A3	(#n > #b)	n	n	B	1	0	C	0	1
A4	(3n, 1b)	n	n	C	4/6	2/3	C	3/11	4/11
A5	(2n, 2b)	Cualquiera	n/a	B	677/1001	0.656	C	3/4	1/2
A6	(2n, 2b)	n/a	Cualquiera	B	676/1000	2/3	C	2/10	5/10
A7	(2n, 2b)	b/a	n/a	C	4/6	2/3	C	2/6	1/3
A8	(#n > #b)	n	n	B	676/1000	656/1000	C	2/10	5/10
A9	(2n, 2b)	n	b/a	C	676/1000	656/1000	C	2/10	1/2
A10	(2n, 2b)	b/a	n	B	4/6	2/3	C	1/5	1/2

n/a = negra, pero puede ser cualquiera; b/a = blanca, pero puede ser cualquiera.

En la Tabla 2 se presentan las respuestas puntuales, codificadas y resumidas, a cada una de las preguntas de las tres situaciones planteadas en el cuestionario. Con base en esa información se presentan los patrones expuestos por los alumnos en sus respuestas.

Patrones de respuesta en el problema 1.

- Reconocen el modelo equiprobable (2n, 2b), aceptan la variabilidad en la muestra como posible resultado del modelo y la ignoran al hacer predicciones.
- Reconocen el modelo equiprobable, pero consideran a la variabilidad en la muestra como significativa; es decir, que la proporción de bolas negras o blancas marca una tendencia.
- Deducen un modelo no-equiprobable (3n, 1b; #n > #b) con base en la observación de la proporción de resultados en la muestra.

Patrones de respuesta en el problema 2.

- Deducen los modelos implicados (4n, 2b en la urna B; 2n, 1b en la urna C), asumiendo que la diferencia entre los resultados y los valores esperados es parte de la *variabilidad* natural, pero no identifican que son equivalentes; asignan la probabilidad clásica a los eventos de acuerdo con el contenido de las urnas.
- Asignan la frecuencia relativa a los eventos teniendo a las muestras como único referente.
- Asignan la frecuencia relativa de la muestra más un éxito (bola negra), el cual atribuyen a la extracción 1001.
- Asigna el valor 1 ó 0 con base en la idea de la variable aleatoria binomial.

Patrones de respuesta en el problema 3

- No logra articular los modelos con las muestras respectivas, debido a que no acepta como natural la *variabilidad* que se observa; asigna la probabilidad clásica a los eventos, de acuerdo al contenido de las urnas.
- Olvidan los modelos de urna y asignan las frecuencias relativas a los eventos.
- Asignan la frecuencia relativa a los eventos, teniendo a las muestras como único referente.
- Asignan la frecuencia relativa de la muestra más un éxito (bola blanca), el cual atribuyen a la onceava extracción.
- Asigna el valor 1 ó 0 con base en la idea de la variable aleatoria binomial.

Aleatoriedad

La *aleatoriedad* se asocia con la impredecibilidad de los resultados y con la regularidad estadística (Moore, 1990). Empero, no fue posible dilucidar en las respuestas esta última característica, debido a la naturaleza estática de las situaciones. Sobre la primera característica, no todos los estudiantes pudieron sacar la consecuencia de que los resultados son impredecibles y expresarla en las respuestas en las que era posible y pertinente hacerlo. Por ejemplo, en la Situación 1, inciso b, se pregunta: "Si se realiza la extracción 1,001, ¿qué color de bola crees que se obtendría?" Una respuesta razonable es "cualquiera de los dos colores, bola blanca o bola negra". En cuatro respuestas (A4, A7, A8, A9) las expresiones de los alumnos ignoran la aleatoriedad. Sólo en una hay un cierto matiz al usar el verbo "obtendría", pero las otras respuestas son deterministas:

> A7: Obtendría bola blanca. P(B) = P(N), así que la probabilidad no se inclina hacia la bola negra o blanca, así que sólo extraje una bola blanca.

En contraste en seis respuestas (A1, A2, A3, A5, A6, A10) se utilizan expresiones que indican incertidumbre acerca lo que puede ocurrir:

> A5: Puede ser de cualquier color, pero en su mayoría, la probabilidad de que salga bola negra es mayor, ya que así se observa en la tabla de las 1000 extracciones.

