 DOI: 10.24844/EM3103.10

Evaluación del impacto que tiene la implementación de actividades relacionadas con la historia de las matemáticas en el proceso de enseñanza-aprendizaje del alumnado

Evaluation of the impact of activities related to History of Mathematics in the teaching-learning process of the students

Carlos Dorce[1]

Resumen. La historia de las matemáticas es una rama que se está bastante ausente, tanto de los currículos oficiales como de las actividades que se programan en las distintas unidades didácticas, pese a que su utilidad e interés han sido ampliamente demostrados. En este trabajo se presenta una herramienta evaluativa del impacto que pueden tener algunas actividades basadas en la historia de las matemáticas que se implementan en las aulas y se proponen cuatro ejes de valoración que permitan poder mejorar dicha implementación.

Palabras clave: *Historia de las Matemáticas, innovación pedagógica, trigonometría, cónicas.*

Fecha de recepción: 6 de enero de 2019. **Fecha de aceptación:** 19 de junio de 2019.

[1] Departamento de Matemáticas e Informática, Universidad de Barcelona, España, cdorce@ub.edu
https://orcid.org/0000-0003-0310-8888

INTRODUCCIÓN

La integración de la historia de las matemáticas en los currículos obligatorios ha sido muy ampliamente defendida y argumentada a lo largo de estos últimos años (véase, por ejemplo, Sriraman, 2012) y no sólo por la relación intrínseca de la historia con la propia asignatura (Siu & Tzanakis, 2004), sino porque aporta tres mejoras muy importantes y considerables (Panasuk & Horton, 2012):

1. En primer lugar, la historia de las matemáticas proporciona un contexto adecuado para poder comprender más profundamente la evolución de los conceptos matemáticos. La enseñanza de las matemáticas es una actividad humana y, como tal, se beneficia de una percepción de los contextos sociales, culturales e históricos.
2. En segundo lugar, el aprendizaje de la historia de las matemáticas permite el entendimiento y comprensión de parte substancial del desarrollo intelectual de la humanidad a través de la búsqueda de soluciones a un número inmenso de preguntas que las matemáticas han planteado a lo largo de la historia. La gran mayoría de los conceptos que se aprenden hoy en día en las aulas surgieron en su momento de una preocupación concreta de hombres y mujeres que buscaban respuestas a distintos cuestionamientos que se iban haciendo sobre el mundo en el que vivían. Por ejemplo, en el siglo XVII, John Napier inventó los logaritmos para dar respuesta a los largos cálculos que se planteaban en su vida cotidiana (Dorce, 2014). De ahí a su presentación actual en las aulas hay toda una historia digna de ser contada.
3. Finalmente, la motivación y el interés del alumnado respecto de la asignatura. La historia de las matemáticas está llena de anécdotas y datos que pueden, a veces, convertir las clases en un espacio donde el alumnado tenga la necesidad y el interés de seguir aprendiendo relaciones y propiedades que, hasta el momento, no se habían planteado.

Con estas bases, no se puede negar que para cualquier estudiante actual tiene que ser muy beneficioso el trabajo de algunos de los objetivos intelectuales que pusieron las semillas y fundamentos de las matemáticas de nuestros currículos, así como también las ideas que evolucionaron para poder presentar esta asignatura tal y como se hace hoy en día. Además, en la línea de la tesis defendida por Guevara Casanova y Massa Esteve (2009 p. 383), el uso de contextos históricos debe romper con la imagen parcial que tiene el alumnado, que considera la asignatura como una "ciencia establecida, precisa e inmutable, un conjunto de conocimientos que siempre se han presentado de la misma manera y que no es susceptible de padecer ningún cambio". Con todo, la introducción de los contextos históricos tiene que ser una lanza que sirva para romper con esta idea y evidenciar que las matemáticas son una ciencia que ha evolucionado hasta conseguir un significado adecuado dentro de un contexto determinado. Ante este planteamiento, el profesorado y los profesionales de la enseñanza ven con mucho interés la introducción de la historia de las matemáticas en sus aulas (Siu, 2004; Zuya, 2014) aunque este paso no sea, a veces, nada sencillo. Siu (2006), por ejemplo, recopiló dieciséis posibles excusas para no iniciar esta introducción entre las que se encuentran la falta de tiempo, no saber cómo evaluarla, la convicción de que no ayudará a motivar al alumnado, la falta de material sobre el tema y la propia preparación específica. Sin embargo, ninguno de estos factores parece convincente para pensar que la historia de las matemáticas no pueda ser realmente aprovechada para mejorar el nivel competencial del alumnado y una refutación de algunas de ellas está recogida por Haverhals y Roscoe (2010). Por ejemplo, ante la visión que tienen algunos profesores sobre que la historia de las matemáticas "no son matemáticas", argumentan que una sentencia como ésta es un rechazo de la historia de las matemáticas como contenido matemático tradicional en el aula. Así, se quiere hacer aparecer una línea clara entre lo que es historia de las matemáticas y lo que es matemáticas, promoviendo una visión errónea de que las matemáticas son, de un lado, altamente especializadas y, del otro, estrictamente compartimentadas de otras áreas de cálculo. De hecho, hasta el alumnado que tiene claras dificultades para entender el significado y el valor relacional de los conceptos matemáticos, la historia puede ser una herramienta fundamental para avanzar hacia su éxito educativo. Ejemplos de todo ello pueden encontrarse en los trabajos de Katz y Michalowicz (2004) o Dorce (2016a).

Por lo tanto, podemos asumir que la introducción de la historia de las matemáticas en las aulas, siempre con un objetivo claro de implementación, puede ser muy beneficioso para el proceso de enseñanza-aprendizaje del alumnado y, aunque su presencia sea casi testimonial en la mayoría de currículos oficiales, se pueden planificar actividades cuyo beneficio académico justifique su ejercicio. Sin embargo, al igual que el resto de actividades que se diseñan habitualmente en las unidades didácticas, es deseable tener un objetivo claro de aplicación así como de ejecución, y tras su aparición en el aula, se debe poder evaluar el impacto que ha tenido tanto en el alumnado como en la propia unidad didáctica trabajada. Hasta el momento, una herramienta eficaz de las que se dispone para evaluar la aplicación de una secuencia didáctica son los criterios de idoneidad didáctica propuestos por Godino, Batanero y Font (2007), los cuales pueden ser una referencia evaluativa útil de la planificación, de la implementación y de los resultados de aprendizaje obtenidos. Sin embargo, si se quiere tener un mecanismo evaluador de una actividad concreta, centrando el foco en la historia de las matemáticas, se puede diseñar una herramienta que permita obtener resultados bastante inmediatos y efectivos. De este modo, en un determinado proceso de enseñanza-aprendizaje del alumnado, se puede evaluar las idoneidades epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, emocional y ecológica de las actividades llevadas a cabo. Con esta evaluación, se puede tener conciencia de hasta qué punto las matemáticas que se enseñan son las adecuadas, si las interacciones planteadas han sido capaces de resolver las dificultades del alumnado o si ha habido implicación de los alumnos en el proceso de instrucción, entre otros aspectos. Las distintas valoraciones obtenidas pueden representarse en un diagrama radial hexagonal que resume dichos criterios de idoneidad, en el que cada uno de los seis radios se escala para recoger las seis evaluaciones realizadas. Por lo tanto, tomando como referencia este diagrama radial hexagonal, aquí se pretende describir un diagrama que evalúe el impacto que ha tenido una actividad basada en la historia de las matemáticas en el aula, teniendo en cuenta que dicho impacto ha de considerarse desde cuatro puntos de vista: el curricular, el intercultural, el motivacional y el transversal, los cuales serán descritos en las siguientes secciones. A nuestro juicio, estos cuatro aspectos (sin cerrar la puerta a poder añadir otros que los complementen adecuadamente) pueden darnos una amplia visión sobre hasta qué punto la introducción de una actividad didáctica basada en la historia de las matemáticas ha conseguido el objetivo para el que estaba planificada.

