# La enseñanza de la Matemática en los primeros niveles de escolaridad

Por Amparo MARTINEZ SANCHEZ

## LA ENSEÑANZA DE LA MATEMATICA EN LOS PRIMEROS AÑOS DE ESCOLARIDAD

### I INTRODUCCION

Alrededor de los años cincuenta, a partir de los descubrimientos astronáuticos, la humanidad se hace consciente de la importancia del conocimiento de las nuevas estructuras de la llamada «Matemática moderna».

Desde entonces se registra en todo el mundo un movimiento renovador de la enseñanza de esta ciencia, desde los primeros niveles. Se celebran intercambios, Seminarios, Conferencias y Coloquios auspiciados por las principales organizaciones científicas y culturales del mundo en los que se dan cita los más destacados matemáticos de los distintos países.

En España al comienzo de la década de los sesenta, se constituye «La Comisión de Mejoramiento de la Matemática» dependiente del Instituto Jorge Juan del C.S.I.C., que también acomete la reforma de su enseñanza.

La llamada «Matemática moderna» conmovió y conmocionó la opinión pública mundial. De todas partes surgieron opiniones, comentarios y gran número de protestas de los que consideraban inadecuada e incluso nociva esta nueva ola, en la enseñanza de la matemática.

Los medios de comunicación social, frecuentemente se han hecho eco de la opinión pública con artículos, manifiestos y cartas de protesta de padres, maestros e incluso asociaciones en las que se expresa el desacuerdo por la enseñanza de «pensamientos extraños, sin contenido, que son los que caracterizan a la matemática moderna» y en las que se reitera la necesidad de enseñar cosas que «las mentes de los niños entiendan bien».

A pesar de este movimiento de descontento contra «los grupos de matemáticos revolucionarios», la enseñanza de la matemática, no interesa ahora solamente a los educadores y profesores. Interesa igualmente a los padres, a los gestores de la enseñanza, a todos los ciudadanos.

Han pasado los primeros embates, pero la polémica continúa vigente.

En la mayoría de los países se intenta una revisión y balance de resultados, después de la aplicación de la reforma.

Actualmente la Conferencia de Ministros de Educación de Europa Central, ha decidido la revisión de esta cuestión, encomendándola a comités escolares.

En el año 1972, la Sociedad Matemática de Francia, organizó un debate en la Sorbona, sobre la reforma de la enseñanza de la matemática. En el coloquio intervinieron, defensores y detractores de la reforma, procedentes del campo de la matemática y de la educación. En las conclusiones se hace un llamamiento a todos los preocupados por el problema para que intensifiquen el trabajo y la investigación. Se subraya la necesidad del rigor en la búsqueda de una actitud lógica respecto a la problemática de la enseñanza de la matemática. Por otro lado se solicita prudencia en la valoración de datos y acontecimientos, alertando contra el celo intempestivo de uno y otro lado. Finalmente aluden a la necesidad de contar con la participación de los estudiantes a la hora de emitir juicios valorativos en este punto.

En España, después de casi 10 años de la implantación de los nuevos programas de enseñanza de la Matemática, se plantea también la necesidad de verificar resultados.

En este contexto presentamos este trabajo, fruto de una colaboración con la mencionada «Comisión de Mejoramiento de la enseñanza de la Matemática».

Esta investigación ofrece los resultados obtenidos con la enseñanza diferenciada de la matemática en dos grupos de alumnos de primer nivel, con los que se desarrollaron programaciones paralelas, una siguiendo las directrices de la nueva matemática, y otra más de acuerdo con los planteamientos tradicionales.

Los datos obtenidos merecen ser considerados a la hora de evaluar la eficacia de la enseñanza de la Matemática en los primeros niveles educativos.

Antes de introducirnos en el análisis de la investigación, presentamos someramente nuestro pensamiento, en torno a dos aspectos que entendemos fundamentales: qué se pretende con la enseñanza de la Matemática, y análisis y planteamiento operativo de la enseñanza de la matemática coherente con los objetivos señalados.

## *Qué pretende la enseñanza de la Matemática*

El Bureau Internacional de l'Education, ha organizado una encuesta a escala internacional, para preguntar a cada uno de los países miembros, cuáles eran los fines de la enseñanza del cálculo en sus países. Mialaret, sintetiza las respuestas en tres categorías: suministrar al alumno una instrucción intelectual, desarrollar su formación intelectual y adaptarle a la vida (1).

El Profesor Abellanas, en el prólogo al texto Piloto de primer curso de bachillerato, dice que la enseñanza de la matemática debe tener una doble finalidad:

«Desarrollar la capacidad de pensar del alumno, enseñándole a precisar las ideas y a manejarlas con rigor y claridad.

Proporcionar esquemas mentales que le permitan resolver los problemas de la vida ordinaria y profesional» (2).

Explicitando los objetivos principales, pensamos que la enseñanza de la matemática debe desarrollar la capacidad creadora, la capacidad de abstracción, el rigor lógico, la capacidad de resolver problemas vitales y automatizar operaciones usuales; finalmente debe pretender la adquisición y uso adecuado de la expresión y el lenguaje matemático.