Sólo en una respuesta se expresa que puede ocurrir cualquier color de bola en la extracción 1001 (A5). No obstante, en todas se considera que los resultados de la muestra influyen en la probabilidad de la extracción 1001. Esta atribución de más probabilidad a que ocurra una de las bolas la infieren los estudiantes de observar las muestras de resultados; es decir, no reconocen la independencia de las extracciones.

Independencia

La *independencia* se presenta cuando el resultado de un evento no altera las probabilidades de otros eventos (previos, simultáneos o futuros). Una de las manifestaciones de la percepción de la independencia por parte de los estudiantes se observa en la pregunta 2b: ¿Qué valor [*numérico*] le asignarías a que ocurra el evento 'Sacar una bola negra de la urna B en la extracción 1,001'? En tres respuestas (A4, A7, A10) se asigna la probabilidad 4/6, es decir, ignoran adecuadamente los resultados previos de la muestra:

> A10: 4⁄6, porque son 6 bolas con una probabilidad [*cantidad*] estimada de 4 bolas negras.

Mientras que seis estudiantes (A1, A2, A5, A6, A8, A9) asignan una probabilidad que depende de lo ocurrido en la muestra; estas respuestas olvidan el modelo de urnas que define la situación y se enfocan en los resultados observados; al hacerlo no consideran la independencia:

> A6: De que salga bola negra en la 1001 tenemos una probabilidad 676⁄1000.

Por otro lado, hemos visto en el apartado anterior sobre aleatoriedad, que ningún alumno asume totalmente la independencia de la experiencia, pues todos sienten que los resultados de las muestras ofrecen indicios que favorecen la probabilidad de negra (o blanca en un caso). Las respuestas dadas a la pregunta 2b, dan una indicación de que un concepto que interfiere en la consideración de la independencia es la interpretación frecuencial de probabilidad. En efecto, los estudiantes responden enfocando la situación hacia las frecuencias y olvidando el modelo de urnas.

Variabilidad

La *variabilidad* en probabilidad se refiere a las diferencias entre las frecuencias de los eventos y los valores esperados o las frecuencias relativas y la probabilidad de los eventos. En la pregunta 1a se explora el sentido de la variabilidad de los estudiantes, dándoles como dato un resultado de realizar 1000 extracciones de una urna (511 negras y 489 blancas) que contiene cuatro bolas en total, entre blancas y negras. Se les pide que propongan su posible distribución. La respuesta con base en una adecuada valoración de la variabilidad es la que propone el mismo número de bolas blancas que de negras. Esta fue, en efecto, la respuesta de cinco estudiantes (A2, A5, A6, A9, A10):

> A9: Hay 2 bolas blancas y 2 bolas negras. Su distribución es equivalente, ya que no hay gran diferencia entre ambas.

Para estos estudiantes la diferencia de los resultados respecto al valor esperado es una variabilidad natural del modelo equiprobable, dicho de otra manera, la diferencia no es significativa. En cambio, cuatro alumnos (A1, A3, A4, A8) creen que la diferencia es significativa y que el modelo debe reflejarlo:

> A1: Con los resultados dados se estimaría que hay un número mayor de bolas negras, ya que su probabilidad es más alta (511⁄1000), mientras que de la blanca es lo contrario (489⁄1000), ⇒ yo diría que hay 3 bolas negras y una bola blanca) a notar por su probabilidad.

En la pregunta 3c, se reflejan actitudes contrarias a la variabilidad; la situación es que los estudiantes tienen, por un lado, un modelo de urna de 2 bolas negras y una blanca y, por otro lado, un resultado de 10 extracciones de esa urna con 5 bolas negras y 5 blancas. Se les pide que asignen un valor numérico al evento “sale bola blanca”; la mayoría asignan una probabilidad basada en las frecuencias relativas (1/2, 5/10 o 6/11). Sólo uno lo hace con base en el modelo (1/3). La mayoría ignora el modelo, probablemente, porque se asume que no es posible que si la probabilidad de bola blanca es 1/3 el resultado de 10 extracciones sea 5 blancas y 5 negras. Al parecer los estudiantes creen que la variabilidad de los resultados con relación al valor esperado es más reducida de lo que realmente es cuando la muestra, o el número de repeticiones, es pequeña.

