REVISTA EMA
2003, VOL. 8, Nº 2, 121-156

RAZONAMIENTO COVARIACIONAL APLICADO A LA MODELACIÓN DE EVENTOS DINÁMICOS: UN MARCO CONCEPTUAL Y UN ESTUDIO[1]

MARILYN CARLSON, SALLY JACOBS,
EDWARD COE, SEAN LARSEN Y ERIC HSU

Se desarrolla la noción de razonamiento covariacional y se propone un marco conceptual para describir las acciones mentales involucradas al aplicar razonamiento covariacional cuando se interpretan y representan funciones asociadas a eventos dinámicos. Se reporta la habilidad para razonar sobre cantidades covariantes en situaciones dinámicas, de estudiantes de alto desempeño en un curso de cálculo. El estudio reveló que ellos eran capaces de construir imágenes de la variable dependiente de una función que cambia simultáneamente con el cambio imaginado de la variable independiente, y en algunas ocasiones eran capaces de construir imágenes de la razón de cambio para intervalos contiguos del dominio de una función. Sin embargo, al parecer, tuvieron dificultad para formar imágenes de una razón cambiante de manera continua y no pudieron representar con exactitud o interpretar los puntos de inflexión ni la razón creciente y decreciente para funciones asociadas a situaciones dinámicas. Estos hallazgos sugieren que el currículo y la instrucción deberían aumentar el énfasis en el cambio que debe darse en los alumnos de una imagen coordinada de dos variables que cambian simultáneamente a una imagen coordinada de razón de cambio instantánea con cambios continuos en la variable independiente para funciones asociadas a situaciones dinámicas.

The article develops the notion of covariational reasoning and proposes a framework for describing the mental actions involved in applying covariational reasoning when interpreting and representing dynamic function events. It also reports on an investigation of high-performing 2nd-semester calculus student´s ability to reason about covarying quantities in dynamic situations. The study revealed that these students were able to construct images of a function´s dependent

1. Traducción realizada por Patricia Perry y Hernando Alfonso, del original Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. y Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: a framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*, 5, 352-378. Traducido y reimpreso con la autorización del *Journal for Research in Mathematics Education*,

variable changing in tandem with the imagined change of the independent variable, and in some situations, were able to construct images of rate of change for contiguous intervals of a function´s domain. However, students appeared to have difficulty forming images of continuously changing rate and could not accurately represent or interpret inflection points or increasing and decreasing rate for dynamic function situations. These findings suggest that curriculum and instruction should place increased emphasis on moving students from a coordinated image of two variables changing in tandem to a coordinated image of the instantaneous rate of change with continuous changes in the independent variable for dynamic function situations.

Palabras claves: investigación, cálculo, covariación, funciones, razonamiento, modelación matemática, desarrollo cognitivo, secundaria.

Desde finales del siglo diecinueve se ha recomendado de manera reiterada incrementar en los currículos escolares el énfasis en el estudio de las funciones (*College Entrance Examination Board*, 1959; Hamley, 1934; Klein, 1883). De manera más reciente, la literatura que propende por incluir el tema de funciones desde muy temprano en la instrucción, apoya que se promueva el pensamiento conceptual acerca de funciones, lo que incluye investigar patrones de cambio (Kaput, 1994; Monk, 1992; NCTM, 1989, 2000; Sfard, 1992; Thorpe, 1989; Vinner y Dreyfus, 1989). Tanto en los documentos de estándares de 1989 como en los del año 2000, los autores del *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) prescribieron que los estudiantes deben ser capaces de analizar patrones de cambio en varios contextos. Recomendaron que los estudiantes aprendan a interpretar enunciados tales como “la tasa de inflación está decreciendo” y, en general, apoyaron la idea de que los estudiantes deben desarrollar una “comprensión más profunda de las maneras en que los cambios en las cantidades se pueden representar matemáticamente” (NCTM, 2000, p. 305). Además, los autores de *National Science Education Standards* (*National Research Council*, 1996) han preconizado que los estudiantes usen funciones matemáticas para identificar patrones y anomalías en los datos (p. 174).