Todos estos aspectos deben ser tenidos en cuenta por el profesor.

Hemos señalado en primer lugar, el fomento de la capacidad creadora, una de las facultades más específicamente humanas de nuestra inteligencia. La enseñanza de la Matemática proporciona excelentes ocasiones para estimularla. El estudiante, guiado por el profesor, puede ejercitar esta capacidad, en la elaboración de los conceptos matemáticos.

Hablando del tema, dice D. de Prada, «No es suficiente saber introducir los conceptos, es preciso que los alumnos sepan plantear y resolver problemas en el más alto sentido de la palabra, que lleguen a descubrir leyes y crear estructuras formales» (3).

En este sentido deben plantearse al alumno, diversas situaciones que le sean familiares, hacer que capten las analogías entre ellas y finalmente que lleguen a crear el concepto del cual las distintas situaciones consideradas aparecen como casos concretos y particulares. Este proceso de creación, no se alcanza mediante un número determinado de pasos lógicos, sino a través de una intuición sugerida por la experiencia; intuición que escapa a todo análisis y a la que se llega por el salto en el vacío que exige todo acto creativo.

Supone de una parte el pensamiento que el Profesor Secadas llama implicativo, distinto del pensamiento lógico. «Este proceso de pensamiento, más heurístico que algorítmico, es divergente por cuanto se extrapola a caballo de las múltiples relaciones de los elementos de una determinada

---

(1) MIALARET, G.: Las Matemáticas. Cómo se aprenden, cómo se enseñan. Ed. Pablo del Río. Madrid 1977.

(2) ABELLANAS, P.: Texto Piloto de Matemáticas. Primer Curso. Ministerio de Educación Nacional. Madrid 1961.

(3) PRADA, D.: Matemáticas. ¿Un nuevo modo de pensar? Apuntes I.E.P.S. Narcea. Madrid 1976.

estructura; pero también convergente en tanto que orientado hacia la comprensión y solución. Se estructura sobre múltiples relaciones y de ahí, la convergencia».

De otro lado, como también señala este autor, la inteligencia creativa, parece que también tiene una gran carga de intuición «que implica un presentimiento o anticipación preconsciente de la solución, previo a la formulación verbal, y anterior al aprendizaje específico, siendo determinado en ocasiones por factores de naturaleza sensorio-motriz que operan en estratos arcaicos de pensamiento» (4).

En todo caso la creatividad, según el mencionado Profesor, supone una dimensión intelectual de ingenio, innovación y originalidad, un segundo factor afectivo, que entraña la sensibilidad ante problemas que otros no perciben y una tercera dimensión conativa de transformación eficaz y rendimiento relevante.

Es este un proceso difícil. La tarea del profesor en este punto es la de preparar el terreno, graduar las dificultades, facilitar el camino. Aquí alcanza pleno sentido la cuestión ya planteada, de si es posible enseñar a ser creativo (5).

Volviendo a la enseñanza de nuestra materia es interesante que ante las mismas situaciones, distintos alumnos lleguen a conceptos diversos. Se puede entonces razonar la conveniencia de adoptar unos u otros subrayando la importancia de la libertad y variedad de pensamiento.

Nos fijábamos en segundo lugar en el estímulo de la capacidad de abstracción, que pretende y prepara la creación del concepto.

Abstraer es «sacar de», prescindir de los aspectos accidentales en el estudio de una situación. Este «sacar de» presupone que el alumno ha tomado contacto con distintas experiencias a las cuáles aplica el criterio de la propiedad que quiere estudiar.

En esta línea dice Mialaret: «La formación matemática aporta al individuo, un enriquecimiento conceptual, acostumbra a los estudiantes a sobrepasar la realidad concreta para traducirla a una nueva lengua depurada, más abstracta pero que hace aparecer las semejanzas entre situaciones aparentemente muy alejadas unas de otras. Esta aproximación de situaciones, este agrupamiento de problemas distantes, da una gran potencia de razonamiento y permite descubrir las formas generales bajo las apariencias, simplificar de alguna forma nuestra visión del mundo para dar a nuestra acción más fuerza y eficacia. Bajo el problema más simple se esconde una forma matemática y sean cuáles sean las dificultades psicoló-

---

(4) SECADAS, F.: «Aportación al concepto de creatividad» en Innovación creativa, n.° 1 octubre 1976. Univers. Politec. de Valencia.

(5) Ver: TORRANCE, E. y PAUD, J. P.: Is creativity teachable? Pre. Delta Kaffa. Bloomington 1973.
BESSIS, P. y JAQUI, H.: Qui est-ce que la creativité. Dunod. París 1972.
BIONDI, A.: The creative process. D.O.K. Buffalo. New York 1973.

gicas que analicemos posteriormente la puesta en evidencia de estas estructuras es uno de los objetivos de la formación matemática (6).