IMPACTO CURRICULAR

Un primer aspecto que se ha de comentar es el impacto curricular, ya que la historia de las matemáticas permite trabajar uno o varios temas curriculares. Por ejemplo, siguiendo la experiencia presentada por Radford y Guérette (2000), el alumnado de educación secundaria plantea ecuaciones cuadráticas tal y como se razonaron alrededor del siglo XX a.C. en Mesopotamia. Partiendo de la ecuación $x2 + x = ¾$ y de los pasos que da el escriba de la tablilla BM13901 para resolverla, esta aventura nos traslada al mismo razonamiento geométrico babilónico (Høyrup, 1990). Organizados en grupos cooperativos, los alumnos tuvieron que encontrar las dimensiones de un rectángulo de semiperímetro igual a 20 unidades y área igual a 96 unidades cuadradas, utilizando cualquier método que pudieran conocer. Con el álgebra simbólica en sus manos, muchos plantearon el sistema de ecuaciones $x + y = 20$ y $xy = 96$, donde x e y son la base y la altura del rectángulo, y la correspondiente ecuación cuadrática $x2 - 20x + 96 = 0$ soluciones de $x1 = 8$ $(y1 = 12)$ y $x2 = 12$ $(y2 = 8)$. Sin embargo, el método de prueba-error fue el que se impuso. El profesor planteó una secuencia didáctica de tres clases de 1 hora cada una que contenía la presentación de la geometría mesopotámica, la discusión de las soluciones y la introducción del álgebra simbólica, entre otros aspectos muy interesantes. Con todo, la excusa de la lectura de un problema de la tablilla mesopotámica BM13901 permitió trabajar sistemas de ecuaciones no lineales, la resolución de las ecuaciones cuadráticas y la discusión de sus soluciones y, además, forzó la investigación de posibles soluciones mediante el sistema de prueba-error. De este modo, el currículum de esta clase, por lo que respecta al tema de las ecuaciones cuadráticas, fue enfocado de un modo distinto al habitual y tuvo el valor añadido de enseñar la manera en la que surgió un problema matemático hace casi cuatro mil años. Se puede concluir que esta actividad histórica trabajó perfectamente el tema recogido en las planificaciones curriculares y abrió, además, ciertas puertas como el poder comentar el Teorema de Viète, el cual relaciona las soluciones de una ecuación cuadrática con sus coeficientes.

Respecto a las ecuaciones cuadráticas, también vale la pena señalar la experiencia recogida por Guevara Casanova y Massa Esteve (2009), en la cual plantearon la resolución geométrica de las ecuaciones cuadráticas pero, esta vez, a partir del *Hisâb fî al-jabr wa'l-muqqabala* (*Álgebra*) de Muhammad ibn Mûsâ al-Jwârizmî (s.IX). El alumnado tuvo que responder cinco preguntas sobre la resolución planteada, pero también sobre el contexto político y social de Bagdad del siglo IX y sobre la relación entre el algoritmo actual de resolución de las ecuaciones de segundo grado y la solución retórica medieval. Por lo tanto, aquí el impacto curricular es evidente, no sólo por el trabajo que se hizo de la resolución de la ecuación cuadrática, sino porque también se trabajó el lenguaje algebraico y la traducción del procedimiento geométrico al álgebra.

IMPACTO INTERCULTURAL

El segundo gran impacto de la historia de las matemáticas es el intercultural, ya que con su introducción se permite una aproximación a algunas de las culturas que han intervenido en su desarrollo a lo largo de la historia. Un ejemplo de esto fue implementado por este autor en una clase de 32 alumnos de 15/16 años de enseñanza secundaria obligatoria de un instituto de Badalona (4º de ESO en el sistema educativo español). En esta clase del curso 2017-2018, había 15 alumnos y alumnas de religión musulmana, dado el alto grado de inmigración que ha habido en la periferia de Barcelona (España) en los últimos años. Este dato proporcionó una oportunidad única para trabajar la dimensión intercultural de la enseñanza. Partiendo de los versículos 11 y 12 del capítulo 14 del Corán, en los cuales se relata cómo se deberían repartir las herencias, se plantearon diversos problemas de álgebra lineal que fueron resueltos por los alumnos. La secuencia didáctica planteada por el autor de este artículo partía de cuatro sesiones de 1 hora cada una, en la que la primera de ellas estaba casi íntegramente dedicada a presentar la Edad Media, la hegemonía cultural del Islam de los siglos VIII-XIII, nociones de la religión musulmana, la presentación de la figura del califa al-Ma'mûn (m. 833) y de su Casa de la Sabiduría en Bagdad y, por supuesto, de la figura del gran matemático y astrónomo Muhammad ibn Mûsâ al-Jwârizmî. En la segunda de las sesiones, se leyeron los dos versículos y partiendo del ejemplo concreto descrito en Dorce (2016b), se explicó el método de reparto de herencias legal que imperó en los dominios musulmanes de Asia y también en Europa a lo largo de toda la Edad Media, en el que a cada posible heredero le corresponde una cantidad distinta dependiendo del grado de parentesco con el difunto o difunta, y se han de tener en cuenta las posibles deudas. El problema inicial, planteado por al-Jwârizmî, es el siguiente:

> *Un hombre muere y deja dos hijos y diez dirhams de capital y una deuda de diez dirhams por parte de uno de sus hijos, y lega a un amigo un quinto del capital más un dirham.*

Con este pretexto inicial, se planteó el problema como si no hubiera la deuda. Por lo tanto, se deberían repartir los 10 dirhams más los 10 que eran debidos: al amigo le toca 1 dirham más que la quinta parte de estos 20 dirhams y se le darían sus 5 correspondientes, mientras que a cada uno de los hijos les corresponderían la mitad de la diferencia, es decir, la mitad de $20 - 5 = 15$: 7,5 dirhams a cada uno. Pero este reparto no es justo porque, recordemos, uno de los hijos debía 10 dirhams. La ley coránica consideraba que si el hijo debía más de la cantidad que le correspondía, esa parte estaba incluida dentro de la deuda y que el resto era un regalo del padre. Por lo tanto, con el alumnado se planteó que si *x* era la cantidad justa que debía recibir el hijo moroso, una vez aportada a la herencia se tendrían $10 + x$ dirhams a repartir. De este modo:

1. El amigo recibiría $\frac{x+10}{5}+1=\frac{x}{5}+3$ dirhams.

2. quedan para repartir $(x+10)-\left(\frac{x}{5}+3\right)=\frac{4x}{5}+7$ dirhams.