No es claro hasta qué punto los currículos de matemáticas han respondido a estos llamados (Cooney y Wilson, 1993). La investigación sugiere que los estudiantes que ingresan a la universidad traen una comprensión deficiente sobre las funciones, y que los cursos universitarios de primer nivel hacen poco para solucionar esta deficiencia (Carlson, 1998; Monk, 1992; Monk y Nemirovsky, 1994; Thompson, 1994a). Investigaciones recientes acerca de la comprensión que sobre el tema de funciones tienen los estudiantes de nivel de pregrado, han documentado que incluso estudiantes académicamente talentosos tienen dificultad para modelar relaciones funcionales de situaciones que involucran la razón de cambio de una variable cuando varía continuamente en una relación dependiente con otra variable (Carlson, 1998; Monk y Nemirovsky, 1994; Thompson, 1994a). La investigación ha mostrado también que esta habilidad es esencial para interpretar modelos de eventos dinámicos (Kaput, 1994; Rasmussen, 2000) y que es fundamental para comprender los conceptos principales del cálculo (Cottrill, Dubinsky, Nichols, Schwingendorf, Thomas y Vidakovic, 1996; Kaput, 1994; Thompson, 1994a; Zandieh, 2000) y de las ecuaciones diferenciales (Rasmussen, 2000).

Al estudiar el proceso de adquirir una comprensión de las relaciones funcionales dinámicas, Thompson (1994b) ha sugerido que el concepto de razón es fundamental. De acuerdo con Thompson, una imagen madura de razón involucra lo siguiente: la construcción de una imagen de cambio en alguna cantidad, la coordinación de imágenes de dos cantidades y la formación de una imagen de la covariación simultánea de dos cantidades. Estas fases van paralelas a la teoría de tres estadios de Piaget acerca de las operaciones mentales del niño, involucradas en el pensamiento funcional acerca de la variación (Piaget, Grize, Szeminska y Bang, 1977). Contribuye también a nuestra comprensión de la noción de covariación el trabajo de Saldanha y Thompson (1998), quienes describen la comprensión de la covariación como "mantener en la mente, de manera simultánea, una imagen sostenida de dos valores de cantidades (magnitudes)" (p. 298). Esta actividad mental involucra la coordinación de las dos cantidades, es decir, hacer seguimiento al valor de cada cantidad y darse cuenta de que la otra cantidad también tiene un valor en cada instante. En esta teoría, las imágenes de covariación se consideran como algo que se desarrolla y tal desarrollo pasa de la coordinación de dos cantidades a las imágenes de la coordinación continua de ambas cantidades para un lapso determinado. De acuerdo con Saldanha y Thompson (1998), "al inicio del desarrollo, uno coordina dos valores de cantidades — se piensa en uno, después en otro, después en el primero, después en el segundo y así sucesivamente. Las imágenes posteriores de la covariación suponen comprender el tiempo como una cantidad continua, de tal manera que en la imagen que uno tiene, los dos valores de cantidades persisten" (p. 298).

Para Confrey y Smith (1995), un enfoque de covariación que tenga como fin crear y conceptualizar funciones, incluye la formación de vínculos entre los valores del dominio de una función y los de su recorrido. En el caso de las tablas, esto incluye la coordinación de la variación en dos o más columnas mientras se recorre la tabla de arriba a abajo (Confrey y Smith, 1994). Tanto Confrey y Smith (1995) como Thompson (1994a) describen la *acción de coordinar* como fundamental para el razonamiento acerca de las relaciones funcionales dinámicas. Aunque la covariación de dos cantidades no siempre requiere la noción de tiempo, es a través de la metáfora de "tiempo exacto" para la localización imaginada de un "punto móvil" que Confrey y Smith y otros autores hablan sobre las cantidades que covarían (e.g., la visión de función "a través del tiempo" de Monk [1992] y el enfoque de Nemirovsky [1996] que contrapone la aproximación variacional a la aproximación punto a punto).

En este artículo proponemos un marco conceptual para el estudio del razonamiento covariacional e ilustramos de qué modo se puede usar para analizar la comprensión de los alumnos acerca de las situaciones dinámicas que involucran dos cantidades que cambian simultáneamente. También presentamos problemas que evocan y requieren el uso del razonamiento covariacional y, al hacerlo, ilustramos características de los currículos que enfatizan un enfoque covariacional para el aprendizaje de funciones. Describimos nuestros hallazgos de investigación acerca de las habilidades de razonamiento covariacional de estudiantes de alto desempeño en un curso de cálculo de segundo semestre y discutimos las implicaciones de tales resultados.