En cuanto al desarrollo del rigor lógico, se ha considerado durante mucho tiempo como la aportación más interesante de la matemática en la formación del alumno.

Ciertamente la lógica es un instrumento imprescindible en la elaboración de la ciencia matemática. Como tal instrumento debe valorarse y cultivarse. Muchos problemas, incluso en la vida ordinaria, desaparecerían aplicando una buena lógica.

Sin embargo el proceso lógico que ha justificado durante mucho tiempo el nombre de «Ciencias exactas» dado a las matemáticas, encierra un aspecto que podríamos llamar mecánico en la actividad intelectual. En la actualidad un cerebro electrónico, dado el conveniente programa lo sigue lógicamente.

En la enseñanza de la matemática no se trata «únicamente de hacer adquirir hábitos de razonamiento correcto, sino de habituar a los alumnos a tomar conciencia de los propios pasos de su pensamiento.

Hace falta inducir a los niños a descubrir las reglas del razonamiento matemático, a comprenderlas y utilizarlas con el fin de proveerles de los marcos fundamentales sin los que un razonamiento no puede ser correcto» (7).

Señalábamos también al hablar de los objetivos, la necesidad del perfeccionamiento de la capacidad de automatización y de resolución de problemas, elementos esenciales para una buena adaptación a la vida.

La insistencia, tal vez excesiva, en el aspecto formativo de la matemática, ha hecho que últimamente se haya descuidado el adiestramiento del alumno en la realización de problemas, operaciones y automatismos necesarios en la vida ordinaria.

En este punto debemos esforzarnos por llegar a un sano equilibrio, no martirizar a los alumnos con operaciones monstruosamente largas, innecesarias y pesadas, pero sí dotarle de los hábitos necesarios para que pueda defenderse con agilidad ante problemas y cálculos habituales.

Finalmente sobre la iniciación y uso adecuado de la expresión matemática, hacemos nuestro el pensamiento de Mialaret que dice: «Todos estos pasos no se pueden efectuar sin un lenguaje particular que sepa aliar la precisión y la elegancia, la sobriedad y la densidad. Una buena formación matemática va acompañada automáticamente de la adquisición de una lengua depurada que gana en concisión, sin suprimir por ello una cierta forma de belleza. La perfección de una demostración matemática depende a la vez del rigor del razonamiento y de la forma en que esta demostración

---

(6) MIALARET, G.: Ob. cit. pág. 13.
(7) MIALARET, G.: Ob. cit. pág. 14.

se expresa. Así pues, iniciar a las matemáticas es iniciar a la vez un mejor uso de la lengua materna y el profesor de matemáticas debe considerarse también como un profesor de lenguaje» (8).

*Planteamiento operativo de la enseñanza de la Matemática*

Hemos tratado de responder a la pregunta qué pretendemos con la enseñanza de la matemática, nos planteamos ahora, cómo debe abordarse una enseñanza coherente con los objetivos propuestos.

Constatamos un hecho: gran parte de los alumnos sienten aversión hacia las matemáticas. Creemos que la postura de rechazo puede deberse principalmente a dos factores, falta de método y falta de fidelidad a la ciencia.

Analicemos el primero de los factores apuntados: falta de método. Con frecuencia se enseñan al niño ideas matemáticas ya elaboradas. La dificultad de su asimilación origina la reacción psicológica de rechazo y protesta ante la imposición.

Por otra parte en muchas ocasiones la matemática aparece completamente desligada de la realidad y es para el niño algo excesivamente complicado y sin ningún atractivo.

A propósito de esto Puig Adam dice: «Este profundo estancamiento en la enseñanza de la Matemática, se debe principalmente a que esta ciencia se fue transmitiendo de generación en generación, desde Euclides, siguiendo un método lógico-deductivo, el empleado por el hombre adulto, sin tener en cuenta para nada las etapas evolutivas por las que transcurre la vida del discente» (9). Los elementos de Euclides —observa Kleim— «fueron escritos no para niños sino para hombres muy acostumbrados a razonamientos abstractos».

La reforma de la enseñanza de la Matemática, pretende la introducción sucesiva de conceptos, relaciones, operaciones y estructuras lógicas en estrecha conexión con las actividades psicológicas específicas en las diversas etapas del desarrollo de la inteligencia del niño (10).

«Los fundamentos de las operaciones lógicas y las actividades psicológicas estrechamente conectadas (isomórficas) que se encuentran en las bases mismas del pensamiento matemático son de capital importancia para introducir al alumno en un conocimiento significativo y razonado de

---

(8) MIALARET, G.: Ob. cit. pág. 14.

(9) PUIG, A.: Tendencias actuales de la enseñanza de las Matemáticas en Atenas año XXI, n.° 207.

(10) Ver: PIAGET, J.: «Las estructuras matemáticas y las estructuras operatorias de la inteligencia» en Piaget, J. y otros: Enseñanza de las Matemáticas. Ed. Aguilar. Madrid 1968.