Conclusiones

La posibilidad de hacer inferencias válidas a partir de estimaciones o juicios de probabilidad presupone la articulación de los enfoques clásico y frecuencial, a través de al menos una versión informal de la Ley de los Grandes Números. Si bien es importante asignar probabilidades a los eventos y, frecuentemente, no es sencillo, sobre todo cuando implican fuerte combinatoria, también es necesario abarcar la dimensión relacionada con las grandes ideas de la probabilidad (Gal, 2005): Aleatoriedad, Independencia, Variabilidad, Predicción/Incertidumbre. En la exploración realizada hemos visto que problemas en el contexto familiar de urnas (que implican cálculos triviales), se producen diversas respuestas en las que subyacen diferentes niveles de aceptación y usos de las nociones espontáneas de los estudiantes sobre estas ideas. En la Tabla 3 se resumen las características de las respuestas, en relación con la aleatoriedad, la independencia y la variabilidad, a las preguntas del cuestionario, organizadas de manera jerárquica en los tres primeros niveles. En el cuarto nivel se describen las proposiciones normativas informales correspondientes que podrían haber emergido, pero en ninguna respuesta se presentaron de manera completa; es entonces un nivel a alcanzar mediante un diseño de la instrucción.

En el nivel 1, se cree que es posible hacer predicciones deterministas y se busca en los datos claves que permitan hacerlo; al asignar probabilidades se ignora el modelo y se toma la frecuencia relativa, afectándola con el resultado del evento cuya probabilidad se quiere estimar; asimismo, se considera que las diferencias, incluso en muestras pequeñas, son significativas; En el nivel 2, se hace una predicción determinista, pero matizada con expresiones que indican incertidumbre como "puede ser que…", mostrando que aceptan la impredecibilidad, aunque también buscan posibles indicios en los datos; utilizan el enfoque frecuencial para asignar la probabilidad ignorando el modelo y creen que las diferencias pequeñas en muestras grandes son significativas; En el nivel 3, se reconoce que no se pueden hacer predicciones determinadas por la naturaleza aleatoria de la experiencia, la asignación de probabilidades es con base en el modelo ignorando los resultados previos tanto en el caso de muestras pequeñas como grandes, y se estima que siempre hay pequeñas diferencias en las frecuencias de los eventos en las muestras grandes, aunque sólo de manera intuitiva, sin criterios numéricos; En el nivel 4, se precisan y completan los alcances del nivel 3, respecto a la aleatoriedad, aparte de la impredecibilidad, se reconoce la estabilidad a la larga; la independencia es una hipótesis que debe ser verificada antes de ignorar la evidencia y utilizar el modelo, y, finalmente, la variabilidad va de más a menos dependiendo del tamaño de la muestra.

Tabla 3: Niveles de respuesta en relación a las grandes ideas de probabilidad.

	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4
Aleatoriedad (Situación 1b y 1c)	Hace una predicción determinista.	Hace una predicción determinista matizándola con lenguaje probabilístico.	Reconoce que no se puede predecir el resultado con exactitud.	No se puede predecir con certeza el resultado de un ensayo, pero sí la estabilidad de las frecuencias alrededor de un valor (la probabilidad) en el largo plazo.
Independencia (Situación 2a, 2b, 2c, 3a, 3b y 3c)	Asigna probabilidades con base en las frecuencias relativas, teniendo como único referente a la muestra.	Asigna probabilidades con base en las frecuencias relativas, ignorando el modelo.	Asigna probabilidades con base en el modelo, pero se apoya en los resultados previos (muestra) para hacer una inferencia.	Se deben asignar las probabilidades con base en el modelo, y apoyarse en éstas al hacer una inferencia, ya que siguen siendo las mismas en cualquier ensayo.
Variabilidad (Situaciones 1a, 2a y 3)	Espera resultados sin variabilidad y/o considera que la diferencia entre las frecuencias en la muestra se conserva en cualquier muestra de igual o distinto tamaño.	Cree que cualquier diferencia es significativa, incluso las diferencias pequeñas en muestras grandes.	Estima que diferencias relativamente pequeñas no son significativas cuando la muestra es grande.	La variabilidad es grande cuando la muestra es pequeña, pero es poca cuando la muestra es grande (Observa el papel del tamaño de la muestra).

