UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2010, Número 21, páginas 37-58
ISSN: 1815-0640

Matemáticas del más allá: el infinito

Eugenio M. Fedriani Martel; Ángel F. Tenorio Villalón

Resumen

El infinito constituye una materia importante y fascinante. De hecho, a lo largo de la historia muchos grandes pensadores han sido seducidos por las intrincadas y paradójicas sutilezas del infinito. No obstante, debe tenerse en cuenta que no existe un único concepto de “infinito”; en su lugar, es el nombre de una idea que depende del contexto en el que se usa. Casi todos tienen una idea intuitiva de qué es el infinito, pero rara vez coincide con la de los demás.

Abstract

Infinity is an important and fascinating subject. In fact, the paradoxical twists and turns of infinity have baffled many great thinkers throughout the history. However, there does not exist one single “infinity” concept, instead it is the name of a notion that depends on the context in which you are using it. Most people have sort of an intuitive idea of what infinite is, but seldom does one agree with others on this.

Resumo

O infinito constitui uma matéria importante e fascinante. De fato, ao longo da historia muitos grandes pensadores foram seduzidos pelas intrincadas e paradoxais sutilezas do infinito. Não obstante, deve ter-se em conta que não existe um único conceito de “infinito”, em seu lugar, é o nome de uma idéia que depende do contexto onde se usa. Quase todos têm uma idéia intuitiva do que é o infinito, mas rara vez coincide com a dos demais.

Introducción

Nuestro cerebro es finito y está por tanto limitado, pero este hecho no permite concluir que todos los posibles pensamientos tengan que ser finitos. De hecho, no es muy difícil encontrar un pensamiento infinito; una posibilidad es el conjunto de los números naturales, N, que se representan a menudo como unos cuantos números consecutivos y unos puntos suspensivos que justifican parcialmente la inexpresabilidad de este pensamiento.

En nuestro entorno más cercano, sólo somos capaces de percibir cosas finitas. Sin embargo, la finitud de los objetos físicos que detectamos no implica la finitud de todos los objetos físicos. Profundizando en la posible infinitud de los objetos físicos, surge la pregunta de si nuestro universo es finito o no. Ante esa pregunta son varias las respuestas que han aparecido a lo largo de la historia. R. Rucker (1982) ha clasificado dichas respuestas en tres categorías: a) el universo es finito, por lo que puede describirse de manera finita (no es una teoría muy aceptada en la actualidad); b) el universo es infinito pero está determinado completamente por un conjunto finito de hechos, con lo que sólo necesitaríamos conocer los hechos y leyes claves que permitan describir el universo (esta teoría parece que entra en conflicto con el Teorema de Incompletitud de Gödel); y c) el universo no es descriptible completamente por un conjunto finito de hechos, por lo que este tendría una descripción infinita.

En las Matemáticas actuales, el concepto de infinito es fundamental y aparece, de una forma u otra, en todas sus ramas. Establecer matemáticamente este concepto ha sido una tarea ardua, aunque su uso fue completamente intuitivo hasta mediados del siglo XIX. A continuación veremos precisamente la evolución de este concepto desde sus inicios hasta el establecimiento de una teoría justificada. De hecho, en este artículo pretendemos realizar una aproximación a las diferentes visiones que se tienen y se han tenido del concepto de infinito. Tras esta breve introducción, se presentará un resumen de la historia del concepto que nos ocupa, procurando utilizar un lenguaje cercano, casi coloquial. Después comentaremos el papel del infinito en la sociedad actual y compararemos la percepción de esta tiene con el rigor matemático, que se presentará con más detalle en otra sección posterior. El artículo terminará con unas conclusiones sobre lo reflexionado a lo largo del mismo.

1. Evolución histórica del concepto matemático de infinito

Posiblemente debido a que todos los sistemas físicos conocidos son finitos, lo infinito no es algo obvio y no siempre ha estado a nuestra disposición. Civilizaciones antiguas, como la egipcia o la azteca, con sistemas de numeración no posicionales, nunca se plantearon cantidades superiores a ciertos valores, ya que ni siquiera disponían de símbolos que les permitiesen representar determinadas cantidades. Incluso en civilizaciones con sistemas de numeración posicionales, esta noción no se hizo patente de forma consciente (Guedj, 1996). Y eso que los sistemas posicionales buscan representar cualquier número con la menor cantidad posible de signos. Ejemplos de estos sistemas fueron el babilonio, el indoarábigo o el maya, en los que siempre se realizaron cálculos y mediciones inferiores a ciertos valores (Fedriani y Tenorio, 2004).

Pero el infinito subyacía implícitamente en estos sistemas posicionales y, en nuestra opinión, el modo en que se representan las cantidades resulta clave para producir una noción intuitiva del infinito. En concreto, el sistema de numeración decimal indoarábigo ya permitió utilizar en la Antigua India números del orden de 10^{421}, según una antiquísima leyenda hindú (aunque no dispusieron de este concepto de infinitud hasta nuestra era)[1]. Guedj (1996) opina que la primera noción intuitiva del infinito se encuentra en la sucesión de los números naturales, según lo

[1] Véase Ribnikov (1960-1963).

cual un sistema posicional facilitaría la percepción del infinito. De hecho, la sucesión de los naturales se caracteriza por tener un primer elemento pero no un último. Nótese que, precisamente, en esa existencia de un número siguiente para cualquier número natural dado, reside posiblemente uno de los primeros acercamientos del ser humano al concepto de infinito matemático.

Es comúnmente aceptado que en la Grecia Clásica aparecieron las primeras "preocupaciones" explícitas sobre el infinito, a pesar de tener sistemas de numeración no posicionales. Como indica Boyer (1968), el concepto de *apeirón* (lo ilimitado) permaneció subyacente en el pensamiento griego durante siglos. Para Anaximandro (610-546 a.C.), el apeirón era la materia infinita, indeterminada, exenta de cualidad y que estaba en eterno movimiento. Posteriormente, los pitagóricos lo considerarían un principio carente de forma y límite, siendo su contrario todo lo existente. Creemos que la representación pitagórica de los números naturales mediante piedras o puntos en la arena debe considerarse una prueba de la percepción griega del infinito, ya que se permitía considerar siempre el número siguiente a uno dado. Además, Arquímedes (287-212 a.C.) describió un método para escribir números enormes empleando el limitado sistema de numeración alfabético no posicional griego, llegando a indicar el número de granos en el universo según el pensamiento filosófico de la época.

No obstante, la idea de infinito del mundo griego no se limitaba solo a los números naturales, sino también a las magnitudes (los números racionales, por ejemplo). Zenón de Elea (h. 490-h.430 a.C.) planteó varias paradojas sobre la imposibilidad del movimiento, basándose en las dificultades planteadas por el infinito y por lo que hoy se denominan infinitésimos. Estas paradojas llevaron a Aristóteles (384-322 a.C.) a distinguir entre el *infinito potencial* y el *infinito actual*, siendo solo posible, para Aristóteles, el primero. El infinito se convierte así en algo inalcanzable, que se desplaza a voluntad del filósofo. Por tanto, no eran posibles conjuntos infinitos ni que la mayoría de las magnitudes fuesen siquiera infinitas potencialmente, ya que excederían los límites del universo, según él. Esta percepción del infinito se mantendría vigente aproximadamente dos milenios.

Según Kline (1972), las paradojas de Zenón habían causado reticencia hacia el infinito, debido a la asociación bien-finito y mal-infinito de los pitagóricos. El propio Aristóteles (s.IV a.C., Libro III) afirmó que "ser infinito es más una privación que una perfección; es la ausencia de un límite", presentando lo infinito como imperfecto e inacabado y siendo por ello finitos los objetos en la naturaleza. Euclides (325-265 a.C.) también trató el infinito, aunque siempre evitando mencionarlo explícitamente, como en sus dos primeros postulados referentes a la infinitud de la recta y su complicado enunciado del postulado de las paralelas. Esto también se observa cuando enuncia la infinitud de los números primos: "los números primos son más que cualquier multitud asignada de números primos"[2].

Los griegos desde Euclides emplearon los conceptos de *infinitamente pequeño* e *infinitamente cercano* en el método de exhaución, para calcular áreas bajo una curva usando aproximaciones cuya diferencia fuese más pequeña que cualquier cantidad dada. No obstante, este método, ideado hacia el 430 a.C. por Antifonte

[2] Véase Euclides (h. 300 a.C.), Libro IX, Proposición 20.