Es interesante consultar el estudio que hace Mialaret en torno a las operaciones y cálculo numérico en Ob. cit. Cap. 3.° pág. 25 ss.

esta disciplina. Toda metodología moderna y rigurosa de la enseñanza de la matemática debe lograr una correcta correspondencia didáctica de las operaciones lógicas y psicológicas en sus correlaciones genéticas del comportamiento; por ejemplo las propiedades (lógicas) de agrupamiento y las actividades (psicológicas) de clasificar; las de formar series (lógicas) y las tareas (psicológicas) de ordenar; las de adicionar (lógicas) y las actividades (psicológicas) de sumar.

Desde el punto de vista de la adecuación de los contenidos a los estudios del desarrollo infantil, se deberá tener en cuenta la transformación progresiva de las actividades mentales y la correlativa capacidad para estructurar y organizar los contenidos lógico-formales a través de las operaciones matemáticas» (11).

Por lo que se refiere al segundo de los aspectos citados, falta de fidelidad a la verdad matemática, hemos de enfrentarnos con que habitualmente se presentan en matemáticas muchos conceptos que se han venido transmitiendo sólo por tradición sin tener en cuenta su relación con otros conceptos, su inclusión en estructuras dentro de las cuáles aparecen como casos particulares y su aplicación a realidades concretas de la vida.

Para plantear adecuadamente la enseñanza hemos de considerar un hecho importante en la evolución de la investigación matemática. Durante los últimos cincuenta años se han hecho grandes descubrimientos que han obligado a una estructuración que encauce y unifique toda la matemática.

El trabajo con estructuras es característico de una ciencia madura y supone una economía de pensamiento. Las proposiciones demostradas para la estructura son válidas para los casos particulares de los que ella es una generalización.

A propósito de esto dice Dieudonne: «Ante la marea de publicaciones matemáticas de toda especie que aumenta cada año, el método axiomático solamente, permite canalizarlas de alguna manera, clasificarlas y unirlas a los resultados anteriores, simplificando mucho su expresión y reduciendo sus principios al estado puro. Para que pueda cumplir plenamente su misión es necesario que las estructuras algebraicas adquieran su ligereza y plasticidad al precio de una abstracción llevada al extremo a la que sólo se llega por un esfuerzo intelectual sostenido» (12).

Debemos tener en cuenta sin embargo que esta formación de estructuras en la matemática superior, no justifica por sí misma la introducción de esta matemática en los niveles elementales de la enseñanza.

Pero esta estructuración, fruto de una abstracción y generalización progresivas ha reducido a esquemas tan simples el campo de los conocimien-

---

(11) OÑATIVIA, O. y otros: Método integral para el aprendizaje de la matemática integral. Ed. Guadalupe. Buenos Aires 1977, pág. 19 ss.

(12) DIEUDONNE, M.: L'Astraction en mathematiques et l'evolution de l'algebre Delachaux et Niestle. Neuchâtel 1960, pág. 47 ss.

tos matemáticos, que las estructuras así logradas, responden en opinión de eminentes psicólogos a los procesos mentales más sencillos, lo que permite iniciar en ellos a los alumnos de los niveles básicos de la enseñanza (13).

Teniendo en cuenta lo expuesto, en el planteamiento de la enseñanza de la matemática consideramos dos aspectos, el informativo y el formativo.

Como criterio en la selección de las programaciones parece acertado que figuren por un lado los conocimientos que realmente van a ser útiles en la vida ordinaria; los que no tengan este carácter deben introducirse solamente en función de su valor formativo, esto es, en la medida en que reflejen el método matemático.

Estos puntos en su conjunto entrañan una forma viva de actuar capaz de desarrollar al hombre todo.

A propósito de esto dice Dieudonne: «Es la esencia del método matemático lo que debe ser objeto de la enseñanza, las materias enseñadas no deben ser más que ilustraciones bien elegidas» (14).

La orientación de los esfuerzos debe dirigirse pues a la selección de los conceptos y a la forma de presentarlos. Realizada esta doble elección, quedará siempre por hacer el trabajo personal de adaptación a cada caso concreto que es obra de cada maestro.

## II TRABAJO EXPERIMENTAL

Tomando como punto de partida los principios matemáticos y didácticos expuestos, esta investigación pretende demostrar que una enseñanza coherente con las estructuras de la matemática nueva, favorecerá en el alumno una formación y desarrollo integral de acuerdo con el proceso evolutivo.

Como objetivos concretos del trabajo se han considerado:

— Estudio de la facilidad/dificultad que encierra el nuevo enfoque de la matemática para el niño, en orden a los aspectos informativos.
— Determinación de la actitud del niño ante la enseñanza de la matemática.
— Estudio de los logros adquiridos respecto del desarrollo intelectual.