3. Cada hijo debería recibir su mitad: $\frac{1}{2}\left(\frac{4x}{5}+7\right)=\frac{2x}{5}+\frac{7}{2}$ dirhams.

4. Pero esta es la cantidad que debería ser igual a la deuda real del hijo moroso. Por lo tanto:

$$\frac{2x}{5}+\frac{7}{2}=x \rightarrow \frac{3x}{5}=\frac{7}{2} \rightarrow x=\frac{35}{6}=5+\frac{5}{6} \text{ dirham}$$

5. Así, el amigo recibe $\frac{\left(5+\frac{5}{6}\right)+10}{5}+1=4+\frac{1}{6}$ dirhams.

6. Quedan por repartir $\left(15+\frac{5}{6}\right)-\left(4+\frac{1}{6}\right)=11+\frac{2}{3}$ dirham.

7. Por lo tanto, a cada hijo le toca la mitad: $5+\frac{5}{6}$ dirhams.

8. El amigo cobrará $4+\frac{1}{6}$ dirhams, uno de los hijos cobrará $5+\frac{5}{6}$ dirhams y, finalmente, el hijo moroso no cobrará nada y se le habrán perdonado $4+\frac{1}{6}$ dirhams de su deuda con el padre.

Tras esta introducción, se plantearon los mismos problemas de repartos de herencias que planteó al-Jwârizmî en su *Álgebra* y durante dos sesiones el alumnado estuvo trabajando la resolución de las ecuaciones de primer grado desde un punto de vista práctico e intercultural. Cabe señalar que el alumnado musulmán acogió muy bien esta actividad y el resto de alumnado vio por primera vez aspectos culturales de sus propios compañeros y compañeras que, de otro modo, tal vez no hubiesen sabido. ¡Y lo hicieron en la clase de matemáticas! Se trabajó el respeto y el conocimiento intercultural con las ecuaciones como excusa y, por lo tanto, el impacto intercultural de esta actividad fue muy alto.

IMPACTO MOTIVACIONAL

La motivación aportada por la historia de las matemáticas es otro de los aspectos destacados por Panasuk y Horton (2012), ya que la introducción de datos y anécdotas suelen ser muy bien acogidas por parte del alumnado. Un ejemplo de esto fue la introducción de la figura de Lewis Carroll en el aula de matemáticas y su continuación en 1898 de la cuestión iniciada en 1817 por William Leighton, la cual permite trabajar las operaciones de los números decimales (Dorce, 2013a). El problema en sí trata de pensar un número cualquiera de tres cifras, esta vez disfrazado como una unidad seguida de dos cifras decimales, intercambiar la cifra de las unidades por la de las centenas y calcular la diferencia entre el mayor y el menor de ambos. Tras esto, se le vuelve a dar la vuelta al resultado y se suman ambas cantidades para obtener, en la gran mayoría de casos, el número 10,89. Este juego en sí mismo no es definitivamente histórico, pero permite iniciar un interesante camino dentro de la historia de las matemáticas que inicialmente no se enmarca en una planificación clásica de la secuencia didáctica. En este caso concreto, los 25 alumnos de 13/14 años de educación secundaria obligatoria (2º de ESO en el sistema educativo español) vieron cómo fueron inventados los números decimales y que, antes del siglo XVI, en Europa se trabajaba con los números mixtos (casi desaparecidos en los libros de texto españoles). Abû'l Hasan Ahmad ibn al-Uqlîdisî (fl. 952), Fibonacci (c.1180–c.1250), Francesc Santcliment (s.XV), Simon Stevin (1548–1620) y John Napier (1550–1617) formaron parte de este relato y pese a que estaba prevista la introducción del álgebra simbólica, la clase se enfocó hacia algoritmos desconocidos de la multiplicación, como los expuestos por Luca Pacioli (1446/7–1517) en su *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita* (1494) o los derivados de las reglillas que Napier describió en su *Rabdologia*, publicada póstumamente en 1619. Este instrumento funcionó como una calculadora en el Renacimiento europeo y fácilmente son conseguibles múltiples actividades sobre su construcción y su uso, como la planteada por la *Resource Area for Teachers* de San José, Califòrnia (Shore, 2003). Con todo, estos alumnos vivieron las operaciones con los números decimales con una motivación fuera de lo común, ya que la excepcionalidad de esta actividad les permitió querer saber más, y provocó sus preguntas continuas sobre los temas tratados. Por lo tanto, se rompió la imagen paradigmática de una clase de matemáticas cerrada y aburrida para dar paso a un espacio de historias y preguntas que parecía no terminar nunca.

IMPACTO TRANSVERSAL

Finalmente, se ha de destacar el impacto transversal que tiene la historia de las matemáticas sobre otras áreas, ya que proporciona un espacio ideal para poderla relacionar con otras asignaturas. Por ejemplo, relacionando las matemáticas con el estudio de redes en asignaturas tecnológicas, puede introducirse en el aula la interesante lectura del *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis* de Leonhard Euler (1707–1783), presentado en la Academia de San Petersburgo el 26 de agosto de 1735, la cual contiene la resolución del conocido como Problema de los Puentes de Königsberg. El texto fue publicado en inglés en el año 1976 (Biggs, N.L., Lloyd, E.K. y Wilson, R.J., 1976) y su lectura deja muy claro cómo los razonamientos matemáticos cambian a lo largo de la historia. La comprensión de los grafos eulerianos, ya sea desde un punto de vista únicamente recreativo, con los típicos problemas de dibujar figuras sin levantar el lápiz del papel, como en esta propuesta sobre el análisis de redes en distintos problemas de tecnología, significa un planteamiento absolutamente distinto del que afrontó por primera vez Euler al resolver la pregunta de si era posible pasearse por la ciudad de Königsberg (actual Kaliningrado) pasando una única vez por cada uno de sus siete puentes. En este caso, además, puede introducirse un texto en inglés en el aula con las importantes connotaciones que tiene este aspecto dentro del currículo de las lenguas extranjeras. Como dato interesante, vale la pena señalar que este es uno de los temas fijos de los trabajos que realizan los alumnos de la asignatura de Historia de las Matemáticas del Grado de Matemáticas que se imparte en la Universidad de Barcelona y, por la experiencia, se puede afirmar que, también desde un punto de vista anecdótico, al alumnado le sorprende cómo un problema tan lejano de las matemáticas del aula ordinaria puede terminar derivando en la coloración de un mapa únicamente con cuatro colores.

LA RÚBRICA DE EVALUACIÓN DE LOS CUATRO IMPACTOS

Dentro de la experiencia cotidiana del aula, cada una de las veces en las que se ha ido introduciendo la historia de las matemáticas dentro de las unidades didácticas, se ha intentado evaluar tanto la planificación, como la implementación y los resultados de aprendizaje que se han obtenido con ella. Al principio, sólo la sensación de éxito o fracaso era el indicador principal de evaluación, pero, tras debatir y argumentar con otros compañeros y compañeras docentes, y analizar las replanificaciones obtenidas, se vio factible la posibilidad de elaborar una rúbrica para analizar los cuatro impactos descritos para cada una de las actividades. Con todo, pasamos a detallar ahora los cuatro posibles resultados de cada una de las rúbricas de los impactos evaluados.