(480-411 a.C.), según Aristóteles[3], y perfeccionado hacia el 250 d.C. por Arquímedes (s.III a.C.), era considerado excesivamente oscuro como para explicar la infinitud.

Aunque inicialmente pudiera resultar chocante, el número cero, introducido en la India en el siglo IX, fue clave para expresar el infinito (Fedriani, 2000). De hecho, la noción más cercana al infinito actual, usándose incluso como número, se debió a los matemáticos indios. Para Mahavira (800-870) y Bhaskara (1114-1185), una fracción con denominador cero permanecía inalterable por mucho que se le añadiese o se le restase, denominándola *cantidad infinita*. Esta cantidad infinita persistió en la matemática árabe medieval, que la exportó a Europa. Resulta curioso que entonces se permitiese dividir por cero y que la representación del infinito fuese $\frac{1}{0}$ (Kline, 1972).

En 1621, Bonaventura Cavalieri (1598-1647) ideó la *geometría de los indivisibles* para calcular áreas y volúmenes. Como puede verse en Ribnikov (1960-1963), este método suponía que las figuras planas y los cuerpos sólidos se componían de una cantidad infinita de elementos de una dimensión menos. Así, los indivisibles de una figura plana eran segmentos paralelos (indivisibles de área), mientras que los de un cuerpo eran planos paralelos (indivisibles de volumen). El área y el volumen se calculaban sumando estos elementos infinitesimales. Pero los indivisibles no permitían medir longitudes de curvas porque sus indivisibles, los puntos, no tenían dimensiones. Además, el concepto de *indivisible* era para muchos inexplicable y carente de todo fundamento. Evidentemente, el estudio del infinito no se redujo sólo a calcular áreas y volúmenes. Los principales avances provinieron durante muchos años de consideraciones relacionadas con la cinemática. Galileo (1564-1642) estaba muy interesado en lo infinitamente pequeño para tratar, por ejemplo, el problema del movimiento uniformemente acelerado. Afirmaba que era tan sencillo dividir un segmento en un número infinito de partes como en un número finito. Sin embargo, al mismo tiempo tuvo dudas sobre la existencia del infinito, como cuando afirmó que “infinitos e indivisibles se escapan a nuestro entendimiento finito, unos por ser excesivamente grandes y otros por ser extremadamente pequeños”. Es más, Galileo (1638) probó que había tantos números naturales como cuadrados perfectos, pero al parecerle esto ilógico, concluyó que todas las cantidades infinitas debían ser iguales.

Volviendo a los planteamientos geométricos, conviene recordar que en el s.XVII se calculaban áreas encerradas por curvas (integrales definidas) como sumas infinitas de magnitudes infinitesimales. El procedimiento sistemático consistía en considerar rectángulos de ancho constante muy pequeño; la suma de las áreas de estos rectángulos aproximaría el área bajo la curva, para lo cual consideraban unos sumandos de resultado despreciable si el ancho era cada vez menor; es decir, si el número de rectángulos tendía a infinito, pero todo ello sin definir el concepto de límite. Con esto llegamos a los dos principales artífices de los procedimientos infinitesimales modernos: Isaac Newton (1643-1727) y Gottfried Wilhelm von Leibnitz (1646-1716):

[3] Véase Aristóteles (S.IV a.C.), Libro I, Parte 2.

Newton desarrolló su *teoría de fluxiones* (las velocidades instantáneas), consistente en considerar incrementos indefinidamente pequeños, tanto en la variable x como en la variable y, de una función $y = f(x)$. Estos incrementos se correspondían con un intervalo infinitamente pequeño de tiempo. El cociente de dichos incrementos era la fluxión o derivada. En esencia, calculaba el límite del cociente de los incrementos cuando se van haciendo cada vez más pequeños. Para Newton, el área bajo una curva era el límite de la suma de los rectángulos aproximadores, pero este proceso lo usaba solo para comparar áreas bajo diferentes curvas.

Leibnitz, por su parte, trabajó directamente con los incrementos infinitamente pequeños en x e y, los *diferenciales*, buscando la relación existente entre ellos. Los diferenciales (o diferencias infinitesimales) eran cantidades infinitamente pequeñas, es decir, distintas de cero y más pequeñas que cualquier cantidad finita. Sin embargo, el cociente de dos infinitesimales lo expresaba mediante cantidades definidas. La integral (área) la definía como suma infinita de rectángulos infinitesimales. Aunque lo intentó en repetidas ocasiones, no logró dar un fundamento a su concepto de diferencial.

Según la casi totalidad de los historiadores especializados, el primero en usar el símbolo ∞ fue John Wallis[4] (1616-1703) en 1656 y lo hizo para representar el infinito en límites, escribiendo $\frac{1}{\infty} = 0$. Además, intentó definir el infinitesimal como el recíproco de ∞. Se ha conjeturado en Wattenbach (1869) la posibilidad de que Wallis hubiese tomado el símbolo ∞ del símbolo para representar 1000 que se usó a finales del Imperio Romano.

La aparición del infinito posibilitó que se introdujeran en el s.XVII los conceptos elementales de la Geometría Proyectiva: el punto y la recta del infinito. Pintores y arquitectos, al pintar en un dibujo rectas paralelas, observaron que debían pintarlas encontrándose en un punto que no existía en realidad. Girard Desargues (1591-1661) resolvió este problema añadiendo en 1639 el punto del infinito como aquel en el que se cortan dichas rectas. Ese punto estaba en una recta fuera de nuestra visión (recta del infinito o línea del horizonte), que debía añadirse al plano euclídeo para representar en un dibujo plano ciertas propiedades interesantes (Desargues, 1639).

Como indica Boyer (1968), el infinito no se definió con precisión antes de 1872; se explicaba como una magnitud indefinidamente grande o como la propia colección de los números naturales. Además, se creía imposible un infinito actual en las Matemáticas, pues lo infinitamente grande y lo infinitamente pequeño se consideraban simples casos del infinito potencial aristotélico. Oponiéndose a la máxima aristotélica de que el todo es mayor que la parte, Richard Dedekind (1831-1916) definió en 1888 un *conjunto infinito* como aquel semejante a una parte propia suya. Además, definió *conjunto finito* como el no infinito, pasando a ser lo finito lo que se definía a partir de lo infinito. Además, Dedekind probó que, de existir, la clase de todos los conjuntos (el denominado Absoluto de Cantor) tenía que ser infinita. Todo este trabajo, publicado en Dedekind (1888), comenzó a fraguarse, según indica el propio Dedekind en el prólogo de su obra anteriormente citada, entre los

---

[4] Véase Wallis (1656).

años 1872 y 1888, tras la publicación de un trabajo sobre la infinitud que abordaba la construcción de los números irracionales a partir de conjuntos de infinitos números racionales (las llamadas cortaduras de Dedekind[5]). Durante el transcurso de este período es cuando se establece el intercambio de correspondencia entre Dedekind y Georg Cantor (1845-1918), el padre de la Teoría de Conjuntos y de los números transfinitos.

Debe tenerse en cuenta que, con anterioridad a la definición de Dedekind, se habían introducido sendas definiciones matemáticas de conjunto infinito por Georg Cantor (1878) y por Bernhard Bolzano[6] (1781-1848), de manera independiente. En ambos casos se define primero el conjunto finito como aquel cuyo número de elementos es un número natural, mientras que los conjuntos infinitos se obtienen como los que no son finitos. No obstante, no formuló una definición de conjunto infinito sino que indicó que los conjuntos finitos (que sí definía) verificaban que todo subconjunto propio tenía un potencia menor, mientras que un conjunto infinito tenía la misma potencia que algún subconjunto propio suyo, aunque no demostraba dicha afirmación. Para una definición formal y explícita por parte de Cantor de los conceptos de conjunto finito y de conjunto infinito (por contraposición) hay que esperar a 1883 (Cantor, 1883). Previamente, en 1882, había mantenido correspondencia con Dedekind sobre dichos conceptos, mandándole este último la definición de conjunto infinito y de conjunto finito que aparecería en su obra de 1888 (Dedekind, 1888).