Para verificar los objetivos propuestos en la investigación, hemos desarrollado, durante un curso escolar, una programación diferenciada de la

(13) Ver: PIAGET, J.: La naissance de l'intelligence Chez l'enfant. Ed. Delachaux. Neuchâtel 1954.
PIAGET, J.: La epistemología genética. Ed. A. Redondo Bna. 1970.
(14) DIEUDONNE, M.: Ob. cit. pág. 38.

enseñanza de la Matemática en el primer nivel de escolaridad, en dos grupos de 50 alumnos; uno experimental —en el que se han seguido las directrices de la matemática nueva— y otro de control con programaciones más en coherencia con la enseñanza tradicional.

Antes y después del desarrollo de las programaciones, se aplicaron las correspondientes pruebas exploratoria y final, para verificar la consecución de los aspectos señalados.

La muestra ha sido tomada entre las alumnas del Instituto Veritas de Somosaguas (Madrid) todas ellas de seis años y que habían seguido un curso análogo de Enseñanza Preescolar en el mismo Centro. Pertenecen a una clase social de tipo medio alto y de ambiente cultural en general elevado, con motivaciones positivas a la enseñanza.

En la selección de los grupos se respeta la ordenación alfabética seguida en el Centro para la formación de grupos. Consultados los datos del gabinete de psicopedagogía, se observa que ambos grupos se distribuyen según la curva normal, con tendencia ligeramente superior.

Los instrumentos utilizados para la verificación de los objetivos propuestos han sido los siguientes:

A) *Prueba inicial*

— Análisis del dinamismo de desarrollo intelectual

- Adquisición de experiencias
  - — Capacidad de percepción
  - — Capacidad de percepción desde distintos puntos de vista. (Prueba de conservación de la materia) (15).
  - — Capacidad de atención
- Ordenación de experiencias
  - — Razonamiento
  - — Secuenciaciones lógicas
- Ejecución de ejercicios
  - — Automatización
  - — Realización de situaciones problemáticas

B) *Prueba de tipo informativo-matemático*

— Nociones sobre conjuntos (aplicada sólo al grupo experimental)
— Identificación y escritura de los 100 primeros números

(15) Ver: PIAGET, J.: Theorie du comportement et operations. P.U.F. París 1960 página 39 ss.

— Series numéricas
— Ejercicios de sistemas de numeración
— Operaciones con números naturales
— Resolución de sencillos problemas (16)

C) *Cuestionario sobre actitud ante el aprendizaje de la Matemática*

— Actitud ante los ejercicios.
— Actitud ante las explicaciones.
— Actitud general ante la Matemática (17).

Antes de la aplicación de la Prueba inicial se verificó la validez, fiabilidad y seguridad de la prueba, cuyos elementos en su mayor parte fueron seleccionados de tests tipificados y teniendo en cuenta índices proporcionados de dificultad (18).

*Resultados obtenidos en la prueba inicial*

Las diferencias de medias de los grupos en los distintos apartados de la prueba inicial, nos ofrecen los siguientes datos:

* *Prueba de razonamiento*

$$\bar{X}_C = 47,7 \quad ; \quad \sigma_{\bar{X}_C} = 2,2 \quad ; \quad \bar{X}_E = 47,I \quad ; \quad \sigma_{\bar{X}_E} = 2,2$$

$$\bar{X}_C - \bar{X}_E = 0,6 \quad ; \quad \sigma_{\bar{X}_C - \bar{X}_E} = 3,I$$

$$RC = -0,I93 < 1,96$$

* *Prueba de atención*

$$\bar{X}_C = 59,5 \quad ; \quad \sigma_{\bar{X}_C} = 2,I \quad ; \quad \bar{X}_E = 63,2 \quad ; \quad \sigma_{\bar{X}_E} = 2,7$$

$$\bar{X}_C - X_E = -4,I \quad ; \quad \sigma_{\bar{X}_C - \bar{X}_E} = 3,4$$

$$RC = -I,205 > I,96$$

(16) Estas pruebas se han realizado sobre la base del nivel exigido por los Cuestionarios Oficiales.
(17) Las pruebas completas pueden verse en:
MARTINEZ, A.: Problemática de la Enseñanza de la Matemática. Trabajo de investigación inédito. Seminario Pedagogía Experimental Universidad Complutense. Madrid 1968.
(18) Ver: YELA, M.: Apuntes de Psicología. Escuela de Psicología de Madrid.

* *Prueba de automatización*

$$\bar{X}_c = 65{,}1 \; ; \; \sigma_{\bar{x}_c} = 3{,}3 \; ; \; \bar{X}_E = 74{,}1 \; ; \; \sigma_{\bar{x}_E} = 2{,}4$$

$$\bar{X}_c - \bar{X}_E = -3{,}2 \; ; \; \sigma_{\bar{x}_c - \bar{x}_E} = 4 \; ;$$

$$RC = -0{,}8 < 1{,}96$$

* *Prueba de percepción*

$$\bar{X}_c = 59{,}5 \; ; \; \sigma_{\bar{x}_c} = 1{,}5 \; ; \; \bar{X}_E = 54{,}9 \; ; \; \sigma_{\bar{x}_E} = 1{,}9$$

