

DISEÑO, IMPLEMENTACIÓN Y ANÁLISIS DE UNA SECUENCIA DE ENSEÑANZA DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL EN UN CURSO UNIVERSITARIO

LILIANA TAUBER, VICTORIA SÁNCHEZ Y
CARMEN BATANERO

Este trabajo se centra en la enseñanza y aprendizaje de la distribución normal en un curso introductorio de estadística en la Universidad, y se fundamenta en un marco teórico que plantea el significado institucional y personal de los objetos matemáticos. En particular, se describe el diseño de una experiencia de enseñanza de la distribución normal apoyada en el uso del ordenador y se analizan los avances, dificultades y errores que presentan los alumnos durante el desarrollo de dicha experiencia. En el estudio se presta especial atención a todo lo que implica en la enseñanza de estadística la introducción del computador. Pretendemos aportar información válida sobre la enseñanza/aprendizaje de la estadística en cursos universitarios, que pueda ser completada y ampliada en futuras investigaciones.

This paper focuses on the teaching and learning of the normal distribution in an introductory course of statistics at the university level. It is based on a theoretical framework about the personal and institutional meanings of the mathematical objects. In particular, we describe the design of a computer-based teaching experience related to the normal distribution. We analyse the advances, difficulties, and mistakes that arise in the students in the development of that experience. In our study, we especially consider what the use of the computers implies on the teaching of statistics. We try to provide useful information about the teaching/learning of statistics at university courses that can be completed and enlarged on future research.

Palabras claves: enseñanza, aprendizaje, distribución normal, educación superior, significados de objetos matemáticos, uso de tecnología.

INTRODUCCIÓN

La *distribución normal* es de gran relevancia en estadística debido a que muchos fenómenos físicos, biológicos, psicológicos o sociológicos, pueden

ser adecuadamente modelizados mediante ella. Es también una buena aproximación de otras distribuciones, como la distribución binomial, para ciertos valores de sus parámetros. Los teoremas de límite en cálculo de probabilidades aseguran que la media y otros parámetros de las muestras aleatorias tienen una distribución aproximadamente normal para muestras de suficiente tamaño, incluso en poblaciones no normales, y muchos métodos estadísticos requieren la condición de normalidad para su correcta aplicación (Wilensky, 1995, 1997).

Centrándonos en la problemática didáctica que plantea su enseñanza, este concepto puede introducirse con diversos enfoques, más o menos formales, dependiendo de a quien va dirigida la enseñanza. En el caso de nuestro estudio, en el que trabajamos con alumnos con conocimientos matemáticos y estadísticos muy diversos, pretendemos proporcionarles las nociones básicas que puedan servirles en sus respectivas profesiones. Hemos optado por partir del análisis exploratorio de datos y no abordaremos el tratamiento de la distribución normal desde un enfoque matemático formal, dándole prioridad a la visualización y simulación de fenómenos aleatorios, que nos servirán de apoyo para introducir el concepto de distribución normal sin necesidad de utilizar teoremas o formalismos matemáticos. Esta opción nos lleva a tomar decisiones tanto con relación a la elaboración de materiales que serán utilizados en la secuencia de enseñanza, como en la selección de los conceptos estadísticos que sirvan como base para la introducción de la distribución normal.

Como consecuencia de todo lo anterior, en el trabajo que aquí presentamos nos planteamos el estudio de la enseñanza y aprendizaje de la distribución normal en un curso introductorio universitario de estadística aplicada. Este se fundamenta en un marco teórico que plantea el significado y comprensión tanto institucional como personal de los objetos matemáticos. Este trabajo forma parte de un proyecto más amplio (Tauber, 2001; Batanero et al., 1999) y está situado dentro de una línea de investigación que se ocupa de la enseñanza de la estadística en el ámbito universitario (Estepa, 1993; Vallecillos, 1996; Sánchez-Cobo, 1999).

En particular, aquí describiremos la forma en que se ha organizado una experiencia de enseñanza de la distribución normal apoyada en el uso del ordenador y profundizaremos en los avances, dificultades y errores que surgen en los alumnos en el desarrollo de dicha experiencia. Con nuestro trabajo tratamos de aportar alguna información que pueda ser útil y plantear preguntas que puedan ser completadas en estudios posteriores.

FUNDAMENTOS DEL ESTUDIO

Son pocas las investigaciones previas específicamente centradas sobre el aprendizaje y la enseñanza de la distribución normal en alumnos universitarios. Centrándose en los estudiantes universitarios, Huck, Cross y Clark (1986) han identificado dos concepciones erróneas sobre las puntuaciones normales tipificadas: algunos alumnos creen que todas las puntuaciones tipificadas han de tomar un valor comprendido entre -3 y $+3$, mientras que otros estudiantes piensan que no hay límite para los valores máximo y mínimo de estas puntuaciones. Hawkins, Joliffe y Glickman (1992) describen errores que cometen estos universitarios en la aproximación de una distribución binomial mediante la distribución normal, que se deben a la no diferenciación entre lo discreto y lo continuo, lo que lleva a aplicar la corrección por continuidad de una forma mecánica, sin entender su significado. Méndez (1991) compara la comprensión del teorema central del límite en estudiantes de un curso introductorio y estudiantes expertos (que cursaban un doctorado), observando que ninguno de los grupos dominaba el vocabulario técnico. Su estudio muestra también que los estudiantes a nivel de doctorado mostraban una comprensión excesivamente formal del teorema, mientras que los estudiantes del curso introductorio usaban los datos disponibles sin tener en cuenta la población de la que provenían y sin considerar el tamaño de muestra.

Otros estudios se han ocupado del diseño de cursos para estudiar diversos factores que pueden afectar la enseñanza/aprendizaje de la distribución normal y conceptos relacionados. Así, delMas, Garfield y Chance (1999) describen el programa *Sampling Distribution* y diseñan actividades educativas para guiar a sus estudiantes en la exploración del teorema central del límite. En su experimento, los estudiantes podían cambiar la forma de la distribución teórica de la población (normal, sesgada, bimodal, uniforme, en forma de U) y simular la distribución muestral de diferentes estadísticos para varios tamaños de muestra. El aprendizaje se evalúa midiendo el cambio entre pre-test y post-test en un instrumento diseñado por los autores específicamente para evaluar la comprensión de la forma y variabilidad de las distribuciones muestrales y el efecto del tamaño de la muestra. Incluso cuando sus resultados demostraron un cambio significativo positivo en los estudiantes como consecuencia de la instrucción, delMas, Garfield y Chance (1999) avisan que el uso de la tecnología no siempre produce una comprensión efectiva de las distribuciones muestrales. Los autores sugieren que las nuevas actividades y la nueva información sobre el software pueden interferir con el aprendizaje de los estudiantes sobre las distribuciones muestrales,

cuya comprensión requiere la integración de las ideas de distribución, promedio, dispersión, muestra y aleatoriedad.

Un punto también importante son las actitudes. Wilensky (1995, 1997) define la *ansiedad epistemológica*, como el sentimiento de confusión e indecisión que sienten la mayoría de los estudiantes frente a las distintas formas de resolución de un problema, que es particularmente elevada en el caso de la estadística. En sus entrevistas a personas de diversas edades, la mayoría de ellos profesionales con conocimientos de estadística, les plantea resolver un problema por medio de simulación en computador. Aunque, en general, los sujetos de su investigación sabían resolver problemas relacionados con la distribución normal, no eran capaces de justificar el uso de la distribución normal en lugar de otro concepto o distribución, mostrando una acusada ansiedad epistemológica.