DEFINICIONES

Sobre la base de estos estudios y de nuestra investigación de los últimos años (Carlson, 1998; Carlson, Jacobs y Larsen, 2001; Carlson y Larsen, en prensa), definimos el *razonamiento covariacional* como las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra. Coincidimos con el punto de vista de Saldanha y Thompson (1998) según el cual las imágenes de covariación son evolutivas, y usamos el término *evolutivo* en el sentido de piagetiano (Piaget, 1970) para significar que las imágenes de covariación se pueden definir por niveles y que los niveles emergen en una sucesión ordenada. A través de este artículo, el uso que hacemos de *imagen* es consistente con la descripción proporcionada por Thompson (1994b). El constructo de imagen se describe como "dinámico, que se origina en acciones corporales y movimientos de la atención, y como la fuente y el vehículo de operaciones mentales" (p. 231). La noción de imagen no es inconsistente con la de *imagen conceptual* definida por Vinner y Dreyfus (1989; i.e., los cuadros mentales, representaciones visuales, experiencias, propiedades, e impresiones que un individuo en un contexto dado, asocia con el nombre de un concepto); sin embargo, su foco está en la dinámica de las operaciones mentales (Thompson, 1994b). Utilizamos el término *razón* para significar la razón de cambio promedio en el caso de imaginar un subintervalo, o la razón de cambio instantánea en el caso de imaginar una función sobre todo su dominio.

Los términos *procesos de pensamiento pseudo-analíticos* y *comportamientos pseudo-analíticos*, identifican, respectivamente, procesos de pensamiento y comportamientos que ocurren sin comprensión y los comportamientos pseudo-analíticos son producidos por procesos de pensamiento pseudo-analíticos (Vinner, 1997). De acuerdo con Vinner (1997), "los comportamientos pseudo-analíticos describen un comportamiento que podría parecer un comportamiento conceptual pero que de hecho es producido por procesos mentales que no caracterizan un comportamiento conceptual" (p. 100); estos comportamientos y procesos de pensamiento no necesariamente son negativos y pueden ser el resultado de "asociaciones espontáneas, naturales, pero incontroladas" (p. 125). Los comportamientos pseudo-analíticos difieren de los comportamientos *pseudo-conceptuales* en que el foco de los primeros está en los procesos analíticos y no en el concepto; sin embargo, estas dos ideas no se deben ver como mutuamente excluyentes ya que en algunos contextos los dos modos, el analítico y el conceptual, están involucrados.

ANTECEDENTES

En años recientes, nuestra comprensión de las maneras en que los estudiantes universitarios de primeros niveles interpretan y representan funciones relacionadas con situaciones dinámicas, ha sido informada por diversas investigaciones (Carlson, 1998; Kaput, 1994; Monk, 1992; Nemirovsky, 1996; Sierpinska, 1992; Thompson, 1994b). Al examinar el pensamiento de estudiantes de cálculo que están intentado interpretar la naturaleza cambiante de la *razón de cambio* para intervalos del dominio de una función, diversos estudios (Carlson, 1998; Monk, 1992; Monk y Nemirovsky, 1994; Nemirovsky, 1996; Thompson, 1994a) han revelado que esta habilidad se desarrolla lentamente y además se han reportado problemas específicos en la habilidad de los estudiantes para interpretar información en las gráficas de funciones. Estudios realizados por Monk (1992) y Kaput (1992) han notado que estudiantes de cálculo muestran una tendencia fuerte a distraerse por la forma cambiante de una gráfica y en general no parecen ver la gráfica de una función como un medio para definir la relación de covariación entre dos variables. Otros estudios han encontrado que estudiantes de cálculo tienen dificultad para interpretar y representar la concavidad y los puntos de inflexión en una gráfica (Carlson, 1998; Monk, 1992). Incluso cuando se les examinó directamente para que describieran su significado en el contexto de una situación dinámica del mundo real, los estudiantes produjeron enunciados tales como "la segunda derivada es positiva, hay concavidad hacia arriba" y "la segunda derivada es igual a cero, hay un punto de inflexión" (Carlson, 1998). Sondeos posteriores revelaron que esos estudiantes parecían no tener una comprensión de por qué este procedimiento funciona y, en general, no parecían involucrarse en comportamientos que sugirieran la coordinación de imágenes de dos variables que estaban cambiando de manera concurrente. En estudiantes universitarios de primeros niveles, Tall (1992) también encontró que aunque sus imágenes conceptuales de función incluían una noción de correspondencia, la idea de operación, una ecuación, una fórmula y una gráfica, *no* incluía la concepción de dos variables cambiando al unísono, cada una con respecto a la otra.

La investigación acerca del desarrollo de las concepciones de los estudiantes sobre función ha revelado que una visión de función como un proceso que acepta valores de entrada y produce valores de salida[2] (Breidenbach, Dubinsky, Hawks y Nichols, 1992), es esencial para el desarrollo de una imagen madura de función. También se ha mostrado que esta visión es fundamental para la coordinación de imágenes de dos variables que están cambiando al unísono una con respecto a la otra (Carlson, 1998; Thompson, 1994a). De acuerdo con Thompson (1994a. p. 27),

> Cuando los estudiantes se hacen adeptos a imaginar expresiones evaluadas continuamente a medida que "corren rápidamente" sobre un continuo, el trabajo de base les ha permitido reflexionar sobre un conjunto de posibles valores de entrada en relación con el conjunto de correspondientes valores de salida.