En la enseñanza de la probabilidad se suele enfatizar en las definiciones formales y en los procedimientos matemáticos sin una estrategia clara que propicie el surgimiento y el desarrollo de las grandes ideas; basta ver algunas revisiones de los tratamientos que se hacen en los libros de texto (Ortiz de Haro et al., 1996). No obstante, si los problemas van más allá de pedir sólo el cálculo de una probabilidad, pueden emerger nociones sobre las grandes ideas, que a la postre sean precisadas y desarrolladas mediante simulaciones que se acompañen de interacciones y discusiones.

Prospectiva

Los resultados que se reportan en este documento corresponden a los datos recabados mediante uno de tres cuestionarios que se aplicaron a un grupo de 30 alumnos de bachillerato (uno por cada 10 alumnos). Uno de los cuestionarios que no se reporta está constituido por las situaciones 1, 2 y 3 expuestas en el apartado de metodología. La diferencia radica en que en esta nueva versión el contenido de las urnas es conocido, pero no su respectivo modelo frecuencial, el cual fue predicho por los estudiantes. El otro cuestionario que no se menciona consta sólo de las situaciones 2 y 3, en las cuales se proporciona el modelo frecuencial, pero el contenido de la urna correspondiente es desconocido. Con el análisis de los nuevos datos se pretende extender y profundizar en los resultados expuestos en el presente estudio.

Referencias

Batanero, C. (2015). Understanding randomness: challenges for research and teaching. Conferencia en *CERME 9: 9th Congress of European Research in Mathematics Education*. Praga, Febrero, 2015.

Cañizares, M.J. (1997). *Influencia del razonamiento proporcional y combinatorio y de creencias subjetivas en las intuiciones probabilísticas primarias* (Tesis Doctoral). Universidad de Granada, España.

Chernoff, E. & Sriraman, B. (2014) Introduction. En E. J Chernoff, y B. Sriraman, (Eds.), *Probabilistic thinking: presenting plural perspectives* (xv-xvii). New York: Springer.

Gal, I. (2005). Towards "probability literacy" for all citizens: building blocks and instructional dilemmas. En G.A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 39–63). New York: Springer.

Ireland, S., & Watson, J. (2009). Building a connection between experimental and theoretical aspects of probability. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *4*(3), 339–370.

Jones, G.A., Langrall, C.W., Mooney, E.S. (2007). Research on probability. Responding to classroom realities. En F.K. Lester, Jr. (Ed.). *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 909-955). Charlotte, NC: NCTM &Information Age Publishing.

Konold, C., Madden, S., Pollatsek, A., Pfannkuch, M., Wild, C., Ziedins, I., Finzer, W., Horton, N. J., & Kazak, S. (2011). Conceptual challenges in coordinating theoretical and data-centered estimates of probability. *Mathematical Thinking and Learning, 13*, 68–86.

Metz, K. (1998). Emergent understanding and attribution of randomness: comparative analysis of the reasoning of primary grade children and undergraduates. *Cognition and Instruction*, *16*(3), 285─365.

Moore, D. (1990). Uncertainty. En Lynn Arthur Steen (Ed.). *On the Shoulders of Giants* (pp. 95-138). Washington: National Research Conuncil.

Nilsson, P. (2014). Experimentation in probability teaching and learning. En E.J. Chernoff y B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic thinking; presenting plural perspectives* (pp. 509─532). Dordrecht: Springer.

Ortiz de Haro, J.J., Batanero, C., & Serrano, L. (1996), Las frecuencias relativas y sus propiedades en los textos españoles de bachillerato. *EMA, 2*(1), 29-48.

Pratt, D., & Ainley, J. (Eds.) (2008). Introducing the special issue on informal inference. *Statistics Education Research Journal, 7*(2), 3-4.

Prodromou, T. (2012). Connecting experimental probability and theoretical probability. *ZDM Mathematics Education*, 44, 855 – 868.

Sthol, H., Rider, R., & Tarr, J. (2004). *Making connections between empirical and theoretical probability: Students' generation and analysis of data in a technology environment*. Recuperado Junio 5, 2013, de http://www.probexplorer.com/Articles/LeeRiderTarrConnectE&T.pdf