Todos estos trabajos nos han aportado información sobre las dificultades de aprendizaje de estudiantes universitarios relacionadas con la distribución normal, y señalado la necesidad de avanzar en el diseño de cursos que permitan superarlas. Además, nos han permitido apreciar la necesidad de la elección de marcos teóricos compatibles que, desde una perspectiva investigadora que vaya más allá de una experiencia de innovación, permitan interpretar los datos y posibiliten la valoración de los resultados obtenidos a través de dichos cursos.

MARCO TEÓRICO Y OBJETIVOS

Este trabajo se apoya en una teoría que plantea el significado y la comprensión de los objetos matemáticos, en donde se diferencia la dimensión personal e institucional, tanto para los objetos, como para los significados, entendidos estos últimos desde un punto de vista pragmático (Godino, 1996; Godino y Batanero, 1998). Un supuesto epistemológico básico es que los objetos matemáticos (p.e., la distribución normal) emergen de la actividad de resolución de problemas mediada por las herramientas semióticas disponibles en los contextos institucionales. El significado de los objetos matemáticos se concibe como el sistema de prácticas ligadas a *campos de problemas* específicos y se diferencian cinco tipos de elementos:

Elementos extensivos: Las situaciones y campos de problemas de donde emerge el objeto;

Elementos ostensivos: Las herramientas semióticas disponibles para representar o para operar con los problemas y objetos involucrados;

Elementos actuativos: Procedimientos y estrategias para resolver los problemas;

Elementos intensivos: Propiedades características y relaciones con otras entidades como definiciones, teoremas, etc.

Elementos validativos: Argumentos que sirven para justificar o validar las soluciones.

Estos elementos pueden variar, según los contextos institucionales y personales en que se afronta la resolución de un campo de problemas. La distribución normal, por ejemplo, no tiene el mismo significado en la enseñanza secundaria que en un curso de estadística para investigadores o para un estadístico que desarrolla nuevos métodos de inferencia. Ello nos lleva a diferenciar entre “*significados institucionales*” y “*significados personales*”, según se traten de prácticas socialmente compartidas, o por el contrario, se refieran a manifestaciones idiosincrásicas de un sujeto individual. Dicho sujeto, al tratar de resolver ciertas clases de problemas construye un significado personal de los objetos matemáticos implicados. Cuando este sujeto entra a formar parte de una institución (por ejemplo, la universidad) puede ocurrir que las prácticas adquiridas individualmente entren en conflicto con las admitidas para dicho objeto en el seno de la institución, por lo que se debe tratar de realizar un proceso de acoplamiento progresivo entre significados personales e institucionales. Estos procesos deberían conducir a una comprensión gradual de un objeto matemático.

De esta forma, se concibe que un sujeto ha comprendido el significado de un objeto cuando es capaz de reconocer sus propiedades y representaciones características, de relacionarlo con los restantes objetos matemáticos y de usar este objeto en toda la variedad de situaciones problemáticas prototípicas dentro de la institución correspondiente. Se entiende por tanto que la comprensión alcanzada por un sujeto en un determinado momento difícilmente será total o nula, sino que abarcará aspectos parciales de los diversos componentes (Godino y Batanero, 1998). Como consecuencia directa de esta concepción de comprensión, se considera a la evaluación como el estudio de la correspondencia entre los significados institucionales y personales. El que el marco teórico adoptado nos permita tanto elaborar una secuencia de enseñanza como valorarla a través de la comparación de significados hace que sea compatible con los objetivos que nos planteamos:

- Elaborar una secuencia didáctica sobre la distribución normal, incorporando al ordenador como objeto de estudio y herramienta didáctica, de acuerdo con nuestro marco teórico y las características del curso (Fijación del significado institucional pretendido).

- Describir los elementos de significado efectivamente implementados en la secuencia de enseñanza (Determinación del significado institucional implementado).
- Describir los elementos de significado aplicados por el grupo de alumnos participantes en las actividades planificadas
- Valorar la secuencia en base a la comparación de ambos significados y a las dificultades detectadas.

METODOLOGÍA

En el estudio, adoptamos un enfoque descriptivo y exploratorio en el inicio de la investigación, pasando a un enfoque interpretativo en la última fase. No es sin embargo una investigación experimental, puesto que no se realiza un control y manipulación de variables independientes, sino que se engloba en la investigación cuasi - experimental (Cook y Campbell, 1979).

Participantes

Los participantes fueron alumnos de los primeros años universitarios que cursaban una asignatura de estadística en ciencias humanas y sociales (educación, psicología, empresariales), y que eligieron esta materia en forma voluntaria (por tanto suponemos que tienen interés y actitudes positivas hacia esta materia). Eran alumnos con un conocimiento variado (aunque en general muy escaso) de estadística y que desconocían el uso de paquetes estadísticos.

El curso donde se realizó la experiencia es una asignatura de libre configuración de “Análisis de datos y su didáctica”, de 9 créditos de duración (90 horas a lo largo del año), impartida en la Facultad de Educación de la Universidad de Granada. La mayoría de los estudiantes provienen de la licenciatura en Pedagogía, pero también hay alumnos de Magisterio, Psicología, Psicopedagogía, Empresariales y eventualmente Ingeniería o Informática. Los conocimientos de los alumnos eran muy variados, pero ninguno conocía el paquete estadístico o los aspectos prácticos de aplicación de la estadística antes de comenzar el curso. Algunos desconocían totalmente el uso de procesadores de texto o recursos informáticos. Dentro de este curso, el estudio de la distribución normal se desarrolló cuando ya habían transcurrido algunas semanas de comienzo del mismo, ocupando un total de 10 sesiones.

Los grupos que participaron en la investigación son los alumnos de tres cursos sucesivos de la mencionada asignatura, en los cursos 97-98, 98-99 y 99-2000. En el primero de estos cursos participó un grupo de 57 alumnos, con los que se experimentó una primera aproximación a la propuesta de en-

señanza, aunque sólo se analizaron los datos tomados en la evaluación final de un total de 12 alumnos. Esta evaluación cuyos resultados han sido publicados, (Tauber y Batanero, 1998, Batanero et al., 1999, Tauber et al., 2000) sirvió principalmente para poner a punto una primera versión de la secuencia de enseñanza y de la prueba con computador. En el curso 1998-99 participaron 78 alumnos, siendo 65 los alumnos que se matricularon en el curso 1999-2000. El número de alumnos que completaron los instrumentos de recogida de datos fue variado, siendo 21 y 30 alumnos respectivamente los que participaron en todos y cada uno de ellos. Estos alumnos son los que aquí vamos a considerar.

Selección de elementos de significado: secuencia de enseñanza

A partir de un análisis de los libros de texto universitarios, que permitió la identificación del *significado institucional de referencia* en este nivel de enseñanza (Batanero et al., 1999; Batanero y Tauber, 1999; Tauber y Batanero, 1998), se seleccionaron una serie de elementos de significado. Igualmente apoyándose en experiencias previas y en la experiencia piloto realizada en el curso 1997-98 se procedió, en una primera fase, al *diseño de una secuencia didáctica* sobre la distribución normal, basada en el uso de computadores. Se buscó que formase parte de la asignatura que anteriormente hemos descrito y siguiese su misma orientación y metodología. En el diseño de la secuencia, se seleccionaron unos campos específicos de problemas y una serie de instrumentos para abordarlos, así como unos contextos particulares de aplicación, relacionados con áreas de interés para el alumno. La introducción del ordenador nos obligó a tomar nuevos elementos no contemplados en los textos analizados.