Para poder evaluar el impacto curricular que tiene cada una de estas actividades en el aula, pueden considerarse los siguientes resultados:

A. La actividad ha conseguido trabajar algunos/ciertos aspectos presentes en el currículo de la asignatura. Mediante la aplicación de una cuestión histórica, el alumnado se ha introducido en un tema curricular y lo ha trabajado fuera de la típica realización de ejercicios. Por lo tanto, el tema o temas tratados se han abordado desde un punto de vista de la necesidad de su aparición y no desde la típica explicación magistral y la realización de los consecuentes ejercicios. Por lo tanto, esta actividad puede ser apropiada para complementar la correcta comprensión del tema en cuestión.
B. La actividad permite trabajar el currículo, pero profundiza poco en el tema de la unidad didáctica. Por lo tanto, es una actividad que se puede considerar como complementaria dentro de la secuencia didáctica y, quizá, debería ser replanificada. Con modificaciones puede conseguirse una actividad que tenga más incidencia curricular y permita un trabajo más explícito del temario que se pretende enseñar.
C. La actividad utiliza algún aspecto curricular pero lo hace tangencialmente, es decir, no permite un desarrollo específico del temario, ni siquiera superficialmente. Si se quiere repetir, se debería replantear su utilidad y quizá

ser realizada en otro momento del curso. Por lo tanto, puede que la unidad didáctica en la que se ha implementado la actividad no sea su lugar adecuado y que su contenido puede adaptarse a otro momento concreto del currículo, sin renunciar a que se trabajen aquellos pocos contenidos y/o procedimientos que sí han quedado cubiertos.

D. La actividad no ha trabajado ningún tema curricular relevante pese a la planificación y secuenciación previstas. Se ha realizado la actividad dentro de la unidad didáctica pero la presencia del temario es absolutamente testimonial y se puede poner en duda su utilidad.

Para poder evaluar el impacto intercultural, los resultados que hay que tener en cuenta son los siguientes:

A. La actividad ha permitido conocer el impacto de las matemáticas en distintas culturas, no sólo la autóctona. La historia de las matemáticas ha permitido conocer aspectos culturales y científicos ausentes en el currículo específico, y ha aportado nociones interesantes que todo alumno debería saber. Por otro lado, también se tiene en cuenta las posibilidades de integración que ha promovido la actividad en sí misma, permitiendo la integración de elementos ajenos a la propia asignatura pero que son imprescindibles para la armonía y cohesión social del aula.
B. La historia de las matemáticas ha permitido trabajar la dimensión intercultural que hay en los currículos y la interculturalidad cultural y social presente en el aula. Sin embargo, los temas tratados sólo recogen el panorama intercultural como una anécdota y no llegan a profundizar en las múltiples posibilidades que aporta el conocimiento de una cultura distinta a la propia.
C. La implementación de la actividad sólo aporta el conocimiento propio de ciertos aspectos culturales y científicos autóctonos, pero no permite la interacción entre distintas culturas, con lo que centra su interés en complementar contenidos curriculares de otras asignaturas como pueden ser las relacionadas con las ciencias sociales, la geografía y la historia. Con alguna modificación en una replanificación se puede conseguir una mejora sustancial del impacto añadiendo aspectos interculturales que aún no están presentes.
D. La actividad no ha aportado ningún elemento intercultural destacado con lo que su utilidad es cuestionable. En este caso, su objetivo no era el de

acercar aspectos culturales al alumnado participante ni tampoco el ser utilizada como canal de cohesión en el aula. También debe recogerse que el planteamiento de la actividad, lejos de fomentar la interculturalidad, haya creado mayor sesgo social y fomentado, en cierta manera, el integrismo y el rechazo por lo distinto. Finalmente, cabe la posibilidad de que el objetivo de la actividad fuera el adecuado pero no se hubiese conseguido por algún motivo que debería ser evaluado.

Por lo que respecta a la evaluación del impacto motivacional, los resultados que hay que tener en cuenta son los siguientes:

A. La actividad ha aportado elementos en el aula que han provocado despertar el interés por la asignatura. El alumnado no sólo ha estado receptivo con ciertos aspectos de la actividad planteada, sino que se ha mostrado interesado dentro de su implementación y también por los resultados obtenidos. En general, ha habido preguntas interesantes que han abierto la puerta a nuevas oportunidades curriculares y se ha detectado que, globalmente el alumnado desea que haya más actividades similares en la asignatura de matemáticas.
B. La actividad ha despertado el interés de la mayoría del alumnado, pero el factor novedad ha influido en demasía. Por lo tanto, pese a que no se pueda afirmar que la actividad ha cumplido su propósito motivador, el hecho de que el alumnado no esté acostumbrado a este tipo de actividades de aula ha influido más que la intención inicial de conseguir que el alumnado sienta interés por las matemáticas.
C. La actividad aporta aspectos novedosos (ya sea en el procedimiento como en los resultados) que el alumnado ha valorado, pero no ha llegado a despertar un interés destacable. Sólo la novedad de haber introducido una actividad de este tipo ha conseguido que el alumnado haya estado participativo, pero no parece que haya servido para captar toda la atención que se pretendía. En una futura replanificación, se debería pensar mejor su utilidad motivadora.
D. Sin duda, la actividad se ha convertido en una más dentro de la secuencia didáctica y el alumnado, en ningún momento, se ha visto atraído por ella. Se ha visto como una obligación curricular más y en lugar de aportar algo divertido/motivador al aula, no ha dejado de seguir la línea tradicional que al alumnado no gusta. No tiene mucho sentido volverla a programar.

Finalmente, la rúbrica del impacto transversal es la siguiente:

A. Esta actividad ha permitido relacionar los problemas matemáticos y sus soluciones a otras asignaturas de modo efectivo y generoso. Por lo tanto, las matemáticas no han sido las únicas protagonistas de la actividad, sino que han compartido escena con otras asignaturas al mismo nivel.
B. La historia de las matemáticas ha planteado relaciones con otras asignaturas y/o ha permitido trabajar ciertos temas curriculares de las mismas. Sin embargo, pese a compartir este espacio de aula, los procesos matemáticos han sido los auténticos y palpables protagonistas.
C. La actividad ha permitido la aparición tangencial de otras asignaturas curriculares del alumnado, pero sólo como necesidad argumental. Por lo tanto, es posible que una buena replanificación de la actividad pudiera hacer a estas asignaturas mucho más presentes en implementaciones futuras.
D. En este caso, la introducción de la historia de las matemáticas no tiene ninguna repercusión más allá de la propia asignatura. Consecuentemente, no tiene ningún impacto transversal.

Con estas rúbricas, es posible rellenar un cuadro (tabla 1), el cual ha de permitir tomar decisiones de cara a una posible replanificación. Como se ve en ella, la rúbrica ha de ser completada tanto por los docentes que la han llevado a cabo como por el alumnado, ya que este es el único modo de medir realmente el impacto que ha tenido sobre el grupo-clase. En general (véanse los dos ejemplos siguientes de aplicación), tanto la rúbrica del docente como la rellenada por los alumnos son muy similares y, hasta el momento, no se dispone de ejemplos en el que las rúbricas discrepen. Estos ejemplos son necesarios para poder evaluar este sistema de rúbricas y detectar posibles anomalías, pero este autor aún no dispone de ellos. Habrá que esperar que futuras implementaciones los proporcionen y, de este modo, poder analizar con más detalle este método de evaluación.