Obviamente, tanto el enfoque de Bolzano como el de Cantor diferían de la visión de Dedekind y, aunque permitían la existencia del infinito actual aristotélico, este seguía obteniéndose como la negación de lo finito. Pese a la existencia de estas definiciones de conjunto infinito anteriores a la publicación del trabajo de Dedekind (la de Cantor en 1878 y la de Bolzano en 1851), él afirmaba en el prólogo de su segunda edición (1888) que "*ninguno de los mencionados escritores [Cantor y Bolzano] ha hecho el intento de elevar esta propiedad a definición del infinito y edificar sobre este fundamento de manera lógicamente estricta la ciencia de los números, y precisamente en eso consiste el contenido de mi esforzado trabajo, que yo había completado en todos los puntos fundamentales ya varios años antes de la aparición del manual de G. Cantor y en un tiempo en que la obra de Bolzano me era, incluso de nombre, completamente desconocida*".

Podría afirmarse que Cantor y Dedekind trabajaron simultáneamente e intercambiaron ideas y reflexiones para establecer la definición de conjunto infinito de que disponemos en la actualidad. Sin embargo, fue Cantor el que más profundizó en las propiedades de los conjuntos infinitos y quien introdujo los conceptos, demostraciones y resultados que le han valido para ser la pieza clave en la percepción actual del infinito matemático. Algunos de sus logros más relevantes los obtuvo incluso antes de disponer explícitamente de una definición del concepto de conjunto infinito. Más concretamente, fue él quien probó que los conjuntos infinitos no tenían todos el mismo "tamaño" y los jerarquizó, introduciendo el concepto de *cardinal* (originariamente *potencia*) de un conjunto. Este concepto lo estableció de manera análoga al de número de elementos de un conjunto finito. El conjunto infinito *más pequeño* era precisamente el de los números naturales, que denominó el *infinito*

[5] Véase Dedekind (1872).
[6] Véase Bolzano (1851).

numerable, ω ó $\aleph_0$ (lo discreto). Pero el conjunto de los números reales tenía una potencia mayor, siendo el primer ejemplo de *infinito no numerable* $\aleph_1$ (lo continuo)[7]. De este modo, Cantor introduce los ordinales transfinitos y el supremo de los ordinales: el infinito absoluto Ω, que no es un ordinal sino algo que está más allá de todos los ordinales (Cantor, 1899).

Pese a que fue Cantor el que desarrolló una teoría para los números infinitamente grandes (ordinales transfinitos), no creía posible la creación de una teoría similar a la suya para los números infinitamente pequeños. Es más, ni siquiera le parecieron correctos algunos intentos de sus contemporáneos de usar su propia teoría de ordinales transfinitos para crear una teoría, llegando a escribir en una carta sobre esos intentos que buscaban “infectar las Matemáticas con el bacilo del cólera de los infinitesimales” (Cantor, 1893).

De opinión similar era Bertrand Russell (1872-1970), que llegó afirmar lo siguiente sobre el problema de crear una teoría para los infinitesimales: “La filosofía de lo infinitesimal, como acabamos de ver, es básicamente negativa. La gente creía en ella y hoy se ha dado cuenta de su error. La filosofía del infinito, por el contrario, es totalmente positiva” (Russell, 1901). Además, en este artículo argumentaba que el establecimiento de una teoría de los infinitesimales permitiría concluir que las paradojas de Zenón no eran tales paradojas, sino certezas que chocarían con nuestra intuición. El propio Russell (1903) llegó a dar una definición de magnitud infinitamente mayor o infinitamente menor que otra dada.

David Hilbert (1862-1943) también se preocupó por el estudio del infinito y es a él a quien se atribuye una curiosa situación ambientada en la problemática del infinito (Stewart, 1998). Se plantea la existencia de un hotel (denominado Gran Hotel Hilbert, por motivos obvios) que disponía de ω habitaciones. Una de las paradojas que planteaba el número de habitaciones de este hotel era que, incluso estando lleno, siempre podían introducirse nuevos huéspedes (aun cuando el número de nuevos huéspedes era infinito numerable). El límite de la capacidad de este hotel era $\aleph_1$. En las Figuras 1 y 2 representamos esquemáticamente la situación planteada por Hilbert.

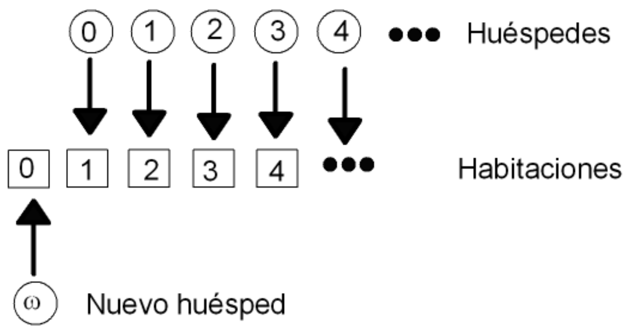


Figura 1: Un nuevo inquilino llega al Gran Hotel Hilbert.

[7] Véase Cantor (1874).

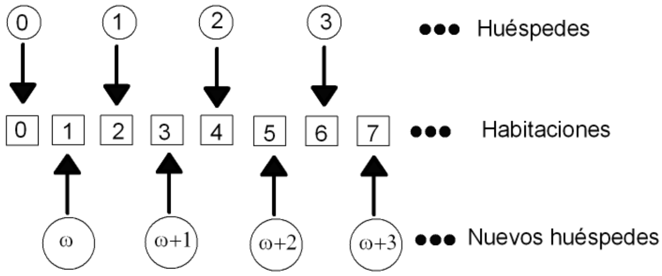
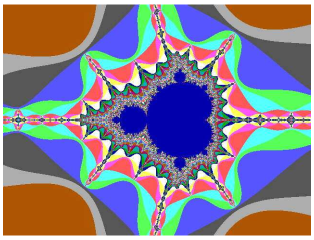


Figura 2: Llega una cantidad numerable de huéspedes.

A pesar de que el concepto de infinito parecía estar rigurosamente definido, siguió siendo causa de controversias y paradojas. Por ejemplo, en 1904 Helge von Koch (1870-1924) construyó una curva continua cerrada consistente en repetir indefinidamente el siguiente proceso: en un triángulo de lado 1, dividir cada lado en tres partes iguales y levantar un triángulo equilátero con cada parte central como base, siempre hacia el exterior del triángulo anterior y suprimiendo sus bases. Esta curva presenta la característica de que la longitud del arco entre dos puntos arbitrarios de la curva es infinita. Esto llevó a estudiar otras curvas que se obtenían con procedimientos análogos o verificando esa misma propiedad. Benoit Mandelbrot (n. 1924) las denominó *fractales* en 1975, estudiando sus propiedades en lo que se ha denominado *Geometría Fractal*[8].



Kurt Gödel[9] (1906-1978) probó en la década de 1930, como corolario de sus Teoremas de Incompletitud, que la consistencia de la Teoría de Conjuntos no podía probarse dentro del propio sistema. *Grosso modo*, en sus Teoremas de Incompletitud se demostraba que siempre existirían ciertos problemas sencillos que no se podrían resolver con una teoría axiomática. Además, la existencia de conjuntos infinitos no puede deducirse del resto de los axiomas de la Teoría de Conjuntos.

Como dijimos antes, durante el s.XX se buscaba una teoría para los infinitesimales similar a la existente para los números transfinitos. El problema de esta teoría sería formalizar lo infinitamente continuo desde el punto de vista de la ordenación del conjunto de números que se obtuviese. Felix Hausdorff (1868-1942) demostró la posibilidad de ordenar lo absolutamente continuo usando un superdiccionario que usaba solo dos letras[10]. Sin embargo, usando ese superdiccionario no podía definir ni una operación suma ni una operación producto. Fue J. H. Conway[11] (n. 1937) el que descubrió una clase absolutamente continua de

[8] Para más información, véase Mandelbrot (1975).
[9] Véase Gödel (1931).
[10] Véase Kuratowski y Mostowski (1968), pág. 336.
[11] Véase Conway (1976).

números en la que podían definirse ambas operaciones: los *números surreales*. Estos números nacen de una sucesión infinita de días, un día de creación para cada ordinal. Además, llegó a obtener una definición para el símbolo ∞ del infinito potencial: el espacio entre los números surreales infinitamente largos y los finitamente largos, lo cual podía expresarse en la siguiente fórmula $\infty = \sqrt[\Omega]{\omega}$. Esta expresión relaciona el infinito potencial (∞), el infinito actual más sencillo (ω) y el infinito absoluto (Ω).