Como consecuencia se produjo un material escrito para proporcionar a los alumnos, tanto para los temas relacionados con la distribución normal como para lo referente al programa estadístico y se diseñaron una serie de actividades teóricas y prácticas (unas para ser resueltas en el aula tradicional y otras en el aula de informática), así como una secuenciación de dichas actividades. Se destinaron al tema 6 sesiones (3 en la clase tradicional y otras 3 en el laboratorio de informática, donde los alumnos trabajaban por parejas con el ordenador) y otras 4 sesiones posteriores de trabajo sobre las distribuciones en el muestreo en que se haría uso de la distribución normal. En los Cuadros N° 1 y N° 2 se muestran como ejemplo las actividades seleccionadas para las primeras clases teóricas y la primera de las prácticas.

Actividad 1. La siguiente tabla de frecuencias ha sido obtenida con el paquete estadístico STATGRAPHICS, a partir de los datos de la altura de 1000 niñas, con edades comprendidas entre 15 y 20 años. Se presentan también algunos datos estadísticos.

Frequency Tabulation for altura

Class	Lower Limit	Upper Limit	Midpoint	Frequency	Relative Frequency	Cumulative Frequency	Cum. Rel Frequency
at or below		140,0		0	0,0000	0	0,0000
4	146,0	148,0	147,0	1	0,0010	1	0,0010
5	148,0	150,0	149,0	0	0,0000	1	0,0010
6	150,0	152,0	151,0	10	0,0100	11	0,0110
7	152,0	154,0	153,0	14	0,0140	25	0,0250
8	154,0	156,0	155,0	23	0,0230	48	0,0480
9	156,0	158,0	157,0	65	0,0650	113	0,1130
10	158,0	160,0	159,0	70	0,0700	183	0,1830
11	160,0	162,0	161,0	132	0,1320	315	0,3150
12	162,0	164,0	163,0	158	0,1580	473	0,4730
13	164,0	166,0	165,0	165	0,1650	638	0,6380
14	166,0	168,0	167,0	143	0,1430	781	0,7810
15	168,0	170,0	169,0	99	0,0990	880	0,8800
16	170,0	172,0	171,0	71	0,0710	951	0,9510
17	172,0	174,0	173,0	27	0,0270	978	0,9780
18	174,0	176,0	175,0	19	0,0190	997	0,9970
19	176,0	178,0	177,0	3	0,0030	1000	1,0000
above	180,0			0	0,0000	1000	1,0000

Mean = 164,721 Standard deviation = 4,92274 Variance = 24,2334

Skewness = -0,165955 Kurtosis = -0,0385743

1.a. ¿Qué características puedes deducir, sobre la forma de las representaciones gráficas del histograma y polígono de frecuencias de esta distribución? ¿Es la distribución aproximadamente simétrica respecto a su centro? ¿Qué nos indica el coeficiente de apuntamiento?

1.b. ¿En qué intervalo se encontrarían la moda y mediana? ¿Cuál sería su valor aproximado? ¿Recuerdas el significado de estas medidas?

1.c. Calcula, a partir de la tabla y de un modo aproximado, el porcentaje de niñas en este grupo cuya altura está comprendida en el intervalo $(\bar{X} - 2.S, \bar{X} + 2.S)$, donde con \bar{X} indicamos la media y con S la desviación típica de esta muestra. En una distribución normal teórica, el porcentaje de casos que está situado a menos de dos desviaciones típicas de la media es del 95%.

1.d. Supongamos que escribimos el nombre de cada niña que tomó parte en la muestra anterior en un papel y elegimos uno de ellos al azar, ¿Cuál será la probabilidad de que la chica en cuestión tenga una altura comprendida en el intervalo $(\bar{X} - 2.S, \bar{X} + 2.S)$? ¿Y que tenga una altura que caiga fuera del intervalo?

1.e. En un histograma, las áreas de cada rectángulo representan las frecuencias en el intervalo. Recíprocamente, a partir de las frecuencias podemos calcular el área que, en el histograma corresponde a un intervalo dado. En el histograma de frecuencias relativas que represente a esta distribución:

e.1. ¿Cuál sería el área correspondiente al intervalo (160 - 170)?

e.2. ¿Cuál sería el área aproximada en este intervalo en el polígono de frecuencias?

e.3. ¿Cuál sería la probabilidad de que una chica elegida al azar tenga una altura entre 160 y 170?

e.4. ¿Y que mida más de 174 cm?

1.f. Compara los resultados de e.1 y e.3. ¿Qué conclusiones puedes extraer?

Cuadro N° 1. Actividades de la primera sesión teórica

- *Abre el programa STATGRAPHICS y carga el fichero TESTP. Este fichero, que viene descrito en los apuntes, contiene los resultados de diferentes puntuaciones obtenidas al pasar un test de intuiciones probabilísticas a una muestra de alumnos. Lee en los apuntes la descripción del fichero y el significado de las variables.*
 - *En esta práctica y la que sigue vamos a analizar en este fichero algunas variables, para decidir si es o no adecuado ajustar una distribución normal a las mismas. En el tema escrito sobre la distribución normal se describen los puntos a tener en cuenta para decidir si la distribución normal es una buena aproximación a los datos. Consulta estos pasos en la página 12, en los que se incluye un ejemplo, que puede servirte en la realización de esta práctica. Analizaremos sólo variables numéricas, ya que la distribución normal no se aplica a variables cualitativas.*
 - *En esta práctica vamos a analizar la puntuación total en el test de probabilidad, para ver si la distribución normal sería una aproximación aceptable para esta variable. Estudiaremos, primeramente la forma de la distribución, para comparar con la esperada en una curva normal.*
1. *Con ayuda del programa DESCRIBE; ONE VARIABLE NUMERICAL, prepara una tabla de frecuencias y un polígono de frecuencias relativas de la puntuación total en el test de probabilidad. Estudia la forma del polígono de frecuencias relativas y la función de densidad*
 - a) *¿Son el polígono y la función de densidad aproximadamente simétricos?*
 - b) *¿Tiene una o varias modas?*
 2. *Mediante SUMMARY STATISTICS calcula los valores del coeficiente de asimetría y de curtosis y valores tipificados (si hace falta, usa PANE OPTIONS). ¿Son los valores obtenidos aceptables para una distribución normal?*
 3. *Has estudiado en clase teórica la regla de los intervalos $\mu \pm \sigma$, $\mu \pm 2\sigma$, $\mu \pm 3\sigma$, en una distribución normal. Utilizando la tabla de frecuencias, calcula el porcentaje de niños cuya puntuación total está incluida en los intervalos $\bar{x} \pm s$, $\bar{x} \pm 2s$, $\bar{x} \pm 3s$. El valor de la media y desviación típica viene dado en la tabla de frecuencias que has construido anteriormente. Si es necesario, cambia la amplitud de los intervalos para que los extremos coincidan con los valores que te interesan. ¿Se cumple la regla 68- 95- 99?*
 4. *Teniendo en cuenta los puntos 1., 2. y 3. ¿Crees que la distribución de esta variable es aproximadamente normal?*

Cuadro N° 2. Actividades de la primera sesión práctica

Una vez construida la secuencia, se analizó en base a los elementos de significado proporcionados por nuestro marco teórico para determinar el significado institucional pretendido. Dadas las dificultades de espacio que supone el presentar este análisis en su totalidad, y continuando con el ejemplo mostrado en los Cuadros N° 1 y N° 2, en los Cuadros N° 3 y N° 4 presentamos de forma esquemática el análisis de cada una de las actividades recogidas en los Cuadros N° 1 y N° 2, tratando de mostrar el fin que tenían y por qué las considerábamos adecuadas para la introducción de la distribución normal. Asimismo, se incluyen los significados pretendidos en ellas.