Tabla 1: rúbrica evaluadora del impacto

Impacto	Evaluación docente	Evaluación el alumnado	Comentario cualitativo
C			
I			
M			
T			

Primer ejemplo práctico y los cuadriláteros CIMT (Curricular, Intercultural, Motivacional y Transversal)

Este primer ejemplo práctico está basado en la experiencia descrita por Dorce (2016c), cuya propuesta se centra en la lectura del primer tratado de fortificación que se imprimió en castellano en el siglo XVI: la *Teorica y practica de fortificacion* (1598). Su autor, Cristóbal de Rojas (c.1555–1614), lo pensó para ser un tratado didáctico sobre aritmética y geometría útil y necesario para cualquier ingeniero, por lo que sus explicaciones pueden ser aprovechadas actualmente. En este sentido, Rojas explica en su capítulo XXII cómo "medir distancias" (Rojas, 1598) y Dorce plantea que sus alumnos y alumnas de 4º de ESO, colaborando en esta actividad mediante trabajo cooperativo, midan el patio de su instituto (de unos 112,78m. de longitud) en seis actividades distribuidas a lo largo de cuatro sesiones de 60 minutos cada una. En la sexta de estas actividades, la clase se desplaza directamente al patio y cada grupo dispone de cuadernos de notas, calculadora, un transportador de ángulos y una cuerda de longitud de 10m. Siguiendo las instrucciones de Rojas, y con una buena guía del profesor, el alumnado obtuvo nociones sobre los renacentistas italianos Girolamo Cardano (1501–1576) y Niccolò Tartaglia (c.1499–1557), el francés François Viète (1540–1603) y, en otro ámbito, de los españoles Juan de Ortega (c.1480–1568) y Juan de Herrera (1530–1597). Por lo tanto, y además de la introducción del trabajo cooperativo y del tratamiento de información con las TIC (los cuales también están explicados por Dorce (2016c)), el alumnado aplicó directamente tanto el Teorema de Tales como conocimientos de trigonometría a la medida de distancias y lo hizo tras la introducción histórica de un tratado del siglo XVI que daba respuesta a un problema que era prioritario para los ingenieros y militares de entonces.

Esta secuencia didáctica se volvió a realizar en el año 2017 con un grupo de 30 alumnos de 4º de ESO y, posteriormente, en 2018 con un grupo de 25 alumnos, también de 4º de ESO y, en ambas ocasiones, se pasaron las rúbricas al alumnado (tabla 2). Los resultados de estas rúbricas pueden verse en las tablas 3 y 4

Tabla 2: rúbrica del alumnado

Impacto Curricular		Impacto Intercultural	
A	Hemos trabajado contenidos matemáticos del temario y nos ha servido para reforzar/profundizar en la propia asignatura.	A	Hemos conocido aspectos científicos y/o culturales de otras sociedades/culturas/civilizaciones ajenas a la propia.
B	Hemos realizado algún ejercicio relacionado con el tema que estamos trabajando pero la carga histórica era mayor.	B	Han aparecido nociones científicas y culturales de otras sociedades/culturas/civilizaciones ajenas a la propia.
C	La actividad era muy histórica y el temario ha aparecido de manera anecdótica: hemos realizado algún ejercicio y poco más.	C	Han aparecido alguna anécdota que hace referencia a otras culturas.
D	No hay relación alguna entre la actividad que hemos hecho y el tema de la asignatura que estamos trabajando.	D	No hemos aprendido ningún elemento intercultural destacado.
Impacto Motivacional		**Impacto Transversal**	
A	Esta actividad nos ha gustado mucho, ya sea por el tipo de actividad que es o por las ganas de aprender que ha provocado. Se debería repetir este tipo de actividades.	A	Esta actividad no es propiamente de matemáticas sino que también es propia de asignaturas como (completar): __________ ____________________________
B	Nos ha gustado trabajar este tema histórico porque es distinto a lo que estamos acostumbrados. Puede ser interesante repetir este tipo de actividad en otros temas.	B	En algunos momentos no parecía que estuviésemos en clase de matemáticas sino que más bien estábamos en clase de (completar): _________________________
C	La actividad ha estado bien y podría estar bien repetir clases como estas últimas.	C	Mientras realizábamos esta actividad, han aparecido algunos temas de otras asignaturas.
D	No hacía falta haber realizado esta actividad. Ha sido aburrida y/o demasiado larga. Es preferible hacer ejercicios de clase.	D	Sólo hemos trabajado más matemáticas.

En el caso de la actividad realizada en el 2017, las respuestas de los 29 alumnos pueden verse en la columna correspondiente de la tabla 3 y cabe destacar la coincidencia entre alumnado y profesor en las respuestas referentes al impacto contextual, motivacional y transversal. Es evidente que, al plantear esta actividad dentro del tema introductorio a la trigonometría, se trabajaron apartados concretos que estaban recogidos en el libro de texto y sobre los cuales ya se habían realizado y corregido ejercicios. Sobre el impacto motivacional, era la primera vez que se realizaba una actividad así y el alumnado expresó su opinión al respecto con el entusiasmo esperado. Finalmente, la coincidencia en el impacto transversal era bastante evidente ya que, en ningún caso, esta actividad trabajó otras asignaturas más allá de la utilidad que pudiese tener en la vida real un sistema de medición de distancias que no necesita ningún instrumento específico. Dicho esto, el interés se centra en comentar el caso algo discrepante. La opinión sobre el impacto intercultural que tuvo esta actividad fue distinta. El profesor vio en esta primera introducción a las matemáticas renacentistas italianas una oportunidad para abrir los horizontes de las matemáticas al desarrollo científico que hubo fuera de las fronteras españolas en los siglos XV y XVI. Sin embargo, el alumnado mayoritariamente discrepó de este planteamiento.

Tabla 3: rúbrica evaluadora del impacto en el año 2017

Impacto	Evaluación docente	Evaluación del alumnado	Comentario cualitativo
C	A	A (25) B (4)	*Esta actividad permite trabajar la semejanza de triángulos, el Teorema de Tales y aspectos relacionados con la trigonometría.*
I	B	C (26) D (2) A (1)	*Se han introducido algunos detalles de las aportaciones relevantes de Girolamo Cardano y de Niccolò Tartaglia, ambos italianos, a las matemáticas. También se ha hablado de la historia de las matemáticas en España.*
M	A	A (26) D (3)	*Al alumnado le ha gustado notablemente trasladar la clase al patio para poner en práctica el capítulo XXII del tratado de Rojas.*
T	C	C (20) D (7) B (2)	*No se ha conseguido relacionar las matemáticas con otras asignaturas y sólo se apunta su relación con la ingeniería.*

Con estos resultados, se intentó replanificar la actividad procurando hacer más presente la interculturalidad de las matemáticas. Con esta idea, el profesor añadió una explicación magistral sobre la historia de la resolución de la ecuación cúbica por radicales (véase, por ejemplo, Dunham (1993) o Dorce (2013b)), desde las resoluciones en la antigua civilización mesopotámica hasta el Renacimiento italiano, pasando por los intentos del persa Omar Jayyâm (1048–1131). Sin embargo, la percepción intercultural no se detecta y se ha de destacar que, en proporción, esta visión disminuye entre el alumnado.