También se ha encontrado que la visión de función como covariación es esencial para la comprensión de conceptos del cálculo (Cottrill et al., 1996; Kaput, 1992; Thompson, 1994b; Zandieh, 2000). Las dificultades de los estudiantes para aprender el concepto de límite se han vinculado a habilidades de razonamiento covariacional empobrecidas. En un estudio reciente, Cottrill et al. (1996) recomendaron que el concepto de límite debería comenzar con la noción dinámica informal de los "valores de una función que se acercan a un valor límite a medida que los valores en el dominio se aproximan a alguna cantidad" (p. 6). Se encontró que el desarrollo de este esquema de proceso "coordinado" del límite no es trivial para los estudiantes y que las dificultades que los alumnos tienen para comprender el esquema se han constituido como un obstáculo importante para el desarrollo de su concepción de límite.

Al describir su marco conceptual para analizar la comprensión que los estudiantes tienen de la derivada, Zandieh (2000) también sugirió que es esencial una visión de la función como covariación de los valores de entrada

2. Hemos traducido los términos "input" y "output" respectivamente por "valor de entrada" y "valor de salida". [N.T.]

con los valores de salida. En su marco, la investigadora estableció que “la función derivada actúa como un proceso de pasar a través de (posiblemente) una infinidad de valores de entrada y para cada uno de ellos determinar un valor de salida dado por el límite del cociente de diferencias en ese punto” (p. 107), enfatizando la noción de que la función derivada resulta de covariar los valores de entrada de la función derivada con los valores de la razón de cambio de la función original.

Thompson (1994b) sugirió que el razonamiento covariacional es fundamental para la comprensión del teorema fundamental del cálculo por parte de los estudiantes: “el teorema fundamental del cálculo —darse cuenta de que la acumulación de una cantidad y la razón de cambio de su acumulación están relacionadas estrechamente es una de las huellas intelectuales en el desarrollo del cálculo” (p. 130). Cuando se interpreta la información transmitida por una función de la velocidad, la distancia total recorrida relativa a la cantidad de tiempo transcurrido se imagina como la coordinación de acumulaciones de distancia y acumulaciones de tiempo.

En forma colectiva, estos estudios sugieren que el razonamiento covariacional es fundamental para comprender conceptos principales del cálculo y que los currículos convencionales no han sido efectivos para promover esta habilidad de razonamiento en los estudiantes. Construyendo sobre estos hallazgos, nuestro estudio investigó la complejidad de construir procesos mentales que involucren la razón de cambio a medida que ella cambia continuamente en una relación funcional. En la siguiente sección se describe un marco conceptual para investigar el razonamiento covariacional.

MARCO CONCEPTUAL

Razonamiento covariacional

En la Tabla Nº 1 se proporciona una descripción de las cinco acciones mentales del razonamiento covariacional y de los comportamientos asociados. Los comportamientos incluidos en la lista se han identificado previamente en estudiantes de pregrado mientras respondían a tareas que involucran la interpretación y representación de funciones asociadas a situaciones dinámicas (Carlson, 1998).

Las acciones mentales del marco conceptual de la covariación proporcionan un medio para clasificar los comportamientos que se pueden ver cuando los estudiantes se involucran en tareas de covariación; sin embargo, la habilidad de razonamiento covariacional de un individuo, relativa a una tarea particular, se puede determinar sólo examinando el conjunto de comportamientos y acciones mentales exhibido mientras responde a esa tarea.

Acción mental	Descripción de la acción mental	Comportamientos
AM1	Coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra.	Designación de los ejes con indicaciones verbales de coordinación de las dos variables (e.g., *y* cambia con cambios en *x*).
AM2	Coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	Construcción de una línea recta creciente. Verbalización de la consciencia de la dirección del cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.
AM3	Coordinación de la cantidad de cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	Localización de puntos/construcción de rectas secantes. Verbalización de la consciencia de la cantidad de cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.
AM4	Coordinación de la razón de cambio promedio de la función con los incrementos uniformes del cambio en la variable de entrada.	Construcción de rectas secantes contiguas para el dominio. Verbalización de la consciencia de la razón de cambio del valor de salida (con respecto al valor de entrada) mientras se consideran incrementos uniformes del valor de entrada.
AM5	Coordinación de la razón de cambio instantánea de la función con los cambios continuos en la variable independiente para todo el dominio de la función.	Construcción de una curva suave con indicaciones claras de los cambios de concavidad. Verbalización de la consciencia de los cambios instantáneos en la razón de cambio para todo el dominio de la función (los puntos de inflexión y la dirección de las concavidades son correctos).