Elementos del significado institucional local previstos

Elementos extensivos: problema de ajuste de un modelo a una distribución de datos reales.

Elementos ostensivos: histograma y polígono de frecuencias, gráfica de la función de densidad normal, histograma y curva de densidad normal superpuestos, tabla de frecuencias, representación simbólica de intervalos centrales: $(\bar{x} - k.s; \bar{x} + k.s)$, fórmula de la función de distribución normal y representación simbólica de una distribución normal: $N(\mu, \sigma)$, representación simbólica de la media y desviación típica muestral y poblacional.

Elementos actuativos: estudio descriptivo de datos para ajustar una curva, obtención de límites de intervalos, cálculo de áreas en un histograma y en un polígono de frecuencias, estimación de probabilidades a partir de una tabla de frecuencias, comparación visual, representación gráfica de datos.

Elementos intensivos: simetría, unimodalidad, posiciones relativas de media, mediana y moda, propiedad de los intervalos centrales, porcentaje y probabilidad en un intervalo, área bajo el polígono de frecuencias en un intervalo, media y desviación típica como parámetros de la distribución normal, función de densidad normal, coeficiente de curtosis, eje de simetría, distribución empírica, tipos de frecuencias, convenios de lecturas de gráficos, intervalos de clases, límites de intervalos, muestra aleatoria, tipos de variables.

Elementos validativos: análisis, aplicación de una propiedad, comprobación de casos particulares, generalización de propiedades, representación gráfica, síntesis. El segundo año se usaría la simulación con el computador.

Más específicamente, estos elementos se relacionarían de diversas maneras concretándose en los siguientes objetivos de aprendizaje:

- A partir de una tabla de frecuencias (elemento ostensivo), el alumno debe deducir las características gráficas del histograma y polígono de frecuencias (elementos ostensivos), respecto a la unimodalidad y simetría (elementos intensivos).
- Estimar (elemento actuativo) el valor de la moda y mediana (elementos intensivos) a partir de una tabla de frecuencias (elemento ostensivo).
- Calcular (elemento actuativo), a partir de la tabla de frecuencias (elemento ostensivo), la proporción de observaciones en los intervalos centrales $(\bar{x} - k.s; \bar{x} + k.s)$ (elementos intensivos).
- Estimar (elemento actuativo) las *probabilidades*, en los que la *variable* tome *valores en intervalos* dados (elementos intensivos) a partir del histograma y de la tabla de frecuencias (elementos ostensivos).
- Reconocer a partir de un histograma (elemento ostensivo) que las *frecuencias* en un *intervalo* de la *variable* vienen dadas por el *área* comprendida en dicho *intervalo* entre el *eje de abscisas* (elementos intensivos) y el histograma y aplicarlo al cálculo (elemento actuativo) de diversas frecuencias (elemento intensivo).
- Comprender la idea de *función de densidad* (elementos intensivo) que permite aproximar el histograma y polígono de frecuencias relativas (elementos ostensivos) en una variable continua (elemento intensivo).
- Reconocer la familia de distribuciones normal (elemento intensivo), mediante la fórmula de la función de densidad (elemento ostensivo) y la representación gráfica (elemento ostensivo) de la misma.
- Interpretar los coeficientes de asimetría y de curtosis (elementos intensivos).

*Cuadro N° 3. Análisis a priori de las actividades
de la primera sesión teórica*

En el caso de la primera sesión práctica mostrada en el Cuadro N° 2, se analizaría una variable estadística que podría aproximarse adecuadamente mediante una distribución normal, con el fin de que los alumnos adquieran criterios de identificación de tales variables, en particular, la forma de la distribución, los valores de los coeficientes de asimetría y curtosis, unimodalidad, posición relativa de media, mediana y moda y proporción de casos alrededor de la media. Los alumnos harían un análisis similar al desarrollado en la primera sesión teórica pero se trabajaría con opciones conocidas del programa STATGRAPHICS. Los elementos de significado previstos se describen en el Cuadro N° 4.

Elementos del significado institucional local previstos

Extensivos: problema de ajuste de un modelo a una distribución de datos reales;

Ostensivos: histograma, polígono de frecuencias, gráfica de la función de densidad normal, tabla de datos, tabla de frecuencias y resumen estadístico, representación simbólica de intervalos centrales para una población y para una muestra: $(\mu - \kappa.\sigma, \mu + \kappa.\sigma)$ y $(\bar{x} - k.s, \bar{x} + k.s)$;

Actuativos: representación gráfica de datos, estudio descriptivo de una variable para ajustar una curva, obtención de límites en intervalos centrales, cálculo de porcentajes en tablas de frecuencias con ordenador, estimación de probabilidades a partir de tablas de frecuencias, comparación visual;

Intensivos: simetría, unimodalidad, posiciones relativas de media, mediana y moda, coeficientes de asimetría y curtosis y tipificados, propiedad de intervalos centrales en una distribución normal, función de densidad normal, simetría, curtosis y unimodalidad en la distribución normal, bondad de ajuste, media y desviación típica muestral y poblacional, distribución empírica, experimento aleatorio y estadístico, tipos de frecuencias, convenios de lecturas de gráficos, intervalos de clases, muestra aleatoria, población, probabilidad, proporción, porcentaje, tipos de variables;

Validativos: análisis, comprobación, generalización y aplicación de propiedades, síntesis, simulación con ordenador, representación gráfica, síntesis.

Más específicamente, estos elementos se relacionarían de diversas maneras concretándose en los siguientes objetivos de aprendizaje:

- Identificar variables (e. intensivos) para las que puede ser adecuado ajustar una distribución normal a una distribución de datos (e. extensivo), tomando como base las propiedades gráficas (e. intensivos) del histograma y curva de densidad (e. ostensivos), los coeficientes de asimetría y curtosis (e. intensivos) y basándose en la propiedad de las áreas correspondientes a los intervalos $m \pm ks$ (e. intensivo).
- Calcular (e. actuativo) la *proporción* de valores por encima o por debajo de un determinado valor o entre dos valores dados en una *variable estadística* (e. intensivos) a partir de la tabla de frecuencias (e. ostensivo).
- Representar gráficamente con la opción DESCRIBE – NUMERIC DATA – ONE VARIABLE ANALYSIS (e. actuativos), el histograma, el polígono de frecuencias y la curva de la función de densidad (e. ostensivos). Reconocer las propiedades gráficas de la distribución normal (e. intensivos).
- Representar gráficamente (e. actuativo) la función de densidad (e. intensivo) de algunas variables (e. intensivos) en el fichero TESTP, realizando una comparación visual (e. actuativo) de su forma con las del histograma y polígono de frecuencias (e.ostensivos).

Cuadro N° 4. Análisis a priori de las actividades de la primera sesión práctica

- Analizar la simetría (e. intensivo) de la curva de densidad (e. ostensivo) en algunas variables (e. intensivos) y decidir si podrían o no ser aproximadas adecuadamente mediante una distribución normal (e. extensivo).
- Comprobar (e. validativo) los valores de los coeficientes de asimetría y curtosis (e. intensivos). Dar una interpretación (e. validativo) de estos valores en relación con la distribución empleada.
- Ajustar una distribución normal a los datos (e. extensivo), calculando con la opción adecuada del programa (e. actuativo) los parámetros (e. intensivos).
- Calcular (e. actuativo) la proporción de observaciones en los intervalos $(\bar{x} - k.s; \bar{x} + k.s)$ para las variables estadísticas (e. intensivos), particularizando (e. validativo) para algunos valores de k usando la tabla de frecuencias (e. ostensivo). Justificar (e. validativo) si la distribución normal constituye o no una aproximación aceptable.