Tabla 4: rúbrica evaluadora del impacto en el año 2018

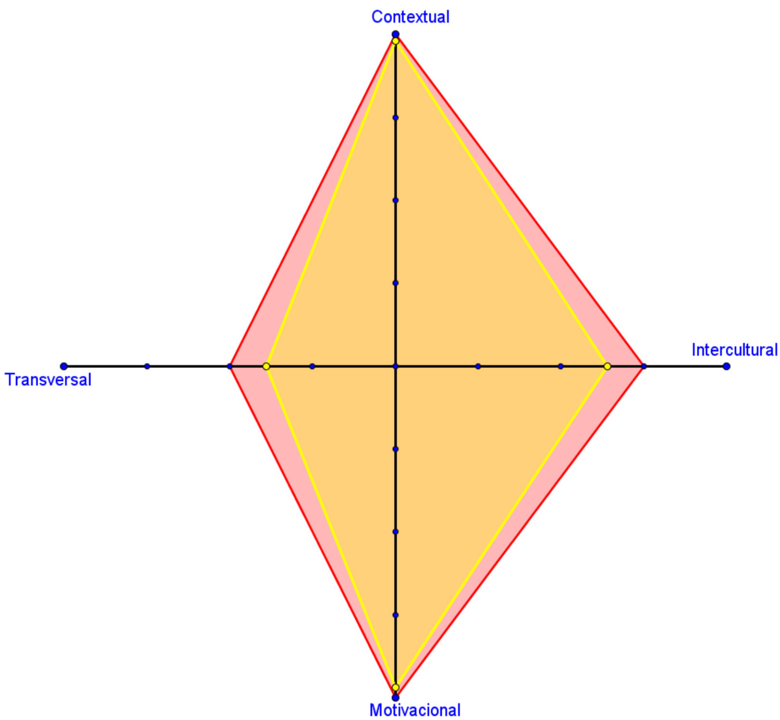
Impacto	Evaluación docente	Evaluación del alumnado	Comentario cualitativo
C	A	A (23) B (2)	*Esta actividad permite trabajar la semejanza de triángulos, el Teorema de Tales y aspectos relacionados con la trigonometría.*
I	B	C (12) B (9) A (3) D (1)	*Se ha hablado del estado de las matemáticas en la antigua Mesopotamia, y se ha introducido la histórica hegemonía musulmana medieval por lo que respecta a la ciencia. Se ha seguido tratando el Renacimiento español e italiano de los siglos XV y XVI.*
M	A	A (22) B (3)	*No parece que haber introducido la historia de la resolución cúbica de manera magistral haya afectado al desarrollo de esta actividad. El peso que tiene bajar la clase al patio sigue siendo muy potente.*
T	C	C (14) D (11)	*Se sigue sin verla relación de las matemáticas con otras asignaturas. El porcentaje de alumnado que no ve esta relación aumenta considerablemente.*

Siguiendo la propuesta de representación de las idoneidades de Godino, Batanero y Font (2007), aquí se podría hacer algo parecido para representar la tabla 4 y ver la diferencia en las opiniones del alumnado y del profesor (figura 1). En unos ejes perpendiculares se representan los distintos impactos. Por ejemplo, el grado de impacto contextual viene a estar representado en el semieje positivo de las ordenadas, de modo que la opción A sería el punto (0;4), la B el punto (0;3), la C el punto (0;2) y la D el punto (0;1). Análogamente se representan el grado de impacto intercultural en el semieje positivo de abscisas, el grado de impacto motivacional en el semieje negativo de ordenadas y el grado de impacto transversal en el semieje negativo de abscisas. En cada uno de estos cuatro semiejes se representan los vértices de un primer cuadrilátero con la opinión del profesor. En el caso concreto de la evaluación de la actividad del año 2018, este cuadrilátero tendría como vértices los puntos (0;4), (3;0), (0;−4) y (−2;0), correspondientes a las calificaciones A, B, A y C en las rúbricas de los impactos contextual, intercultural, motivacional y transversal, respectivamente. Del mismo modo, se representa un segundo cuadrilátero cuyos vértices han de significar la opinión del alumnado. Para ello, un sencillo cálculo nos permite poder representar lo más adecuadamente posible la diversidad de opiniones obtenida. Así, por ejemplo, en el caso del impacto intercultural, se calcula la proporción que representan las calificaciones dadas por el alumnado sobre el máximo posible, asignando el valor máximo de 4 a cada una de las calificaciones A, un 3 a las B, un 2 a las C y un 1 a las D. Es evidente que esta escala de valores podría haber sido distinta pero para escogerla se ha buscado un sistema de valoración que respondiese principalmente a dos hechos. En primer lugar, dado que hay cuatro posibles valoraciones para la evaluación del impacto, la máxima puntuación debía ser un 4, de modo que no hubiese ninguna ambigüedad al respecto. En segundo, si bien es cierto que la mínima puntuación podría corresponder al valor 0, se ha pensado que el 1 responde mejor a la representación que se hará después en el gráfico radial. Si se permitiera un posible valor 0, el cuadrilátero representado dejaría de tener cuatro lados y la visualización del gráfico no sería todo lo efectiva que se quiere que sea. A partir de aquí, la valoración *K* de este impacto viene dada por la fórmula:

$$K = \frac{4\cdot n_A + 3\cdot n_B + 2\cdot n_C + 1\cdot n_D}{4\cdot\left(n_A + n_B + n_C + n_D\right)} = \frac{4\cdot 3 + 3\cdot 9 + 2\cdot 12 + 1\cdot 1}{4\cdot 25} = \frac{64}{100} = 0{,}64$$

Este valor *K*, escalado al intervalo [0, 4], da un resultado de 4 · 0,64 = 2,54 y, precisamente, es el punto (2,56; 0) el que debe ser el vértice representado. Con todo, se consigue ver en este gráfico polar los dos cuadriláteros CIMT y, con ellos, la discrepancia entre los resultados obtenidos por ambas rúbricas. La situación ideal sería que no sólo se obtuvieran cuadriláteros muy similares, sino que, además, éstos fueran cuadrados perfectos con los vértices situados en los extremos de los cuatro semiejes. Por lo tanto, para replanificar la actividad, por un lado, hay que tener en cuenta la diferencia entre lo previsto (cuadrilátero CIMT del profesor) y el resultado obtenido por el alumnado (cuadrilátero CIMT del alumnado). En nuestro caso, si el cuadrilátero CIMT del profesor tiene un área de 20 unidades cuadradas, la discrepancia con el cuadrilátero CIMT del alumnado es de 3,93 unidades cuadradas (−20%, aproximadamente) y esto significa que no se está consiguiendo el impacto global deseado (con más ejemplos realizados en un futuro, se podrán concretar límites de satisfacción para estos valores). Por otro lado, se deberá intentar desplazar los vértices de ambos cuadriláteros CIMT hacia los extremos de los semiejes y, consecuentemente, conseguir una actividad didácticamente completa.

Figura 1: cuadriláteros CIMT de la actividad realizada en 2018. el cuadrilátero exterior se corresponde con la evaluación del profesor mientras que el interior se corresponde con la del alumnado



Segundo ejemplo práctico

Este segundo ejemplo se basa en la actividad llevada a cabo por este autor con 32 alumnos de 16/17 años de 1º de bachillerato de la especialidad científico-tecnológica del mismo instituto donde se han realizado las anteriores prácticas. Esta es la primera vez que se introducía la historia de las matemáticas como tal en el bachillerato de ese instituto y, por lo tanto, su evaluación tenía mucho interés. El tema curricular principal de la unidad didáctica eran los lugares geométricos y las secciones cónicas y se dedicaron un total de cinco sesiones de 60 minutos. Tras presentar el tema y realizar una pequeña evaluación inicial, toda la actividad se fundamentó inicialmente en el visionado de la película *Ágora* (Bovaira & Amenábar, 2009) de Alejandro Amenábar, de 126 minutos de duración, que, pese a algunos errores históricos importantes, es una buena presentación del problema del cálculo de las órbitas planetarias desde tiempos de Hiparco de Rodas (s. II a.C.) hasta la Alejandría del siglo V. En concreto, las escenas que merecieron más atención fueron las siguientes:

1. Escena 1 (1'20"– 3'20"), representa una clase magistral de la gran Hipatia de Alejandría (m.415) sobre física aristotélica en la Biblioteca de Alejandría en el año 391.
2. Escena 2 (11'25"–14'30"), el esclavo Davo muestra a Hipatia (y posteriormente a toda la clase) un modelo ptolemaico del Sistema Solar tridimensional. Explica muy por encima el funcionamiento del sistema de Ptolomeo (s. II d.C.) y su intento de seguir con las premisas aristotélicas. Tangencialmente, aparece la primera noción común de los *Elementos* de Euclides (s. III a.C.) como respuesta a la pelea entre Orestes y Sinesio.
3. Escena 3 (24'50"–25'01"), aparecen las "cónicas de Apolonio": círculo, elipse, parábola e hipérbola.
4. Escena 4 (39'26"–42'20"), Hipatia y Orestes hablan sobre el sistema ptolemaico. Aparece la figura de Aristarco de Samos (c.310 a.C.–c.230 a.C.) con su hipótesis heliocéntrica de quien un personaje de la película dice que es "tan absurda y tan antigua que nadie la considera": el heliocentrismo. También se citan algunas refutaciones históricas a la oposición al movimiento de la Tierra.
5. Escena 5 (61'22"–63'03"), Hipatia muestra a Orestes que el movimiento de la Tierra alrededor del Sol podría ser posible.
6. Escena 6 (63'52"–64'50") debate sobre si la Tierra es plana o es esférica.
7. Escena 7 (63'52"– 66'50"), Hipatia explica a Aspasio la circunferencia como

lugar geométrico al intentar determinar el movimiento de la Tierra alrededor del Sol.

8. Escena 8 (75'31"–76'20"), en el aula de Hipatia aparecen diversos instrumentos entre los que se encuentra el cono de Apolonio.
9. Escena 9 (82'28"–84'50"), Hipatia sigue pensando en el movimiento de la Tierra alrededor del Sol abriendo la puerta a que la circunferencia no sea la respuesta.
10. Escena 10 (96'52"–101'08"), al lado del cono de Apolonio, Hipatia y Aspasio hablan de la órbita terrestre alrededor del Sol y aparece la órbita elíptica. Hipatia construye la elipse como lugar geométrico.
11. Escena 11 (111'32"–112'47"), asesinato de Hipatia.
12. Al final de la película, se explica la figura de Hipatia en tres líneas y aparece el nombre de Johannes Kepler (1571–1630) como el descubridor de la Primera Ley que lleva su nombre.

Tras el visionado general de la película, la cual ya se sabía que iba a ser utilizada desde un punto de vista didáctico, el profesor comentó alguna de estas escenas y el alumnado quedó emplazado a buscar información sobre Apolonio de Perga, Aristarco de Samos, Euclides de Alejandría, Hiparco de Rodas, Hipatia de Alejandría, Ptolomeo de Alejandría y Teón de Alejandría. No se trató de buscar un saber enciclopédico, sino que, con la ayuda de páginas web como Wikipedia, se pudiera tener una idea de la importancia de estos personajes dentro del panorama científico antiguo. Los resultados fueron compartidos en la última sesión con todos los compañeros. En la tercera sesión, el profesor explicó el problema de la determinación de la órbita del Sol alrededor de la Tierra según Ptolomeo y, en la cuarta, el alumnado tuvo que diseñar el modelo ptolemaico adaptándola a los datos actuales astronómicos. Finalmente, en la quinta sesión, además de mostrar los resultados de las comentadas mini-investigaciones, se compararon los resultados obtenidos mediante el sistema ptolemaico "actual" y los datos reales de la órbita elíptica de la Tierra. Siguiendo textos como Toomer (1984) o Dorce (2006), el alumnado aplicó directamente la geometría aprendida a lo largo de su bagaje académico a la determinación de la órbita solar desde un punto de vista geocéntrico (manejando el Teorema de Pitágoras, el cálculo operacional con ángulos y su base sexagesimal, trigonometría...) aunque, también cabe señalar, que no todos los alumnos tuvieron éxito. Como colofón a todo esto, hubo tiempo de salir al patio del instituto a reproducir las construcciones representadas en la película de Amenábar que Hipatia hace de la circunferencia y la elipse. En la sexta sesión, ya fuera de esta actividad histórica propiamente dicha, se construyó la ecuación de la circunferencia y de la elipse usando la geometría analítica y las nociones aprendidas en esta corta aventura.

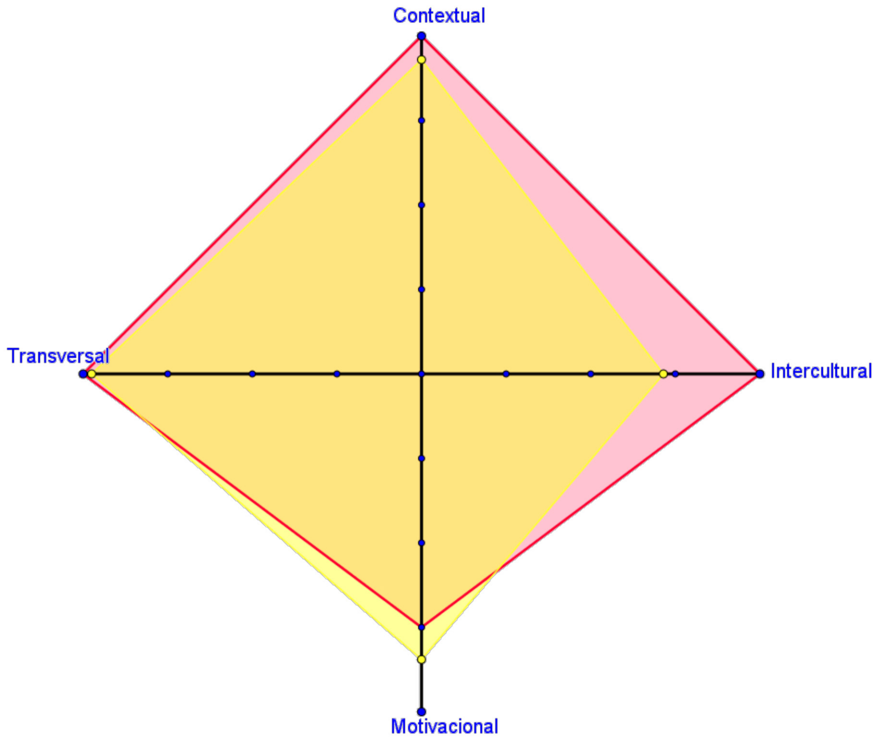
Por lo que respecta a la rúbrica de evaluación, esta pudo ser contestada por 29 de los alumnos (tabla 5).

Tabla 5: rúbrica evaluadora del impacto de la actividad

Impacto	Evaluación docente	Evaluación del alumnado	Comentario cualitativo
C	A	A (21) B (8)	*Se han introducido las cónicas, se ha visto como construirlas y una de sus utilidades en la realidad que nos envuelve.*
I	A	B (19) C (7) A (3)	*Se ha tratado la resolución de los antiguos matemáticos griegos al problema del cálculo de las órbitas planetarias. Además, la película aporta el visionado de las luchas religiosas, de la esclavitud… muy presentes también actualmente en muchos rincones del mundo.*
M	B	A (15) B (11) C (2) D (1)	*El alumnado se ha mostrado muy participativo en la búsqueda de información. Sin embargo, en el visionado de la película ha habido momentos de distracción.*
T	A	A (26) B (3)	*Se trabajan temas de historia de la filosofía, de ciencias del mundo contemporáneo, de historia y de física.*

Traspasados los resultados de la rúbrica al esquema de los cuadriláteros CIMT, puede verse que tanto profesor como alumnado coinciden bastante en lo que respecta a los impactos contextual y transversal, mientras que existe una cierta discrepancia en la opinión que hay de los otros dos impactos. Probablemente, la diferencia de calificación en el impacto motivacional viene dada por el hecho de que haya habido alumnado que se haya distraído en la proyección de la película (comentario de la tabla 4) aunque, en general, al alumnado le ha gustado la actividad. Por otro lado, la discrepancia en el impacto intercultural puede venir determinado por la poca sensación que tiene el alumnado de haber aprendido cosas ajenas a su propia cultura. Finalmente, cabe decir que el área del cuadrilátero CIMT del alumnado es poco más de 14% menor que la del cuadrilátero CIMT del profesor con lo que, una vez más, parece que el impacto global de la actividad en el alumnado ha sido inferior a las expectativas.