$$\bar{X}_c - \bar{X}_E = 4{,}6 \; ; \; \sigma_{\bar{x}_c - \bar{x}_E} = 2{,}4$$

$$RC = 1{,}916 < 1{,}96$$

* *Prueba de conservación de la materia. Porcentajes cualitativos*

| Estadíos | | Grupo C | | Grupo E | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | n | % | n | % |
| 1 | Está esclavizado a la percepción unilateral. No tiene reversibilidad. | 6 | 12 % | 8 | 16 % |
| 2 | Afirma la conservación en caso de poca diferenciación en las vasijas. Poca relación de reversibilidad. | 32 | 64 % | 29 | 58 % |
| 3 a) | Ha logrado la conservación con el razonamiento de la identidad no propiamente operativo. «Debe ser igual porque es el mismo líquido» (contestación más común). | 12 | 24 % | 13 | 26 % |

Las diferencias observadas en los distintos apartados de la prueba inicial, prácticamente son no significativos al nivel de confianza elegido.

En cuanto a la prueba de conservación de la materia —líquidos—, se obtienen resultados muy semejantes en los dos grupos, alrededor de los tres estadíos primeros.

*Programaciones desarrolladas durante el curso*

Durante un curso escolar se desarrollaron programaciones con directrices diferenciadas en la enseñanza de la Matemática nueva y tradicional. En ambos casos se cubren las orientaciones correspondientes al nivel de enseñanza que nos ocupa (19).

Después del desarrollo de estas programaciones se aplicó una prueba final con tres partes:

— Repetición de la prueba inicial.
— Prueba informativo-matemática.
— Cuestionario de actitud ante la enseñanza de la Matemática.

*Resultados obtenidos en las pruebas finales*

A) Repetición de la prueba inicial.

* *Prueba de razonamiento*

$$\bar{X}_C = 64,1 \quad ; \quad \sigma_{\bar{x}_C} = 2,2 \quad ; \quad \bar{X}_E = 72,5 \quad ; \quad \sigma_{\bar{x}_E} = 2,3$$

$$\bar{X}_C - \bar{X}_E = -8,4 \quad ; \quad \sigma_{\bar{x}_C - \bar{x}_E} = 3,1$$

$$RC = -2,70 > 2,56$$

* *Prueba de atención*

$$\bar{X}_C = 71,3 \quad ; \quad \sigma_{\bar{x}_C} = 2,7 \quad ; \quad \bar{X}_E = 70,5 \quad ; \quad \sigma_{\bar{x}_E} = 2,9$$

$$\bar{X}_C - \bar{X}_E = 0,8 \quad ; \quad \sigma_{\bar{x}_C - \bar{x}_E} = 3,1.$$

$$RC = 0,258 < 1,96$$

* *Prueba de automatización*

$$\bar{X}_C = 86,3 \quad ; \quad \sigma_C = 1,6 \quad ; \quad \bar{X}_E = 81,7 \quad ; \quad \sigma_E = 2,3$$

$$\bar{X}_C - \bar{X}_E = 4,6 \quad ; \quad \sigma_{\bar{x}_C - \bar{x}_E} = 2,7$$

$$RC = 1,703 < 1,96$$

(19) El planteamiento detallado de estas programaciones puede verse en MARTINEZ, A.: Trabajo cit.

* *Prueba de percepción*

$\bar{X}_c = 71{,}7$ ; $\sigma_c = 2{,}7$ ; $\bar{X}_E = 78{,}1$ ; $\sigma_{\bar{X}_E} = 1{,}9$

$\bar{X}_c - \bar{X}_E = -7$ ; $\sigma_{\bar{X}_c - \bar{X}_E} = 3.2$

$RC = -2{,}18 > 1{,}96$

* *Prueba de conservación de líquidos. Porcentajes cualitativos*

| Estadíos | | Grupo C n — % | Grupo E n % |
|---|---|---|---|
| 1 | Está esclavizado a la percepción unilateral. No tiene reversibilidad. | — | 1 — 2 % |
| 2 | Afirma la conservación en caso de poca diferencia en las vasijas. Poca reversibilidad. | 4 8 % | 2 4 % |
| 3 a) | De identidad. No propiamente operativo. «Debe ser igual porque es el mismo líquido». | 5 10 % | 4 8 % |
| 3 b) | De reversibilidad. «Si lo vuelvo a echar en el vaso anterior veo que ocupa lo mismo. Hay lo mismo que en el primero». | 21 42 % | 9 18 % |
| 3 c) | De plena operatividad. Aparición de la cantidad multidimensional. Argumento de la plena conservación. «Es más alto pero es más estrecho». Resiste a las contrapruebas. | 20 — 40 % | 34 — 68 % |

B) Prueba informativo-matemática.

$\bar{X}_c = 50{,}1$ ; $\sigma_{\bar{X}_c} = 2{,}2$ ; $\bar{X}_E = 61{,}3$ ; $\sigma_{\bar{X}_E} = 2{,}1$

$\bar{X}_c - \bar{X}_E = -11{,}2$ ; $\sigma_{\bar{X}_c - \bar{X}_E} = 3.0$

$RC = -3{,}77 > 2{,}57$

C) Actitudes respecto a la enseñanza de la matemática.