*Cuadro N° 4. Análisis a priori de las actividades
de la primera sesión práctica*

Diseñada la secuencia, se procedió a su *implementación en el aula* a lo largo de las diez sesiones mencionadas. Todas las sesiones fueron observadas, anotándose cuidadosamente todo aquello que pudiese estar relacionado con algún elemento de significado. Además, se recogieron todas las tareas realizadas por los alumnos en las clases teóricas y prácticas. El proceso se repitió en dos cursos sucesivos con pequeñas variaciones, con lo que tratábamos de verificar si los datos que pretendíamos recoger eran recurrentes o ligados a características contextuales. Como ya hemos indicado anteriormente, fueron 21 alumnos en el primer año y 30 en el segundo los que completaron los instrumentos que a continuación presentamos.

Instrumentos de recogida de datos

Puesto que el interés de nuestro trabajo se centraba en estudiar las posibilidades de la secuencia tratando de determinar la correspondencia existente entre los significados institucionales pretendidos por el profesor y los significados personales dados por los alumnos del grupo, en el diseño de la investigación se hace necesario utilizar varios instrumentos de recogida de datos que permitan acceder al problema. A continuación, describimos las características generales de cada uno de los instrumentos utilizados.

Un primer instrumento corresponde al método de observación (Fox, 1981) donde los datos pueden tomarse directamente porque son accesibles al investigador. Es el siguiente:

1. Diario de observación. Que fue elaborado durante el desarrollo de la secuencia de enseñanza llevada a cabo tanto en el curso 98-99 como en el 99-2000. El objetivo principal de realizar un diario de observación fue describir la enseñanza, tal como fue llevada a cabo, lo que nos permitió luego, comparar entre el significado institucional previsto y el efectivamente implementado, además de tomar nota de las dificultades planteadas por los

alumnos, para poder interpretar mejor los datos recogidos por escrito de las actividades teóricas y los grabados en el computador durante las prácticas. No se usó guión estructurado de observación, pero al realizar las observaciones, se tuvieron en cuenta algunas de las recomendaciones dadas por Bisquerra (1989). Por ejemplo, se realizaron los registros en el campo e inmediatamente después de cada clase, se reunieron la investigadora con la profesora para revisar las notas de observación y agregar cualquier hecho que hubiera pasado inadvertido. Las notas de campo se tomaron lo más rápidamente que fue posible, con el fin de cubrir todo lo que sucedía en la clase.

La observación se centró en recolectar todas las preguntas y dudas planteadas por los alumnos con el fin de detectar los elementos de significado que presentaban mayores dificultades. También, se detalló la manera en que se fue desarrollando cada clase, para poder comparar luego con lo que se tenía previsto y de esta manera poder determinar qué elementos de significado se habían trabajado, cuáles se habían dejado de lado o cuáles presentaron más dificultades.

2. Informes escritos de actividades teóricas y prácticas. Como complemento de la observación de clases, se seleccionaron siete actividades del total que habían sido previstas para las clases teóricas, las cuales eran tareas concretas para ser resueltas con papel y lápiz y que fueron resueltas en parejas por los alumnos. Además, se recogieron las actividades programadas en las tres clases de prácticas, las cuales también eran resueltas en parejas con apoyo del ordenador. Éstas últimas eran tareas abiertas de análisis de datos, en las que los alumnos debían producir un informe escrito de los resultados de sus análisis.

Las tareas tenían el carácter de *muestras de trabajo*, según la terminología de Fox (1981), debido a que para resolverlas se requiere de una combinación de destrezas y conceptos que se necesitan para actuar en una situación determinada. La combinación de destrezas requeridas incluye el conocimiento estadístico y la capacidad argumentativa, y en el caso de las tareas prácticas, habilidad de manejo de software estadístico, habilidad de manejo del procesador de texto. Según este autor, la tarea debe ser un prototipo de una situación real, que en nuestro caso correspondería a la situación de análisis de datos a que estos alumnos pueden enfrentarse en su futura vida profesional

Análisis de los datos

Finalizada la secuencia de enseñanza, se realizó un análisis de contenido de los protocolos de observación de cada una de las sesiones, y de las interacciones entre alumnos y profesora, desde el punto de vista del significado

puesto en juego y del uso correcto o incorrecto de los elementos de significado previstos por parte de los alumnos. Esto nos ha permitido determinar la forma en que se presentan y articulan los diferentes elementos de significado a lo largo de la enseñanza. Además, permitió observar los desajustes producidos, también las dificultades en la implementación de la secuencia, y además, los errores o dificultades que los alumnos pusieron de manifiesto en el transcurso de la enseñanza.

Elementos de significado	Aplicados correctamente		Aplicados incorrectamente	
	1999 (n=21)	2000 (n=30)	1999 (n=21)	2000 (n=30)
Ostensivos				
Histogramas		2		
Histogramas y polígonos de frecuencias superpuestos	2	1		
Actuativos				
Cálculo de áreas en histogramas y polígonos de frecuencias (ítems e.1 y e.2)	2	7	19	23
Estimación de probabilidades a partir de tabla de frecuencias (ítem e.3)	13	17	8	13
Estimación de probabilidades a partir de tabla de frecuencias (ítem e.4)	8	10	13	20
Representación gráfica de datos	2	3		
Intensivos				
Área como suma de frecuencias relativas en un intervalo	2	7	9	17
Área como diferencia de frecuencias relativas acumuladas			10	6
Probabilidad aproximada por la suma de frecuencias relativas	2	7	9	17
Probabilidad aproximada por la diferencia de frecuencias relativas acumuladas (ítem e.4)	8	10	8	7
La probabilidad se puede expresar como porcentaje	10	5		
La probabilidad se puede expresar como proporción	4	3		
La probabilidad se puede estimar por el área	2	10	4	
Validativos				
Comprobación de casos particulares		3		
Generalizar una propiedad o un resultado	12	4	4	
Representación gráfica	2	3		

Tabla N° 1. Elementos de significado empleados correcta o incorrectamente por los alumnos en las actividades 1.e y 1.f

Con respecto a las producciones escritas recogidas a los alumnos de las tareas realizadas en las clases teóricas y prácticas, se hizo un análisis de contenido identificándose las variables estadísticas que recogen el uso correcto o incorrecto de los diversos elementos de significado para cada pareja o grupo de alumno. Así, por ejemplo, recogemos en la Tabla N° 1 las frecuencias obtenidas del análisis a posteriori realizado a las respuestas escritas a las cuestiones 1.e y 1.f, (correspondientes a la primera sesión teórica mostrada en el Cuadro N° 1), en relación con el uso de los diversos elementos de significado que se identificaron en su resolución.

En la tabla se pueden apreciar los elementos de significado que se han identificado en dichas respuestas. En relación con los elementos extensivos, en la actividad desarrollada en el ejemplo considerado, se ha aplicado el ajuste de un modelo por medio de la aproximación de la curva de densidad al histograma que representa la distribución empírica. La identificación de elementos aplicados erróneamente (indicados en la Tabla N° 1) junto con resultados de las observaciones ha permitido profundizar en las características de los errores. Así, en el ejemplo mostrado en la Tabla N° 1, dentro de los elementos actualizados aplicados, en el *Cálculo de áreas en histogramas y polígonos de frecuencias* los principales errores han sido calcular la suma de las frecuencias absolutas sin dividir por N o la diferencia de frecuencias acumuladas absolutas y equivocarse de intervalo. En el caso de *Estimar probabilidades a partir de las frecuencias en una tabla*, en ambos cursos, los errores han consistido en: no especificar cómo obtienen el resultado, dar un resultado incorrecto o no resolver el problema.