Figura 2: cuadriláteros CIMT del segundo ejemplo práctico El cuadrilátero CIMT correspondiente a la evaluación del profesor es el que tiene sus vértices izquierdo, superior y derecho exteriores



CONCLUSIÓN

La evaluación del impacto que tiene la historia de las matemáticas en el aula puede ser realizada a través de los cuadriláteros CIMT descritos. Ha sido ampliamente probada la eficacia de la introducción de la historia de las matemáticas en las aulas de primaria y secundaria, pero, a partir de la experiencia, se debe encontrar la manera de poder mejorar el uso que se hace de ella, de modo que no se caiga en el error de convertirla en mera anécdota. Los cuadriláteros CIMT pretenden comparar la evaluación que hacen tanto el alumnado como el profesorado de cada una de las actividades implementadas en relación con cuatro factores diferenciados: el impacto curricular, el impacto intercultural, el impacto motivacional y el impacto transversal. La elección de estas cuatro miradas se basa en los estudios previos realizados sobre, precisamente, la introducción de la historia de las matemáticas en los currículos oficiales.

En las dos experiencias presentadas, este sistema evaluativo se ha mostrado eficaz para poder tomar decisiones orientadas a volver a implementar las actividades en el aula. Hay que destacar, sin embargo, que aún se tendrán que obtener nuevos resultados de sus aplicaciones en distintos contextos para poder analizar realmente su efectividad y qué conclusiones pueden sacarse de la comparación de las áreas del cuadrilátero CIMT correspondiente a la evaluación del profesorado y el cuadrilátero CIMT de evaluación del alumnado. También será interesante contrastar qué efecto tienen las compensaciones de áreas y cómo pueden ser evitadas. No obstante, pese a estas incertidumbres iniciales, esta herramienta se plantea como un medio efectivo que puede ser un canal para que poco a poco la historia de las matemáticas vaya ganando terreno en las aulas.

REFERENCIAS

Biggs, N. L., Lloyd, E. K. & Wilson, R. J. (1976). *Graph Theory 1736-1936*. Oxford, Reino Unido: Clarendon Press.

Bovaira, F. (Productor) & Amenábar, A. (Director). (2009). *Ágora* (Cinta cinematográfica). España: Telecinco Cinema.

Dorce, C. (2006). *Ptolomeo. El astrónomo de los círculos*. Madrid, España: Nívola.

Dorce, C. (2013a), El joc del 1089 en l'ensenyament dels nombres decimals i la introducció del llenguatge algebraic, *Noubiaix*, *33*, 22-34.

Dorce, C (2013b). *Història de la matemàtica. Des de Mesopotàmia al Renaixement*. Barcelona, España: Publicacions de la Universitat de Barcelona.

Dorce, C. (2014). Un paseo histórico por la invención de los logaritmos. *SUMA*, *75*, 33-42.

Dorce, C. (2016a), La importància de la història de les matemàtiques en els currículums de les educacions primària i secundària, *Actes del Congrés Català d'Educació*

Matemàtica (C2EM), Federació d'Entitats per a l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya.

Dorce, C. (2016b), *Al-Juarismi. El nacimiento del álgebra*. España: RBA.

Dorce, C. (2016c), Geometría en el aula a partir de un tratado español de fortificación del siglo XVI, *Unión, 48*, 187-207.

Dunham, W. (1993), *Viaje a través de los genios. Biografías y teoremas de los grandes matemáticos*. Madrid, España: Pirámide.

Godino, J. D., Batanero, C. & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal of Mathematics Education*, *39*(1-2), 127-135.

Guevara Casanova, I. & Massa Esteve, M. R. (2009), La Història de les Matemàtiques dins dels nous currículums de secundària. *Actes d'Història de la Ciència i de la Tècnica*, *Nova Època/Volum 2*(1), 377-388.

Haverhals, N. & Roscoe, M. (2010), The history of mathematics as a pedagogical tool: Teaching the integral of the secant via Mercator's projection. *The Montana Mathematics Enthusiast*, *7,* 2-3, 339-368.

Høyrup, J. (1990), Algebra and Naive Geometry. An Investigation of Some Basic Aspects of Old Babylonian Mathematical Thought I, *Altorientalische Forschungen 17.1*, 27-69.

Katz, V. & Michalowicz, K. (Eds.) (2004), *Historical Modules for teaching and Learning of Mathematics*. Washington DC: The Mathematical Association of America.

Panasuk, R. & Horton, L. (2012). Integrating history of mathematics into curriculum: What are the chances and constraints. *International Electronic Journal on Mathematics Education*, *7*(1), 3-20.

Radford, L. & Guérette, G. (2000), Second Degree Equations in the Classroom: A Babylonian Approach, en Katz, V. (eds), *Using History to Teach Mathematics: An International Perspective. An International Perspective*, Washington DC: The Mathematical Asociation of America.

Rojas, C. (1598). *Teorica y practica de fortificacion, conforme a las medidas y defensas destos tiempos*. Madrid, España: Luis Sánchez.

Shore, L. (2003). Napier's Bones. A Calculator from Long Ago, *Resource Area For Teachers*, San Jose, California.

Shore, L. (2003). *Napier's Bones. A Calculator from Long Ago*. San Jose, CA: Resource Area For Teachers.

Siu, M.-K. (2004). History of mathematics in classroom teaching - appetizer? Main course? Or dessert? *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, *3*(1-2).

Siu, M.-K. (2006). No, I don't use history of mathematics in my class: Why? En S. Furinghetti, S. Kraijser i C. Tzanakis (eds.), *Proceedings HPM 2004 & ESU 4* - Revised edition (pp. 268-277). University of Creta, Iraklion, Greece.

Siu, M.-K. & Tzanakis, C. (Eds.) (2004). The Role of the History of Mathematics in Mathematics Education. *Med JRME*, *3*(1-2), 1-166.

Sriraman, B. (Ed.). *Crossroads in the History of Mathematics and Mathematics Education*. The Montana Mathematics Enthusiast Monographs in Mathematics Education, vol. 12. Charlotte NC: Information Age publishing Inc.

Toomer, G. J. (1984), *Ptolemy's Almagest.* Londres, Reino Unido: Duckworth.

Zuya, H. E. (2014), The Need for the Inclusion of History of Mathematics into Secondary School Curriculum: Perceptions of Mathematics Teachers, *International Journal of Innovative Education Research 2*(2), 46-51.

Carlos Dorce

Domicilio postal: C/Albert Llanas 36, 7º 4ª, 08024 Barcelona

Teléfono: +34 680 34 81 80