Sin embargo, para utilizar números infinitesimales no suele recurrirse al cuerpo de los números surreales, sino que se emplea una extensión más pequeña formada por los denominados *números hiperreales* o *números no estándar*, introducidos por Abraham Robinson[12] (1918-1974). En Lightstone (1972) se muestran los infinitesimales de manera sencilla y directa a partir de lo ya explicado por Robinson. Según su explicación, los infinitesimales consisten en suponer la existencia de números positivos más pequeños que cualquier número real positivo dado, añadiendo como postulados todos los enunciados que se saben ciertos para los números reales. Estos números permiten eliminar ciertos enunciados conocidos como de "tipo ε-δ" (en límites y continuidad, por ejemplo), permitiendo expresar algunas ideas más intuitivamente. Para ello, lo que se hace es ampliar el cuerpo de los números reales con otros números que denomina *naturales infinitos* (no exactamente iguales a los transfinitos). No hay ningún número natural infinito más pequeño que los demás y entre dos naturales infinitos hay una cantidad "infinitamente grande" de números naturales infinitos. También se desarrollan estas ideas para el cuerpo real. Toda afirmación verdadera para los reales es cierta también para esta extensión, siempre que se reinterprete en su correspondiente sentido. Así, por ejemplo, los números infinitos poseen un inverso multiplicativo, que son precisamente los infinitesimales.

2. El concepto de infinito para la sociedad

Creemos conveniente hacer algunos comentarios a continuación sobre la percepción del infinito en la sociedad. Por eso, olvidaremos momentáneamente el trasfondo y formalismo matemáticos y nos centraremos en cómo se ha definido y define dicho concepto para los no-matemáticos. Comenzaremos, pues, con una aproximación semántica a partir de las acepciones de infinito que indica la XXII Edición del Diccionario de la Real Academia Española de la Lengua. La primera y más habitual es *que no tiene ni puede tener fin ni término*; también puede significar *muy numeroso o enorme* y *excesivamente o muchísimo*. Obsérvese que estas últimas acepciones conllevan la posibilidad de usar la palabra *infinito* cuando estamos hablando de cantidades (finitas) muy grandes. También aparece una acepción que corresponde a tratar infinito como un *lugar impreciso en su lejanía y vaguedad* e, incluso, cuando se hace referencia a una cámara fotográfica, como *última graduación de un objetivo para enfocar lo que está distante*. Es más, en el propio DRAE aparecen dos acepciones del infinito correspondiente a las Matemáticas: la primera es *valor mayor que cualquier cantidad asignable* y la segunda *signo (∞) con que se expresa ese valor*. En consecuencia, para alguien ajeno a las Matemáticas, el infinito matemático debe ser un valor (numérico) más grande que cualquier otro y que viene simbolizado por un *ocho tendido*. De este

[12] Véase Robinson (1969).

modo, se estaría fomentando que la sociedad pensase en la existencia de un único infinito (y no de varios niveles de infinito, tal y como se vio en la sección anterior) y que este podría manejarse del mismo modo que se maneja cualquier número natural.

Analizándola brevemente, esta definición del infinito matemático dada por la RAE seguiría manteniendo el infinito potencial aristotélico, un infinito que nunca se alcanza y cuyo significado se reduce a poder seguir avanzando y considerar algo cada vez más grande. De hecho, ya dijimos que este ha sido el concepto que en la Filosofía y las Matemáticas se ha considerado válido hasta el s.XIX, cuando Dedekind y Cantor establecieron la existencia de un infinito que "realmente existe" y que podría compararse con el infinito actual aristotélico. Desafortunadamente, en la sociedad rara vez se tiene una idea clara del infinito y en el mejor de los casos se piensa en una cantidad más grande que cualquier otra dada, o en un punto del espacio que nunca se alcanza por mucho que andemos. Es mucho más habitual encontrar opiniones irracionales, confusiones múltiples o, incluso, quien abusa del concepto para relacionarlo con lo trascendente o lo esotérico.

En el ámbito religioso no es inusual encontrar términos o conceptos que están relacionados con el concepto de infinito. Desde la antigüedad, el *ser supremo* o *dios primordial* de las diversos panteones religiosos ha sido dotado de cualidades que superaban, sin límites conocidos, las de los humanos. Por poner algunos ejemplos, el ser supremo en la mitología asiria se llamaba Assur y su nombre estaba formado por dos signos: *as* (dios) y *shar* (infinito). Igualmente, el ser supremo para los quechuas se llamaba Inti y entre sus cualidades se encontraba la omnipotencia y la misericordia infinita. Estas dos cualidades las compartía con la diosa quechua de la Tierra, Pachamama. También el dios principal del panteón persa estaba relacionado con el infinito, ya que Zurvan Akarana, que es como se llamaba, era el dios del infinito y del espacio. También la religión bribri de Costa Rica asociaba la omnipotencia y la omnipresencia a su gran espíritu primordial, Sibú.

En la actualidad, las religiones siguen incluyendo el concepto de infinito en sus discursos. Pongamos como ejemplos las tres religiones con más adeptos en el planeta: el cristianismo, el islam y el hinduísmo. En las tres aparece el concepto de infinito de una u otra manera para definir a su *ser supremo*:

El cristianismo, en todas sus variantes, adjudica a Dios cualidades que consisten en un salto al infinito de cualidades que poseemos los seres humanos. Así, Dios es *ilimitado*, *omnipresente*, *inalcanzable* o *infinitamente bueno* y *misericorde*.

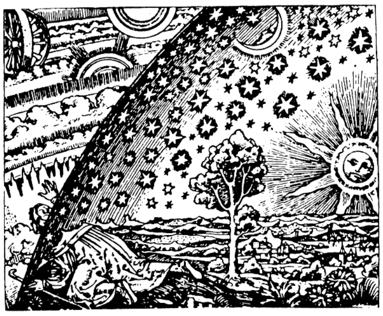
En el islam, Allah es el único ser supremo y es eterno, infinito, todopoderoso, misericordioso y comprensivo y su saber es ilimitado e intemporal, al igual que ocurre en la religión cristiana. Lo curioso es que el islam carece de una palabra para designar el concepto de infinito; el término *lâ nihâi*, que se utiliza con ese fin, es un neologismo que se introdujo para traducir los textos helénicos. Desde el punto de vista del islam, no tiene sentido hablar de una pluralidad de infinitos o de cosas que son infinitas: solo existe un infinito, que es precisamente Allah.

Para los hindúes, Brahman es el ser supremo e infinito, es la única esencia real y eterna. Para ellos, el universo es un ciclo eternamente repetido de creación, conservación y disolución, representado por la trinidad Brahma (creador), Vishnú (preservador) y Shiva (destructor), todos ellos aspectos del mismo Brahman.

En las tres religiones de las que acabamos de hablar se cree en la inmortalidad de las almas y en una *vida eterna*, que no tiene fin. En todas ellas se busca disfrutar de la presencia del ser supremo en el *paraíso*, lugar que recibe un nombre distinto según la religión de la que estemos hablando. Esa vida ya no tendrá fin y promete una felicidad infinita.

Pero no solo la religión ha sido fuente de discusiones sobre la noción de infinito. En la filosofía occidental ha sido muy habitual discutir sobre qué era el infinito o si este infinito existía realmente. Además, en Europa esta discusión siempre ha estado muy relacionada con la religión cristiana, ya que la materialización del concepto de infinito se tenía casi por equivalente a la existencia de Dios.

Ya hemos hablado del problema filosófico que creó el concepto de infinito en la civilización griega. Esta discusión dijimos que llevó a la diferenciación por Aristóteles entre el infinito potencial y el infinito actual, siendo solo posible para él el primero de los dos. La Iglesia Católica siempre defendió las tesis de Aristóteles acerca del infinito potencial y del infinito actual. Ejemplos de esta postura son las ideas de San Agustín de Hipona (354-430) y de Santo Tomás de Aquino (h.1225-1274). El primero afirmó que solo Dios y sus pensamientos eran infinitos[13], mientras que el segundo decía que, a pesar de que Dios era infinito, no podía crear cosas absolutamente infinitas[14].



El primer pensador postplatónico que adoptó la creencia en la infinitud de Dios fue Plotino. Este autor[15] afirmó que Dios estaba fuera de todo número y bajo ningún límite. De hecho, la existencia de un concepto de infinito fue usado habitualmente como argumento para la demostración de la existencia de Dios, ya que estas demostraciones se basaban en la imposibilidad de proceder infinitamente. Así se plantearon el argumento ontológico de San Anselmo de Canterbury[16] (1033-1109) o las cinco vías de Santo Tomás, aunque no siempre estaban de acuerdo los razonamientos, como ocurría por ejemplo con el rechazo del argumento ontológico por parte del propio Santo Tomás de Aquino.