Con respecto a los *Elementos Intensivos*, el principal problema detectado en una cantidad considerable de alumnos de los dos cursos al interpretar el área en el histograma correspondiente a un intervalo, ha sido usar frecuencias absolutas o absolutas acumuladas sin dividir por el tamaño de la muestra, que puede tener implícito la confusión entre los tipos de frecuencias, ya que, aunque es posible realizar un histograma de frecuencias absolutas, en el enunciado se expresaba claramente que se trabajaría con un histograma de frecuencias relativas. Por ejemplo, a continuación reproducimos el trabajo de una de las alumnas:

e.1. Observaciones: $132+158+165+143+99 = 697$

Por lo tanto, el área correspondiente al intervalo (160-170) es 697

e.2. El área del polígono de frecuencias sería aproximadamente la misma.

En otros casos se piensa que el área está dada por la frecuencia absoluta y la probabilidad se obtiene al dividir el área por N . También se producen errores en la estimación de probabilidades porque los alumnos no llegan a relacionar la probabilidad con el área (elementos intensivos). La variación en la frecuencia de errores en los cursos se explica por los diferentes procedimientos usados por los alumnos, lo que implica el uso de diferentes elementos intensivos.

Por otro lado, en la sala de informática los alumnos realizaban análisis de datos a partir de un fichero, contestando a las preguntas proporcionadas en una hoja de prácticas y produciendo un informe escrito en Word, en el que incorporaban los cálculos y gráficos estadísticos que considerasen necesarios para reforzar su argumentación. Una vez resueltas las actividades la profesora o alguno de los alumnos analizaba la solución obtenida, con objeto de detectar las soluciones erróneas, así como de institucionalizar los nuevos conocimientos adquiridos en el transcurso de la actividad.

También en este caso, todas las producciones de los alumnos se analizaron, identificando los elementos de significado puestos en juego correcta o incorrectamente por los alumnos. Se elaboraron unas tablas para cada sesión mostrando las frecuencias con que se usaron estos elementos en las tareas propuestas en la misma y se describieron ejemplos que clarifiquen las categorías usadas, realizándose un análisis análogo al de las producciones de las sesiones teóricas anteriormente descrito.

El análisis de todas las producciones nos proporcionó una visión global con relación a los elementos de significado que presentan mayores problemas en su aplicación y nos sirvió de base para analizar la evolución del significado personal del grupo de alumnos a lo largo del curso.

RESULTADOS

Pasamos a presentar globalmente los resultados obtenidos al aplicar el análisis anteriormente descrito en toda la secuencia. En primer lugar, nos referiremos a los resultados obtenidos en base a las observaciones realizadas en el desarrollo de las clases teóricas y prácticas. Posteriormente, nos centraremos en los extraídos de la comparación de los elementos de significado pretendidos con los identificados en las producciones de los alumnos, para terminar presentando unas conclusiones conjuntas.

Desarrollo de las sesiones en la clase tradicional y en el aula de informática

En la clase tradicional, se introdujeron todos los elementos previstos, pero no con la misma intensidad, ni siempre en la secuencia planificada. En los dos

cursos fue preciso insistir en algunos puntos, y recordar conceptos que se suponían adquiridos, como la simetría, el significado del área en los histogramas o de los coeficientes de asimetría y curtosis, la determinación del intervalo donde cae la mediana en una tabla de frecuencias, propiedad de la mediana como centro de simetría de una distribución o la identificación e interpretación de distintos tipos de frecuencias. A veces fue necesario por parte de la profesora implementar algún ejemplo no previsto, para aclarar alguna duda o bien los alumnos no respondieran según lo esperado.

En relación con la sala de informática, una dificultad repetida en estas sesiones fue que los alumnos no encontraban las opciones incluidas en los menús secundarios del programa Statgraphics porque están ocultas a la vista. Esto les llevó con frecuencia a tomar las opciones por defecto que no son siempre apropiadas. Sería necesario disponer de un software más sencillo para trabajar en la enseñanza de la estadística.

Al contrario que en las clases en el aula tradicional, no se observó claramente una progresión en el aprendizaje en ninguno de los dos cursos considerados. En la segunda práctica, posiblemente porque la variable con la que se trabajaba era cuantitativa discreta con pocos valores y la forma de la distribución se visualiza con más dificultad, hubo mayor dificultad que en la primera al interpretar los coeficientes de asimetría y curtosis. Aunque en la práctica 3 se introdujeron nuevas opciones que hicieron aumentar considerablemente la dificultad en las tareas, el número de errores es pequeño, en comparación con las prácticas anteriores. Ello implica un aprendizaje del uso del software por parte de los alumnos.

Comparación del significado pretendido y el del grupo de alumnos a lo largo del proceso de estudio

A continuación, pasamos a presentar los resultados del análisis de las actividades realizadas por los alumnos (realizadas en parejas o en pequeños grupos), en relación a los elementos de significado, así como la comparación entre los dos cursos consecutivos en que fue realizado el estudio.

Elementos Extensivos

Se aplicaron dos de los cuatro campos de problemas que se había previsto en el significado institucional pretendido: ajuste de un modelo y aproximación de distribuciones discretas, mostrándose en este último caso, un ejemplo de una distribución discreta con pocos valores que no podía ser aproximada por medio de una distribución normal. No hay diferencias entre los cursos, puesto que estos elementos fueron introducidos por la profesora.

Elementos Ostensivos

La mayoría de los alumnos aplicaron las representaciones previstas para las actividades propuestas, agregándose en algunos casos, elementos que no estaban previstos como por ejemplo, la representación gráfica aproximada del histograma y polígono de frecuencias en la primera actividad propuesta en la clase tradicional, realizados a mano, o la utilización del gráfico SYMMETRY PLOT en algunas de las actividades prácticas.

Se observaron dificultades con algunos elementos ostensivos representados por medio del ordenador cuando se debían cambiar las opciones por defecto. Por ejemplo, cuando debían encontrar extremos de intervalos aproximados correspondientes a los intervalos centrales o cuando debían calcular valores críticos o áreas de cola. En estos dos últimos casos, algunos alumnos tomaron los parámetros de la distribución normal típica que aparece por defecto y no cambiaron el valor de dichos parámetros, por lo que los valores obtenidos no correspondían a los cálculos solicitados.

Con respecto a las *diferencias entre ambos cursos*, podemos decir que en general, los alumnos del segundo año han tenido un mejor rendimiento, aplicando correctamente en mayor número, los elementos de significado. Solamente, en algunos casos como en el cálculo y comparación de probabilidades y porcentajes en la curva normal y en la distribución empírica, hay una disminución en los alumnos del segundo curso. Esto se debió a que se presentaron muchos problemas con el funcionamiento de los ordenadores y muchos de los alumnos no lograron terminar la práctica o perdieron sus trabajos.

Elementos Actuativos

En ambos cursos, se presentaron dificultades especialmente en la comparación visual utilizada para la segunda práctica. Algunos alumnos realizaron un estudio descriptivo incorrecto debido a que se basaron exclusivamente en la forma de la función de densidad sin analizar ningún otro elemento y a que no se tuvieron en cuenta los datos de donde provenía la distribución.