* *Actitud ante los ejercicios*

| | Grupo C | | Grupo E | |
|---|---|---|---|---|
| | n | % | n | % |
| — ¿Son bonitos los ejercicios que haces en matemáticas? ... ... ... ... ... ... ... ... ... | 23 | 46 % | 46 | 92 % |
| — ¿Te gusta hacer ejercicios de matemáticas con todas las niñas y la profesora? ... ... | 30 | 60 % | 47 | 94 % |
| — ¿Te gusta hacer ejercicios de matemáticas en el trabajo personal? ... ... ... ... ... ... | 15 | 30 % | 38 | 76 % |
| — ¿Son aburridos los problemas y ejercicios de matemáticas? ... ... ... ... ... ... ... ... | 28 | 56 % | 1 | 0,5% |
| — ¿Haces los ejercicios de matemáticas porque te obligan? ... ... ... ... ... ... ... ... | 12 | 24 % | 4 | 8 % |

Nota: Las puntuaciones corresponden a las respuestas afirmativas.

* *Actitud ante las explicaciones*

| | Grupo C | | Grupo E | |
|---|---|---|---|---|
| | n | % | n | % |
| — ¿Crees que comprendes las explicaciones? ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... | 35 | 70 % | 45 | 90 % |
| — ¿Estás deseando que termine la explicación? ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... | 23 | 46 % | 9 | 18 % |
| — ¿Son pesadas o aburridas las explicaciones de matemáticas? ... ... ... ... ... ... | 40 | 80 % | 6 | 12 % |
| — ¿Te gustaría hacer otras cosas más que oir las explicaciones de matemáticas? ... | 49 | 98 % | 20 | 40 % |
| — ¿Tienes ganas de que llegue la hora de explicar matemáticas? ... ... ... ... ... ... | 2 | 4 % | 32 | 64 % |

* *Actitud ante la matemática*

| | Grupo C n | Grupo C % | Grupo E n | Grupo E % |
|---|---|---|---|---|
| — ¿Te gusta la matemática? ... ... ... ... ... | 5 | 10 % | 32 | 64 % |
| — ¿Te parece que la entiendes bien? ... ... | 20 | 40 % | 42 | 84 % |
| — ¿Te parece bonito el estudio de la matemática? ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... | 18 | 36 % | 45 | 90 % |
| — ¿Preferirias que no se estudiaran matemáticas? ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... | 23 | 46 % | 3 | 6 % |
| — ¿Te gustaría ser «una matemática famosa» cuando fueses mayor? ... ... ... ... ... | 4 | 8 % | 18 | 36 % |

*Interpretación de resultados*

Repetida la prueba sobre dinamismo de la inteligencia en la adquisición, ordenación y ejecución de experiencias y cotejados los resultados iniciales y finales, tenemos que:

— Las diferencias de medias no son significativas en cuanto a atención y automatización, aspectos en los que la media es superior en el grupo de control. Son significativas en cambio en razonamiento al 1 por 100 de confianza y en percepción al 5 por 100.

— En cuanto a las experiencias realizadas para verificar la percepción desde distintos puntos de vista, las diferencias de porcentajes son principalmente cualitativas.

— En la prueba de carácter informativo-matemático, la diferencia de medias es significativa a favor del grupo experimental al nivel de confianza del 1 por 100. Las mayores diferencias de aciertos se dan en las preguntas correspondientes a seriaciones numéricas, sistemas de numeración y problemas.

— Por lo que se refiere a la actitud detectada por medio del Cuestionario sobre la enseñanza de la matemática, las diferencias de porcentajes son marcadas, a favor del grupo experimental.

## III CONCLUSIONES

A la vista de los resultados obtenidos, podemos concluir diciendo —dentro de los límites de la experimentación— que las nuevas directrices de la matemática en nuestro trabajo, no sólo han sido adecuadas a la capacidad infantil sino que con ellas se han logrado en gran medida los objetivos que nos proponíamos con la enseñanza de la matemática.

Ello nos pone de manifiesto que realmente es posible llevar esta orientación de la Matemática a los primeros niveles de enseñanza. «No es sólo cuestión de revalorizar la enseñanza —dice el Profesor Abellanas— se trata de elevar el nivel de las mejoras humanizando la enseñanza de los más débiles» (20).

Como síntesis de nuestro trabajo presentamos una serie de sugerencias didácticas agrupadas en tres apartados:

### A) *Respecto de la Matemática*

La Matemática es una ciencia de la que hasta ahora se han estudiado sólo unos aspectos y desde un punto de vista. No es que las cosas hayan cambiado radicalmente cuando hablamos de una matemática nueva. Lo que ha cambiado es su estructuración; la estudiamos ahora con un nuevo enfoque, en un sentido más pleno.