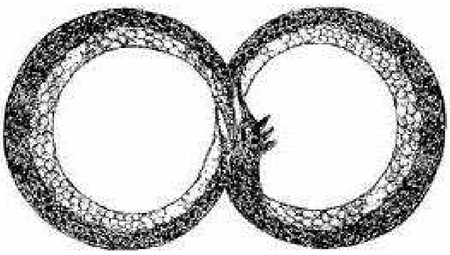
Pensadores posteriores también se preocupaban por el tema, mostrando su conformidad o disconformidad con este tipo de razonamientos. Por ejemplo, René

[13] Véase Agustín de Hipona (413-426), Libro XII, Enunciado 18.
[14] Véase Tomás de Aquino (1265-1272) Parte Primera, Pregunta 7, Artículos 2 a 4.
[15] Véase Plotino (h.250 a.C.), V Enéada, V Tratado, Parte 11.
[16] Véase Anselmo de Canterbury (1070-1078), Libro II.

Descartes (1595-1650) creía en una serie de ideas innatas en el ser humano, como podían ser las de infinito o perfección, y que solo podían surgir de un ser con dichas cualidades[17]. Estos razonamientos eran muy similares a los esgrimidos anteriormente por San Anselmo y San Agustín. De este modo, lo finito provenía de lo infinito (como vimos que también ocurriría en Matemáticas).

En el sentido contrario se encontraba Georg Wilhelm Friedrich Hegel[18] (1770-1831), que criticaba a la religión por hacer a Dios inaccesible y desligado de la realidad. Su pensamiento buscaba reconciliar todas las dimensiones de lo real, entre ellas la dicotomía clásica infinito-finito. Para él no tenía sentido esta dualidad, ya que un infinito que excluye de sí lo finito se convierte en algo con limitaciones, una parte de todo lo real, con lo que no podría ser infinito. Para evitar esta contradicción, Hegel introdujo el Absoluto (Dios), que es el concepto filosóficamente más elevado de todos. De este modo, tanto lo finito como lo infinito son dimensiones de ese Absoluto.

También ha habido numerosas utilizaciones del infinito por parte de los estudiosos de lo esotérico, unas más fundamentadas que otras. Se cree que el símbolo del infinito introducido por Wallis tuvo ya sus precedentes religiosos en algunas representaciones del Ouroboros griego. El Ouroboros se representaba como una serpiente que mordía su cola y su disposición era o bien circular o bien en forma de un ocho. Era un símbolo originado en el Antiguo Egipto (h. 1600 a.C.) y estaba asociado al Sol, puesto que representaba los viajes del disco solar (Neumann, 1949). En el gnosticismo (un grupo de corrientes filosófico-religiosas de la antigüedad que alcanzó su mayor difusión en los s.II y III), el Ouroboros pasó a representar el carácter infinitamente cíclico del mundo; se relacionaba con la naturaleza cíclica de las cosas que comienzan en cuanto concluyen y representaba el tiempo y la continuidad de la vida.



En el tarot, el símbolo del infinito se ha asociado desde el s.XVII a la carta del arcano mayor de El Mago. Además, esta carta tenía asociada tradicionalmente la letra Aleph, letra que Cantor utilizó para representar sus números transfinitos, ¿casualidad, coincidencia...? En la carta de El Mago en el Tarot de Marsella (de 1751) se observa un sombrero en forma de ∞ y cómo la postura de la figura del mago se asemeja a la letra Aleph. Es precisamente en este Tarot cuando aparece por primera vez el símbolo del infinito asociado a El Mago y en el que la disposición de la figura asemeja a la letra Aleph. Sin embargo, posiblemente la carta de El Mago está asociada a la letra hebrea Aleph por otros motivos[19].

[17] Véase Descartes (1641), Meditación I.
[18] Véase Hegel (1807 y 1812-1816).
[19] Véanse Filipas (2003) y Lévi (1854-1856).

En relación con la discusión sobre el infinito en las cosas creadas por Dios, siempre ha habido razonamientos discutidos e, incluso, censurados. En la Filosofía Europea surgieron pronto voces en desacuerdo con la doctrina eclesiástica de que solo Dios era infinito. El primer argumento clásico de no acotación del espacio fue esgrimido por Lucrecio[20] (h.95-55 a.C.): “Supongamos que el espacio está acotado y que alguien hace su camino a su límite más lejano y lanza un dardo volante. El dardo debe pasar el borde (luego no hay borde) o el dardo se para (algo más allá del borde lo para). En ambos casos el universo no tendría fin”.

Otro de los pensadores que creían en la infinitud del espacio fue Giordano Bruno (1548-1600), el cual hizo una férrea defensa de sus ideas en Bruno (1584), las cuales defendió y enseñó por toda Europa hasta que la Inquisición lo quemó por herejía. Incluso en el s.XVIII, pensadores como Immanuel Kant (1724-1804) afirmaban que las cosas existen en el espacio cuando son percibidas por la mente. En consecuencia, los espacios infinitos no existirían, ya que no pueden ser percibidos por la mente tras reflexionar un período de tiempo finito (Kant, 1781).

En 1854, Riemann[21] (1826-1866) encontró un fallo al argumento esgrimido por Lucrecio: bastaría considerar que el universo es la superficie de una hiperesfera de R^4. Rucker (1982) afirma que de este modo y de otros semejantes sería posible construir una espacio tridimensional que fuese finito pero sin puntos en el borde. Además, según las hipótesis de Einstein (1920 y 1922), hay dos posibilidades sobre cómo podría ser nuestro universo: un universo hiperesférico (cerrado, no acotado, que se expande y luego se contrae a un único punto) o un espacio infinito que nunca deja de extenderse. Actualmente, es la primera posibilidad la más ampliamente aceptada por la comunidad científica.

En cuanto a la sociedad actual, hemos realizado un estudio simple sobre la aparición y uso de la noción de *infinito* (y sus derivados, palabras como *infinitud* o *infinitésimo*). Para ello, hemos analizado el contexto en que aparecen estos términos en los diferentes medios de comunicación; en concreto, consideramos televisión, radio, prensa e Internet (mayoritariamente foros y blogs, pero también cualquier otro tipo de páginas).

---

[20] Véase Lucrecio (50 a.C.).
[21] Véase Riemann (1868).

Los términos que se han considerado para la primera parte de este estudio han sido los siguientes: *infinito*, *infinitos*, *infinitud*, *infinidad* e *infinitamente*. La aparición de estos términos nos ha sugerido la definición de distintas categorías (no excluyentes), que indicamos a continuación: títulos o titulares que utilizan el infinito para llamar la atención; entidades en la que su nombre hace alusión al infinito; anuncios o descripciones de productos que emplean el infinito; esoterismo; religión; Matemáticas; Física; "infinito" como equivalente a "mucho"; canciones con alusión al infinito; libros con alusión al infinito en el título; y, finalmente, ocasiones en las que se hace un uso positivo de la noción de infinito y otras en las que se hace un uso despectivo.

Después de ponderar las apariciones por la frecuencia de los términos respecto al total de información, los porcentajes de aparición de los términos en cada una de las categorías pueden presentarse en forma de tabla:

infin...	…ito	…itos	…ito/s	…itud	…idad	…itamente	TOTAL
% del total	62.2	7.7	69.9	1	13.6	15.5	100
Titulares	50.5	55.2	52.9	53.8	27.86	51.8	51.5
Marcas	6.4	3.4	4.4	0	2.1	7.2	6.2
Anuncios	13.8	4.3	8.9	0	32.5	10.8	22.6
Esoterismo	6.4	1.7	4	3.8	3.6	0.5	4.1
Religión	3.7	0.9	2.2	19.2	2.1	10.8	7.5
Matemáticas	9.2	19.8	14.7	19.2	3.6	9.2	13.5
Física	11.9	4.3	8	7.7	0.5	11.8	9.4
∞ ="Mucho"	23.9	41.4	32.9	7.7	64.9	39	59.7
Canciones	10.1	8.6	9.3	0	4.1	1.5	6.9
Títulos	6.4	9.5	8	7.7	0.5	3.6	5.8
Positivo	31.2	44	37.8	46.2	66	61.9	74
Negativo	9.2	27.58	18.7	15.4	17.4	13.4	22.7

Cuadro 1: Porcentajes de aparición de cada término "infinito".