También hubo alumnos que realizaron cálculos incorrectos de valores críticos o representaron incorrectamente las gráficas de funciones de densidad o de distribución como consecuencia de no modificar las opciones por defecto. Hubo muchas dificultades en la determinación de los porcentajes correspondientes a la propiedad de los intervalos centrales, que requiere integrar diversos elementos actuativos manuales y con el ordenador, y aparecen errores tanto de cálculo como de aproximación exagerada.

De todos modos, debemos destacar que la mayoría de los alumnos logran realizar acciones correctas y adecuadas en función de lo que se les pide en cada actividad. Esto implica que se ha logrado un aprendizaje aceptable

del programa, considerando que presenta una gran diversidad de menús y opciones. Ello no sólo representa una complejidad semiótica distinta a la que generalmente se presenta en una clase tradicional, sino que también requiere el aprendizaje de nuevas acciones ligadas a otros elementos y a los objetivos que se persiguen con ellas.

Elementos Intensivos

Una de las dificultades que se mantuvo en casi todas las sesiones, fue con la interpretación de los coeficientes de asimetría y de curtosis, a pesar de que éstos eran elementos que los alumnos conocían previamente. También se observaron dificultades en la interpretación de los cuartiles y percentiles.

En relación con los elementos específicos de la distribución normal, además de la propiedad de intervalos centrales, se observó que la interpretación de probabilidades como áreas bajo la curva resulta complicada, especialmente en aquellos casos en los que los intervalos que se deben calcular son el resultado de una operación entre intervalos. Para comprender la situación es necesario el apoyo gráfico que no se puede obtener por medio del ordenador sino con lápiz y papel. Hubo alumnos que no supieron representar la situación y en consecuencia, proporcionan respuestas erróneas. Por último, se observaron dificultades en la comprensión de la distribución normal como un modelo, lo que produjo dificultades al diferenciar la distribución empírica de la teórica y también, cuando se debía distinguir entre parámetros y estadísticos.

Elementos Validativos

Se aplica principalmente la representación gráfica como elemento validativo, utilizando aspectos obvios de dichas representaciones y también la aplicación o comprobación de propiedades. Aunque se les han presentado actividades en las que podría realizarse un análisis previo de la situación antes de realizar alguna acción, en la mayoría de los casos, no se produce este análisis recurriendo primero a la visualización por medio de las gráficas para poder realizar afirmaciones basadas en ellas. La mayoría de los alumnos realizan afirmaciones basadas en los valores ingresados pero no logran llegar a una generalización de una propiedad de la distribución normal.

Cuando se les pide una conclusión, en general, los alumnos se quedan con las referentes a un solo análisis. Por ejemplo, observan que el coeficiente de asimetría es muy pequeño con lo cual concluyen que la distribución es simétrica y no observan los gráficos en los cuales se ve claramente que además de ser una distribución discreta presenta dos modas, ni analizan la posición de la media respecto a la mediana y a la moda. Coincidiendo con lo que concluyen Ben-Zvi y Friedlander (1997), ciertos alumnos presentan dificultades para realizar una síntesis y se limitan a validaciones parciales no

totalmente formalizadas aunque utilizan determinadas representaciones de manera significativa, pero no las integran.

CONCLUSIONES

Nuestra preocupación en organizar esta secuencia de enseñanza estuvo basada en el hecho que pudimos observar en las investigaciones previas una ausencia de información sobre los elementos fundamentales que deben conocer los alumnos para poder introducirse en el estudio de la distribución normal. En consecuencia, uno de los puntos que consideramos más importantes al diseñar esta secuencia, fue delimitar los elementos de significado que es necesario conocer previamente y a lo largo del desarrollo del tema, para tratar de lograr un aprendizaje significativo de él.

Para el significado institucional pretendido se seleccionaron determinados elementos de significado, que no siempre coinciden con el significado de referencia, y que se han considerado relevantes en el tipo de enseñanza prevista. Las principales modificaciones y dificultades que se produjeron en la implementación de la secuencia de enseñanza provinieron de la utilización de los ordenadores, ya que se presentaron muchos problemas de índole técnica que hicieron que se debiera modificar el desarrollo que se había previsto de las sesiones. En general se aplicaron todos los elementos de significado previstos en el significado institucional pretendido, variando sólo en algunos casos debido a las dificultades ya mencionadas. La observación de la enseñanza puso también de manifiesto que los alumnos no siempre respondían de la manera prevista, y no siempre lograban dar los ejemplos que se les pedía o resolver las actividades previstas. En ocasiones se tuvieron que recordar conceptos que se suponían adquiridos, o plantear ejemplos no previstos para tratar de solventar una dificultad o repetir alguna parte de la secuencia.

Una primera conclusión de este estudio es la complejidad del significado de la distribución normal, que se apoya en muchos otros conceptos previos, como los de variable estadística y aleatoria, distribución estadística, medidas de posición central y dispersión, simetría, curtosis, probabilidad, etc. El alumno debiera tener estos conceptos claros al iniciar la enseñanza del tema, lo cual no siempre sucede debido a que muchos de estos alumnos no han estudiado estadística durante la educación secundaria o el Bachillerato. El que este estudio se haya llevado a cabo con alumnos con conocimientos diversos de estadística nos ha permitido analizar las ventajas e inconvenientes de trabajar con un grupo heterogéneo.

Con respecto a los resultados del análisis de las producciones de los alumnos de las tareas teóricas y prácticas, nuestro estudio ha permitido iden-

tificar los elementos de significado aplicados por los alumnos en cada tarea, y ha permitido mostrar las dificultades en la aplicación de algunos de ellos, como hemos indicado en el apartado de resultados. En general se observa una progresión en relación a la disminución del número de errores y aumento del número de elementos aplicados, sobre todo en las clases teóricas. En las clases prácticas ha sido más complicado valorar dicha progresión debido a la variedad de elementos que se aplicaban en cada práctica y a las dificultades que presentaba su integración. Podemos concluir que la categorización de elementos realizada nos ha permitido determinar las principales dificultades en cada elemento de significado, los tipos de relaciones que realizan entre los diversos elementos de significado.

Consideramos que la secuencia de enseñanza diseñada (en Tauber (2001) se puede encontrar el desarrollo de la secuencia completa) sienta un antecedente del cual se puede extraer información para posteriores trabajos. A partir de esta secuencia hemos podido ver cuáles son los puntos más difíciles para los alumnos y también aquellos que se deben planificar con sumo cuidado si se opta por la introducción del ordenador como herramienta. Además, el análisis de la diferencia entre la secuencia diseñada y la secuencia de enseñanza tal como fue implementada ha proporcionado también una información valiosa, al permitir prever las dificultades y posibilidades inducidas por la decisión de incorporar un ordenador en el aula y sobre formas plausibles de trabajo con este recurso didáctico. Este trabajo sugiere que es posible diseñar una enseñanza efectiva de algunas nociones intuitivas, dirigida a alumnos que no tengan conocimientos previos en estadística. Puesto que el aprendizaje del cálculo no es el objetivo de un curso introductorio de estadística, esta dificultad no supone un obstáculo para introducir el aprendizaje de los conceptos básicos sobre la distribución normal, siempre que se elijan tareas que estén acordes con los conocimientos de los alumnos.

Somos conscientes que la enseñanza de conceptos estadísticos como la distribución normal reviste una gran complejidad, pero en la actualidad contamos con nuevas posibilidades, como pueden ser los ordenadores. La realización de experiencias de simulación con la ayuda de programas informáticos puede contribuir, como Biehler (1991) indica, a proporcionar a los alumnos una experiencia estocástica difícil de alcanzar sin estos medios.