El aprendizaje de la matemática no implica pues, el aprendizaje de una axiomática, sino el ejercicio gradual del razonamiento a través de la significación de las operaciones aritméticas fundamentales.

La Matemática no forma una ciencia aparte, desconectada del resto del saber. No olvidemos que estamos queriendo formar hombres y que la especialización debe venir después; ahora todo el saber que se imparte al niño debe estar íntimamente conexionado y sistematizado teniendo en cuenta las etapas evolutivas del desarrollo infantil.

Decíamos que la Matemática es una ciencia, no existe pues la matemática del niño y la del adulto. El niño en cada una de las etapas de su evolución —la enseñanza debe tenerlas en cuenta y adaptarse a ellas— puede recibir una serie de nociones, las que es capaz de asimilar, esas han de ser presentadas tal como son. Las que no le sean asequibles, se reservarán para más adelante, cuando sea oportuno.

No es conveniente presentar la Matemática dividida en compartimentos separados, desconexos entre sí; por el contrario debe presentarse formando un todo organizado y armónico, teniendo en cuenta la génesis del pensamiento matemático de la humanidad y la evolución, en cierto modo paralela, del pensamiento del niño que se desarrolla concéntricamente.

---

(20) ABELLANAS, P.: Discurso de clausura de las Jornadas Hispano-Francesas. Instituto Juan de la Cierva. Madrid, abril 1967.

Es interesante llevar al niño a redescubrir la matemática así como a formarse un entendimiento disciplinado, sometido rigurosamente a un orden que le llevará a adquirir fidelidad en las representaciones, rigor en los raciocinios, facilidad y tenacidad en la retención y flexibilidad en el trabajo.

### B) *Sobre la actitud del profesor*

El maestro desde las primeras etapas de la formación, debe conocer que los ejercicios de pensamiento que el niño realiza son ya matemáticas, puesto que ya están estructurando su pensamiento. Por lo tanto debe estar advertido y tener constantemente presentes las estructuras fundamentales que debe poner en evidencia.

Es interesante presentar al niño las primeras observaciones dándoles un sentido matemático. De esta manera se le hará participar en la construcción activa del edificio matemático a partir de situaciones simples y familiares desembocando a su vez en situaciones de utilidad vital, poniendo la meta en la contribución al progreso de la humanidad.

El papel del profesor en el nivel de enseñanza básica es el de conducir gradualmente a la construcción de los primeros conceptos ligados directamente al campo de la experiencia. Debe presentar ideas fácilmente asimilables y adaptadas a la capacidad del niño. Debe estimular el ansia de saber, despertar el interés, favorecer la reflexión y el trabajo personal de acuerdo con el desarrollo psíquico.

### C) *En cuanto al planteamiento y desarrollo del trabajo*

Debe tenerse en cuenta que existen razones de tipo didáctico para que los razonamientos abstractos y deductivos sólo sean asequibles cuando el que los sigue tiene ya nociones claras y preestablecidas que ha adquirido yendo de lo particular a lo general por el método inductivo.

Todos los ejercicios y nociones deben formar un todo perfectamente sistematizado y en secuencias progresivas.

La transmisión del vocabulario científico exige el mayor respeto por lo que se hace indispensable precisar las denominaciones. El vocabulario no sólo es admitido por el alumno sino que es deseado. Como no se puede exigir un rigor grande, es preferible huir de las definiciones. Importa acostumbrar a que las expresiones más triviales en matemáticas tengan riqueza de contenido; por ejemplo: «sea el segmento «A B» del conjunto de segmentos de la recta «a».

Los signos de puntuación deben emplearse con sentido propio y desde el principio. Conviene no confundir los signos de puntuación gramatical con los empleados en matemáticas.

En la actividad matemática no se debe olvidar la importancia de la autocorrección, previniendo en lo posible los errores que se pueden presentar. Así mismo es de interés que antes de que se automaticen soluciones hayan sido asimiladas (21).

Por todo lo expuesto es evidente que la enseñanza adecuada de la Matemática ofrece inmensas posibilidades para la formación del hombre entero, creador y ordenador de realidades.

Hay un camino abierto y esperanzador en la línea de la investigación y el perfeccionamiento de la enseñanza del lenguaje matemático, como parte integrante del lenguaje del hombre. Y el hombre es lenguaje.

---

(21) A la hora de acometer una programación es interesante consultar:
National Council of Teachers of Mathematics: «Matemática Moderna para profesor de Enseñanza Elemental». Santillana. Madrid 1976.
POROT, L.: Actualización de la Matemática. Teide. Bna. 1975.
PRADA, D. y otros: Textos Barquero. Ed. Narcea. Madrid 1973.
PAPY: Les enfants et la mathematique. Didier Bruxelles 1970.
ROANES, E.: Matemáticas para Profesores de E.G.B. Anaya 1973.
Es también de gran interés el estudio de algunas dificultades particulares en la enseñanza de la Matemática, realizado por MIALARET, G. Ob. cit. pág. 67 ss.