Repitiendo el estudio anterior para los términos *infinitésimo*, *infinitésimos*, *infinitesimal* e *infinitesimales*, se obtienen otras categorías: títulos o titulares que utilizan el infinito para llamar la atención; esoterismo; Matemáticas; Física; páginas de asignaturas universitarias; libros con alusión al infinito en el título.

infinit...	...itésimo	…itésimos	… itésimo/s	...itesimal	…itesimales	..itesimal/es	TOTAL
% del total	18.6	4.7	23.25	46.5	30.2	76.74	100
Titulares	5.6	0	4.2	0	30	12.8	8.6
Esoterismo	0	0	0	0	15	5.26	9.7
Matemáticas	83.3	100	87.5	73	20	68.4	74.1
Física	0	0	0	0	15	5.3	3.7
Universidad	22.2	33.3	25	56.8	10	48.9	35.8
Títulos	0	0	0	16.2	10	14	9.9

Cuadro 2: Porcentajes de aparición de cada término "infinitesimal".

El lector interesado puede comprobar el uso del concepto de infinito de una forma sencilla, por ejemplo, usando cualquier motor de búsqueda de los disponibles en Internet.

3. El infinito como concepto matemático

Una vez comentado el concepto de infinito que puede tener una persona ajena a las Matemáticas, pasamos a establecer diferentes formas de definirlo en las Matemáticas actuales. Como ya hemos indicado, son varias las posibles formas de aproximarse al infinito; aquí hablaremos de los números transfinitos, los diferenciales, los infinitésimos y los límites, además de la justificación de lo infinito también desde el punto de vista aritmético y operacional. Todos ellos son conceptos empleados en las Matemáticas actuales y que persiguen justificar lo infinito tanto en el sentido numérico como en el de las magnitudes.

Para definir los números transfinitos, se define primero lo que es un conjunto infinito y un *conjunto infinito* es aquel que tiene un subconjunto propio suyo que esté en correspondencia biunívoca con el total. Consecuentemente, por *conjunto finito* se entiende aquel que no es infinito. Para saber cuántos elementos tiene un conjunto, se define el *cardinal* como la clase de equivalencia de todos aquellos conjuntos que están en biyección entre sí[22]. El ejemplo más sencillo de conjunto infinito es el de los números naturales y se conoce como el *infinito numerable*, $\aleph_0$, o discreto. Pero hay al menos un segundo tipo de infinito, el *no numerable*, cuyo caso más conocido es el continuo o el cardinal del conjunto de los números reales, $\aleph_1$. En referencia a los diferentes cardinales o números transfinitos, sigue buscándose hoy día respuesta a si la hipótesis del continuo es cierta. Esta hipótesis afirma que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, es decir, que no hay un número transfinito entre $\aleph_0$ y $\aleph_1$. De hecho, el problema del continuo de Cantor es indecidible sobre la base de nuestras teorías matemáticas. Por cierto, la hipótesis del continuo de Cantor se puede generalizar a esta otra hipótesis: $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_\alpha$, siendo α un ordinal cualquiera.

Gödel (1940) probó que afirmar la hipótesis del continuo era consistente con los axiomas de la Teoría de Zermelo-Fraenkel. Pero Paul J. Cohen[23] (1934-2007) probó en 1963 que negar dicha hipótesis también era consistente con dicha teoría. De hecho, hoy día solo se puede responder afirmativamente a esta cuestión si se acepta el axioma de elección. El problema está en que no todos los matemáticos aceptan este axioma y, en consecuencia, los resultados que lo utilizan.

Sin salir del ámbito de la Lógica Matemática, podemos hacer referencia también al denominado *Axioma del Infinito* o *de Infinitud* de la Teoría de Zermelo-Fraenkel. Este axioma fue enunciado primeramente por Zermelo[24] (1871-1953) y asegura la existencia de conjuntos infinitos, más concretamente de conjuntos que pueden construirse por recursividad. Un enunciado del mismo es el que indicamos a continuación:

$$\exists a \ (\emptyset \in a \wedge \forall x \ (x \in a \rightarrow \{x\} \in a)).$$

Este axioma se puede también interpretar como la justificación de la inducción matemática, ya que la construcción de los números naturales en la Teoría de Conjuntos se hace a partir del conjunto vacío $\emptyset$, aplicando este axioma. Así, $\emptyset$ es el 0, $\{\emptyset\}$ es el 1 y, dado un número natural n, su siguiente se define como $n \cup \{n\}$. En

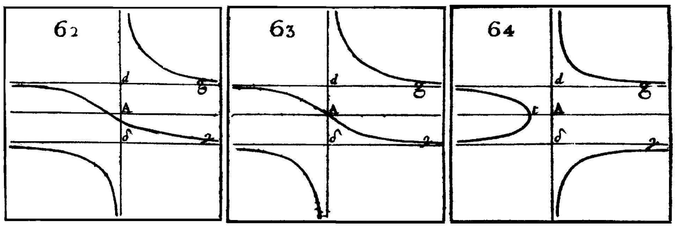
---

22 Véase Halmos (1960) para una explicación intuitiva con más detalles.
23 Véase Cohen (1966).
24 Véase Zermelo (1908).

consecuencia, en la inducción o recursividad matemática encontramos también la noción de infinito. De hecho, la inducción matemática se emplea cuando se quiere probar la veracidad de un postulado para un conjunto infinito numerable. De este modo, la inducción matemática es un procedimiento demostrativo que se basa esencialmente en el concepto de infinito. Para más información sobre el concepto de infinito y su relación con la Lógica Matemática y la Teoría de Conjuntos, además de algunos de los problemas a que ha dado lugar en dichas áreas, el lector puede consultar Jech (1991).

El otro concepto de las Matemáticas actuales que más claramente se relaciona con el infinito es el de *límite*. En su caso más simple, el concepto de límite permite hablar rigurosamente de las variaciones infinitamente pequeñas en la variable independiente de una función real de variable real y de cómo el resultado de esas variaciones se acerca "infinitamente" a un valor de la función, o se hace infinitamente grande o pequeño (lo que denotamos por *tender a* $+\infty$ o *a* $-\infty$, respectivamente). No obstante, en su desarrollo se tiene que recurrir a expresiones que no son intuitivas y que conllevan un considerable nivel de abstracción para el que las lee por primera vez. Pongamos como ejemplo la expresión que describe que una variación infinitamente pequeña en la variable independiente hace que la función se haga infinitamente grande, es decir:

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \{\forall M > 0\ \exists \delta > 0 \mid x \in \mathrm{Dom}(f) \wedge 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) > M\}.$$



Estos no han sido los únicos conceptos matemáticos creados para justificar el infinito. Relacionado con el concepto de límite, y antes de su establecimiento riguroso, se empleó el concepto de *infinitésimo* y de *infinito en un punto*. Dada una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, se dice que f es un *infinitésimo* en un punto $a\in \mathbb{R}\cup\{-\infty\}\cup\{+\infty\}$ si $\lim_{x\to a} f(x)=0$. Anteriormente a establecer esta expresión formal de infinitésimo, se decía que un infinitésimo era una cantidad infinitamente pequeña. Según la definición que aquí mostramos, los infinitésimos no son cantidades, sino funciones reales. Se dice que dos funciones reales f y g son infinitésimos equivalentes en a si las dos funciones se comportan de manera similar "infinitamente cerca" de ese punto. Evidentemente, el problema del concepto de infinitésimo es la inclusión del concepto "infinitamente cerca", cuestión que actualmente está solventada con el concepto de límite. Para ello se da la siguiente formulación rigurosa de dos infinitésimos equivalentes en un punto a: dos infinitésimos en a, f y g, son infinitésimos equivalentes en a cuando $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$. Al final, curiosamente, el infinitésimo, que se utilizaba para evitar el concepto de límite, ha necesitado de dicho concepto para su formalización.

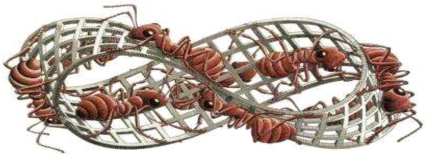
Análogamente a las definiciones de infinitésimo e infinitésimos equivalentes, se pueden introducir las nociones de infinito e infinitos equivalentes cuando se habla de funciones reales. Así, una función $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ se dice que es un *infinito* en $a\in\mathrm{R}$ si $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$ (pudiendo incluirse $+\infty$ ó $-\infty$, según la notación empleada). De este modo, dos infinitos en a, f y g, se dicen infinitos equivalentes en a cuando $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1$.