Este estudio tiene también una serie de limitaciones asumidas. No hemos avanzado en el uso de la distribución normal para la inferencia, por ejemplo en el trabajo con distribuciones muestrales o en contraste de hipótesis. Por otra parte, el enfoque intuitivo que hemos dado a nuestro trabajo hace que éste no sea aplicable a cursos más tradicionales o formales como los que se dan en carreras tales como ingeniería o matemáticas.

Tampoco podemos generalizar nuestro trabajo a clases muy numerosas, o a alumnos poco motivados, ya que nuestra experiencia se llevó a cabo con alumnos voluntarios en grupos pequeños. La experiencia realizada tiene unas características particulares, al tratarse de una asignatura que los alumnos eligen libremente. Puesto que las actitudes de los alumnos es un factor que condiciona poderosamente su aprendizaje (Wilensky, 1995,1997), sería de interés el repetir esta experiencia y analizar sus resultados en cursos de carácter obligatorio. La adaptación de la enseñanza al curso preuniversitario o bachillerato es también necesaria, debido a que en estos niveles los currículos sugieren iniciar la enseñanza de la inferencia estadística.

Por otro lado, en nuestro estudio solamente se trabajó con dos de los campos de problemas definidos en el significado de referencia. En consecuencia, es posible continuar este trabajo estudiando la problemática específica que se presenta en campos de problemas tales como los de muestreo e inferencia. Por tanto, sería posible diseñar una nueva secuencia de enseñanza donde se trabajaran los aspectos inferenciales, analizando tanto los elementos de significado como el aprendizaje de los alumnos. Asimismo, la valoración de la secuencia aquí presentada se ha efectuado a partir de las observaciones y del análisis de las respuestas escritas de los alumnos a tareas realizadas en clase. Aunque esto ha proporcionado información sobre el grupo de alumnos, es claro que podemos obtener una visión más completa y un estudio de las diferencias en la comprensión de los alumnos individuales a través de análisis de casos que complementen la información obtenida. Estos estudios podrían tratar de explicar de una forma más completa algunas de las dificultades encontradas en nuestro trabajo.

REFERENCIAS

- Batanero, C. y Tauber, L. (1999). Contextos y campos de problemas relacionados con la distribución normal. En M. Berenguer, J. Cardeñoso y M. Toquero (Eds.), *Investigación en el aula de matemáticas. Matemáticas en la sociedad* (pp. 173-178). Granada: Sociedad Andaluza de Educación Matemática.
- Batanero, C., Tauber, L. y Meyer, R. (1999). *From data analysis to inference: A research project on the teaching of normal distributions. Bulletin of the International Statistical Institute: Proceedings of the Fifty-Second Session of the International Statistical Institute* (Tome LVIII, Book 1) (pp. 57-58). Helsinki, Finlandia: I.S.I.
- Ben-Zvi, D. y Friedlander, A. (1997). Statistical thinking in a technological environment. En J.B. Garlfield y G. Burril (Eds.), *Proceedings of the IASE 1996 Round Table Conference* (pp.11-23). Voorburg, Holanda: ISI&IASE.

- Biehler, R. (1991). Computers in probability education. En R. Keypad y M. Borovcnick (Eds.), *Chance encounters: Probability in education* (pp. 169-211). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher
- Bisquerra, R. (1989). *Métodos de investigación educativa*. Barcelona: P.P.U.
- Cook, T. D. y Campbell, D. T. (1979). *Quasi-experimentation. Design and analysis for field setting*. Chicago: Rand Mc. Nelly.
- delMas, R.C., Garfield, J. B. y Chance, B. (1999). *Exploring the role of computer simulations in developing understanding of sampling distributions*. (trabajo presentado en el Annual Meeting of the AERA). Montreal, Canada.
- Estepa, A. (1993). Concepciones iniciales sobre la asociación estadística y su evolución como consecuencia de una enseñanza basada en el uso de ordenadores. (tesis doctoral). Universidad de Granada.
- Fox, D.J. (1981). *El proceso de investigación en la educación*. Pamplona: Eunsa.
- Garfield, J.B. (1991). Evaluating students understanding of statistics: Developing the Statistical Reasoning Assessment. En R. G. Underhill (Ed.), *Proceedings of the 13th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 1-7). Blacksburg, VA: PME-NA.
- Godino, J. D. (1996). Mathematical concepts, their meaning and understanding. En L. Puig, y A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 417-424). Valencia: Universidad de Valencia.
- Godino, J. D. y Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. En A. Sierpinkska y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics Education as a research domain: A search for identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.
- Hawkins, A., Joliffe, F. y Glickman, L. (1992). *Teaching statistical concepts*. Essex: Longman.
- Huck, S., Cross, T. L. y Clark, S. B. (1986). Overcoming misconceptions about z-scores. *Teaching Statistics*, 8 (2), 38-40.
- Méndez, H. (1991). *Understanding the central limit theorem*. Ph. D. University of California. UMI n° 1-800-521-0600.
- Sánchez-Cobo, F. (1999): Significado de la regresión y correlación para estudiantes universitarios (tesis doctoral). Universidad de Granada.
- Schuyten, G. (1991). Statistical thinking in psychology and education. En D. Vere-Jones (Ed.), *Proceedings of the III International Conference on Teaching Statistics* (vol. 2, pp. 486-489). Dunedin, Australia: Universidad de Otago.
- Tauber, L. (2001). La construcción del significado de la distribución normal a partir de actividades de análisis de datos (tesis doctoral). Universidad de Sevilla.

- Tauber, L. y Batanero, C. (1998). Una experiencia de uso de Statgraphics en la introducción de la distribución normal. En M. Berenguer, J. Cardeñoso y J. Sánchez (Eds.) *Investigación en el aula de Matemáticas. Los recursos* (pp.185-189). Granada: Sociedad Andaluza de Educación Matemática.
- Tauber, L., Batanero, C. y Sánchez, V. (2000). Comprensión de la distribución normal por estudiantes universitarios. En C. Loureiro, F. Oliveira y L. Brunheira (Eds), *Ensino e Aprendizagem da Estatística* (pp. 117-130). Lisboa: Sociedad Portuguesa de Estatística.
- Vallecillos, A. (1996). *Inferencia estadística y enseñanza: Un análisis didáctico del contraste de hipótesis estadísticas*. Madrid: Comares.
- Wild, C. y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, 67 (3), 223-265.
- Wilensky, U. (1995). Learning probability through building computational models. En D. Carraher y L. Meira (Eds.), *Proceedings of the 19th PME Conference*, (vol. 3, pp. 152-159). Recife, Brazil: PME.
- Wilensky, U. (1997). What is normal anyway? Therapy for epistemological anxiety. *Educational Studies in Mathematics*, 33, 171-202.

Liliana Mabel
Facultad de Humanidades y Ciencias
Universidad Nacional del Litoral
Paraje El Pozo. Santa Fe
C.P.: 3000
Argentina
E-mail: liliana_tauber@yahoo.com.ar

Victoria Sánchez
Departamento de Didáctica de las Matemáticas
Facultad de Ciencias de la Educación
Avda. Ciudad Jardín 22
41005 Sevilla
España
E-mail: sanchez@us.es

Carmen Batanero
Departamento de Didáctica de las Matemáticas
Facultad de Ciencias de la Educación
Campus de Cartuja
18071 Granada
España
E-mail: batanero@ugr.es