Hay dos conceptos más del Análisis Matemático importantes y que están directamente relacionados con el concepto de infinito. Nos referimos a los conceptos de infinitesimal y de diferencial. En Matemáticas, el adjetivo *infinitesimal* equivale a *infinitamente pequeño* o, en términos de límite, con límite 0. A la hora de obtener el concepto de derivada, se estudian incrementos infinitesimales, pero esos incrementos necesitan establecerse de forma rigurosa. Para ello se define el *diferencial* de una variable x como un incremento infinitesimal de la variable.

Otro concepto que está muy relacionado con el infinito es el de *fractal*. Un fractal es a menudo un objeto que exhibe recursividad, o autosimilitud, a cualquier escala. Por autosimilitud queremos decir que podemos tomar una sección suya de modo que el resultado sea la misma figura pero a una escala más pequeña. Esa no es la única propiedad que suelen presentar los fractales; de hecho, un objeto es un fractal si y solo si su dimensión es fraccionaria. No obstante, hemos destacado las nociones de autosimilitud o autosemejanza y recursividad porque ya se ha visto que están intrínsecamente relacionadas con el infinito matemático.

Si enfocamos el estudio desde la Geometría y la Topología, podemos hablar del infinito de otras dos formas más. La primera consiste en el concepto del *infinito topológico*: si consideramos un espacio euclídeo R^n, siempre existe un punto en el exterior de una bola cerrada, por muy grande que se considere el radio de la bola. Pues bien, esa definición de infinitud se puede aplicar no solo a los espacios euclídeos, sino a cualquier espacio métrico, con lo que un espacio métrico será infinito (o no acotado) si no se puede recubrir por una cantidad finita de bolas cerradas.

Sin salir de la Topología, podemos hacer referencia a otras propiedades que sirven para clasificar a los espacios topológicos y en las cuales también reside la noción de infinito. Nos referimos, por ejemplo, a las condiciones de compacidad, de Lindelöf y de segundo numerable. El concepto de compacidad, por ejemplo, persigue rebajar cantidades infinitas a cantidades finitas. De hecho, es muy habitual verlo redactado de la siguiente manera: un conjunto es compacto si de cualquier recubrimiento por una infinidad de abiertos es posible extraer un subrecubrimiento formado por una cantidad finita de abiertos. Por su parte, la propiedad de Lindelöf puede verse como una forma de rebajar lo infinito a lo numerable. Suele ser usual la siguiente redacción de la propiedad de Lindelöf para un espacio topológico: de cualquier recubrimiento por abiertos del espacio puede obtenerse un subrecubrimiento numerable. La propiedad de segundo numerable es la que permite que ciertos espacios topológicos puedan construirse con una cantidad numerable de conjuntos. Más concretamente, se dice que un espacio es segundo numerable si existe una base numerable que genere la topología del espacio en cuestión.



Otro concepto geométrico cercano a nuestro análisis es el de los *objetos del infinito*. Ya comentamos cómo Desargues introducía en el plano los conceptos de punto del infinito y recta del infinito, para que dos rectas siempre se cortasen. Pues si disponemos de un espacio euclídeo R^n, siempre podemos construir el espacio proyectivo asociado, sin más que considerar un hiperplano (*n-1*)-dimensional que no estaba en el espacio euclídeo considerado y que se considera como el infinito. De este modo, por ejemplo, dos rectas paralelas se cortarán en un punto de ese hiperplano, dos planos paralelos lo harán en una recta de dicho hiperplano y cualesquiera dos objetos paralelos tendrán su intersección (que siempre es no vacía) en dicho hiperplano.

Haciendo una última referencia a la Geometría, la proyección estereográfica de una esfera de R^3 en el plano R^2 permite trabajar también el infinito del plano R^2 como un punto en dicha esfera. Esta proyección de una esfera en el plano se hace desde un polo de la esfera, que precisamente es al que se le puede asociar el infinito del plano. Eso se debe a que cuanto más cerca del polo están los puntos de la esfera, más alejados están entre sí los puntos correspondientes del plano (en el sentido de que los puntos van quedando en el exterior de una bola de R^2 de radio cada vez mayor).

4. Conclusiones

Incomprensible para unos y adorado por otros, el infinito se ha hecho presente de muy diferentes formas en cada cultura. Entre las aplicaciones matemáticas más conocidas que derivan de él están las demostraciones por inducción o el cálculo de longitudes, áreas y volúmenes. En la sociedad, las referencias al infinito se relacionan más con la trascendencia o con intentos de conseguir notoriedad (como en los anuncios publicitarios).

En nuestra opinión, la forma de infinito más accesible para cualquier persona es la geométrica, ya que no resulta tan abstracta en dimensiones pequeñas. No obstante, es evidente que la comprensión del concepto matemático es más completa cuando se realiza un acercamiento desde diferentes puntos de vista (a ser posible, de modo simultáneo).

Probablemente, el de la asimilación del infinito siempre será un problema educativo de difícil tratamiento, pero que puede abordarse con buenos resultados desde el convencimiento de que la idea de infinitud evoluciona con el aprendizaje y que relaciona distintas materias, como la Historia, la Filosofía, la Religión, la Lengua, las Ciencias Naturales, la Informática y, por supuesto, la Matemática. A modo de curiosidad, en todas esas áreas del conocimiento, se constata que el concepto de infinito surge de la generalización de lo finito; pero, en el proceso de formalización, resulta que lo infinito es el origen de lo finito.

Agradecimientos

Los autores quieren agradecer a los profesores Andrés Cordón Franco y Miguel Ángel Gutiérrez Naranjo sus valiosos comentarios sobre versiones previas de este trabajo.

Bibliografía

Agustín de Hipona (413-426). *De civitate Dei*. Traducido al español en Agustín de Hipona (1982): *La Ciudad de Dios*. Biblioteca de Autores Cristianos.

Anselmo de Canterbury (1070-1078). *Proslogium*. Traducido al español en Anselmo de Canterbury (1952). *Obras Completas*. Biblioteca de Autores Cristianos.

Aristóteles (s.IV a.C.): *Physica*. Traducido al español en Aristóteles (1995): *Física*. Editorial Gredos.

Arquímedes (s.III a.C.). *De mensura circuli*. Traducido al español, bajo el título *Medida del círculo*, en Arquímedes-Eutoctio (2005): *Tratados I-Comentarios*. Editorial Gredos.

Bolzano, B. (1851). *Paradoxien des Unendlichen*. Leipzig. Traducido al español en B. Bolzano (1991). *Las paradojas del infinito*. Universidad Nacional de México.

Boyer, C.B. (1968). *A History of Mathematics*. John Wiley and Sons. Traducido al español en C.B. Boyer (1986): *Historia de la matemática*. Alianza Editorial.

Bruno, G. (1584). *De l'infinito universo et mondi*. Venecia. Traducido al español en G. Bruno (1998). *Del infinito: el universo y los mundos*. Alianza Editorial.

Cantor, G. (1874). *Über eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen*. *J. Reine Angew. Math.* 77, pp. 258-262. Traducida al inglés en W.B. Ewald (1996). *From Kant to Hilbert: A source book in the foundations of mathematics.* Vol. 2. Oxford University Press.

Cantor, G. (1878): *Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre*. J. Reine Angew*. Math.* 84, pp. 242-258. Reimpreso en G. Cantor (1932): *Gesammelte Abhandlungen matematischen und philosophischen Inhalts*. Springer.

Cantor, G. (1883). *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*. Leipzig. Traducida al inglés en W.B. Ewald (1996): *From Kant to Hilbert: A source book in the foundations of mathematics.* vol. 2. Oxford University Press.

Cantor, G. (1893): *Carta a Giulio Vivanti de* 13 *de diciembre de* 1893. Traducida al inglés en J.W. Dauben (1979). *Georg Cantor. His Mathematics and Philosophy of the Infinite*. Harvard University Press, p. 131.

Cantor, G. (1899): *Carta a Dedekind de* 28 *de julio de* 1899. Traducida al inglés en J. van Heijenoort (ed.) (1967): *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic*, 1871-1931. Harvard University Press, pp. 113-117.

Cohen, P.J. (1966): *Set Theory and the Continuum Hypothesis*. Benjamin.

Conway, J.H. (1976): *On Numbers and Games*. Academic Press.

Dedekind, R. (1872): *Stetigkeit und irrationale zahlen*. Vieweg & Sohn. Traducido al español, bajo el título *Continuidad y números irracionales*, en R. Dedeking (1998): *¿Qué son y para qué sirven los números*? y otros escritos sobre los fundamentos de la Matemática. Alianza Editorial.

Dedekind, R. (1888): *Was sind und was sollen die zahlen*?, Braunschweig. Traducido al español, bajo el título *¿Qué son y para qué sirven los números*?, en R. Dedeking (1998): *¿Qué son y para qué sirven los números*? y otros escritos sobre los fundamentos de la Matemática. Alianza Editorial.

Desargues, G. (1639): *Brouillon project d'une atteinte aux événements des recontres d'un cone avec un plan*. París. Traducido al inglés, bajo el título *Rough Draft on Conics*, en J.V. Field and J.J. Gray (eds.) (1987). *The Geometrical Work of Girard Desargues*. Springer.

Descartes, R. (1641). *Meditationes de Prima Philosophia*. Traducido al español en R. Descartes (2005): *Meditaciones filosóficas*. Alianza Editorial.

Einstein, A. (1920): *Relativity: The Special and General Theory*. Henry Holt. Traducido al español en A. Einstein (2005). *Sobre la Teoría de la Relatividad Especial y General*. Alianza Editorial.

Einstein, A. (1922): *The Meaning of Relativity*. Princeton University Press. Traducido al español en A. Einstein (1980): *El significado de la relatividad*. Espasa-Calpe.

Euclides (h. 300 a.C.): *Stoicheia*. Traducido al español en Euclides (1991-1996): *Elementos* (3 volúmenes). Editorial Gredos.

Fedriani, E.M. (2000): *Un año más, el Siglo se acaba*. Epsilon, Revista de la S.A.E.M. Thales 46-47, pp. 155-162.

Fedriani, E.M.; Tenorio, A. F. (2004): *Los sistemas de numeración maya, azteca e inca*. Lecturas Matemáticas 25, pp. 159-190.

Filipas, M. (2003). *A Lexicon Theory of Tarot Origin*. Association for Tarot Studies Newsletter Archive. Online Edition 4.

Galilei, G. (1638): *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno à due nove scienze*. Louis Elsevier. Traducido al español en G. Galilei (2004): *Diálogos acerca de dos nuevas ciencias*. Editorial Losada.

Gödel, K. (1931): *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I*. Monatshefte für Mathematik und Physik 38, pp. 173-198. Traducido al español, bajo el título *Sobre sentencias formalmente indecidibles de Principia Mathematica y sistemas afines*, en K. Gödel (2006): Obras completas. Alianza Editorial.

Gödel, K. (1940): *The consistency of the continuum hypothesis*. Princeton University Press. Traducido al español, bajo el título "*La consistencia de la hipótesis del continuo*", en K. Gödel (2006): Obras completas. Alianza Editorial.

Guedj, D. (1996): *L'empire des nombres*. Gallimard. Traducido al español en D. Guedj (1998): *El imperio de las cifras y de los números*. Ediciones B.

Halmos, P.R. (1960): *Naive Set Theory*. D. Van Nostrand. Traducido al español en P.R. Halmos (1965): *Teoría intuitiva de los conjuntos*. Compañía Editorial Continental.

Hegel, G.W. (1807): *Phänomenologie des Geistes*. Traducido al español en G.W.F. Hegel (2000): *Fenomenología del Espíritu*. Fondo de Cultura Económica.

Hegel, G.W. (1812-1816): *Wissenschaft der logik*. Traducido al español en G.W.F. Hegel (1993): *Ciencia de la Lógica*. Solar.

Jech, T. (1991): *The infinite*. *Jahrbuchder Kurt Gödel Gesellschaft*, Sociedad Kurt Gödel. Traducido al español en T. Jech (2005): *El infinito*. La Gaceta de la RSME 8:2, pp. 369-377.

Kant, I. (1781): *Kritik der reinen Vernunft*. Traducido al español en I. Kant (1978): *Crítica de la Razón Pura*. Alfaguara.

Kline, M. (1972): *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Oxford University Press. Traducido al español en M. Kline (1992): *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*. Alianza Universidad.

Kuratowski, K.; Mostowski, A. (1968): *Set Theory*. North-Holland.

Lévi, E. (1854-1856): *Dogme et Rituel de la haute magie*. Gemer Bailli. Traducido al español en E. Lévi (2004): *Dogma y Ritual de Alta Magia*. Editorial Humanitas.

Lightstone, A.H. (1972): *Infinitesimals*. The American Mathematical Monthly 79:3, pp. 242-251.

Lucrecio (50 a.C.): *De Rerum Natura*. Traducido al español en Lucrecio (1987): *De Rerum Natura*. Editorial Planeta.

Mandelbrot, B.B. (1975): *Les objets fractals: forme, hasard et dimension*. Flammarion. Traducido al español en B.B. Mandelbrot (1987): *Los objetos fractales: forma, azar y dimensión*. Tusquets Editores.

Neumann, E. (1949): *Urprungsgeschichtge des Bewußtseins*. Rascher Verlag. Traducido al inglés en E. Neumann (1995): *The Origins and History of Consciousness*. Princeton Univerity Press.

Plotino (h.250 a.C.): *Enneades*. Traducido al español en Plotino (1983-1998): *Enéadas* (3 volúmenes). Editorial Gredos.

Ribnikov, K. (1960-1963): *Istoriya Matematiki*. Moscow University Press. Traducido al español en K. Ribnikov (1987): *Historia de las Matemáticas*. Editorial Mir.

Riemann, B. (1868): *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*. Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 13, pp. 133-152. Transcripción de su lectura de habilitación en 1854. Traducido al inglés, bajo el título *On the Hypotheses which lie at the Foundation of Geometry*, en D. E. Smith (ed.) (1929): “A Source Book in Mathematics”. McGraw-Hill, pp. 411-425.

Robinson, A. (1969): *The Metaphysics of the Calculus*. En J Hintikka (ed.) (1969): *The Philosophy of Mathematics*. London, Oxford Univ. Press, pp. 153-163.

Rucker, R. (1982): *Infinity and the Mind*. Birkhäuser. Reeditado en R. Rucker (2005): *Infinity and the Mind*. Princeton University Press.

Russell, B. (1901): *Recent work in the philosophy of Mathematics*. The International Monthly 4, p. 84. Traducido al español en B. Russell (1973): *Obras completas*, Tomo II. Aguilar.

Russell, B. (1903): *The Principles of Mathematics*. Cambridge University Press. Traducido al español en B. Russell (1977): *Los principios de la matemática*. Espasa-Calpe.

Stewart, I. (1998): *Hilbert's Hotel*. New Scientist 19, pp. 59-61.

Tomás de Aquino (1265-1272): *Summa Theologica*. Traducido al español en Tomás de Aquino (1954-1970): *Suma de Teología* (16 volúmenes). Biblioteca de Autores Cristianos.

Wallis, J. (1656): *Arithmetica Infinitorum*. Oxford. Traducido al inglés en J. Wallis (2004): *The arithmetic of infinitesimals*. Springer.

Wattenbach, W. (1869): *Anleitung zur lateinischen Paläographie*. S. Hirzel.

Zermelo, E. (1908): *Unterusuchungen Über die Grundlagen der Mengenlehre I. Matematische Annalen* 65, pp. 261-281. Traducido al inglés, bajo el título *Investigations in the foundations of set theory I*, en J. van Heijenoort (1967): From Hegel to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1871-1931”. Harvard University Press.

Eugenio M. Fedriani Martel. Licenciado en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Sevilla (julio de 1996) y Doctor por esa misma universidad (junio de 2001). Actualmente es Profesor Titular de Universidad del Área de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa en la Universidad Pablo de Olavide y Director del Centro de Estudios para Extranjeros de dicha universidad. Sus publicaciones, tanto en revistas como en congresos, son referentes a la Teoría de Grafos, Álgebras de Lie y Didáctica de las Matemáticas.

Ángel F. Tenorio Villalón. Nacido el 7 de julio de 1977 en Sevilla. Licenciado en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Sevilla (julio de 2000) y Doctor por esa misma universidad (diciembre de 2003). Actualmente es Profesor Ayudante Doctor en la Universidad Pablo de Olavide y Delegado Provincial de la S.A.E.M. THALES en Sevilla. Sus publicaciones, tanto en revistas como en congresos, son referentes a la Teoría de Lie, la Historia de las Matemáticas y la metodología ECTS en las universidades españolas.