Tabla Nº 1. Acciones mentales del marco conceptual para la covariación

Un estudiante se clasifica en un determinado nivel de acuerdo con la imagen global que parece sustentar a las varias acciones mentales que esa persona exhibe en el contexto de un problema o tarea. El marco conceptual para la covariación contiene cinco niveles distintos de desarrollo (Tabla Nº 2). Decimos que la habilidad de razonamiento covariacional de alguien ha alcanzado un nivel dado de desarrollo cuando sustenta a las acciones mentales asociadas con ese nivel *y* a las acciones asociadas con todos los niveles que están por debajo.

Niveles del razonamiento covariacional

El marco conceptual para la covariación describe cinco niveles de desarrollo de las imágenes de la covariación. Estas imágenes de covariación se presentan en términos de las acciones mentales sustentadas por cada imagen.

Nivel 1 (N1). Coordinación

En el nivel de coordinación, las imágenes de la covariación pueden sustentar a la acción mental de coordinar el cambio de una variable con cambios en la otra variable (AM1).

Nivel 2 (N2). Dirección

En el nivel de dirección, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la dirección del cambio de una de las variables con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1 y AM2 ambas son sustentas por imágenes de N2.

Nivel 3 (N3). Coordinación cuantitativa

En el nivel de la coordinación cuantitativa, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la cantidad de cambio en una variable con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1, AM2 y AM3 son sustentadas por las imágenes de N3.

Nivel 4 (N4). Razón promedio

En el nivel de la razón promedio, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio promedio de una función con cambios uniformes en los valores de entrada de la variable. La razón de cambio promedio se puede descomponer para coordinar la cantidad de cambio de la variable resultante con los cambios en la variable de entrada. Las acciones mentales identificadas como AM1 hasta AM4 son sustentadas por imágenes de N4.

Nivel 5 (N5). Razón instantánea

En el nivel de la razón instantánea, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio instantánea de una función con cambios continuos en la variable de entrada. Este nivel incluye una consciencia de que la razón de cambio instantánea resulta de refinamientos más y más pequeños en la razón de cambio promedio. También incluye la consciencia de que el punto de inflexión es aquel en el que la razón de cambio pasa de ser creciente a decreciente o al contrario. Las acciones mentales identificadas como AM1 a AM5 son sustentadas por imágenes de N5.

Tabla Nº 2. Marco conceptual para los niveles de la covariación

La noción de imagen utilizada para describir los niveles del marco conceptual está de acuerdo con la caracterización hecha por Thompson (1994a), según la cual una imagen es aquello que "se enfoca en la dinámica de las operaciones mentales" (p. 231). A medida que la imagen de covariación que tiene un individuo se desarrolla, ella sustenta un razonamiento covariacional más sofisticado. (Recuérdese que definimos *razonamiento covariacional* como las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra).

Un estudiante que en relación con una tarea específica se clasifica en el nivel 5 del razonamiento covariacional (N5; i.e., nivel de la razón instantánea), es capaz de razonar utilizando AM5 y también es capaz de descomponer esa acción mental para razonar a través de niveles que van de AM1 a AM4. Es capaz de coordinar imágenes de la razón continuamente cambiante con imágenes de los cambios continuos en la variable independiente y es capaz de describir la naturaleza cambiante de un evento dinámico en términos de los niveles AM3 y AM4 (nota: el nivel AM3 incluye a los niveles AM1 y AM2). Esa imagen de covariación (i.e., razonamiento N5) sustenta comportamientos que demuestran que el estudiante comprende que la razón de cambio instantánea es resultado de refinamientos más y más pequeños de la razón de cambio promedio y que un punto de inflexión es aquel en el que la razón de cambio pasa de ser creciente a decreciente o lo contrario.

En algunos estudiantes se observaron comportamientos que daban la impresión de que estuvieran comprometidos en una acción mental específica; sin embargo, cuando se pusieron a prueba dichos comportamientos, estos estudiantes no proporcionaron evidencia de que tuvieran una comprensión que sustentara tal comportamiento. Nos referimos a ese comportamiento como un comportamiento pseudo-analítico (i.e., la comprensión subyacente necesaria para desempeñar el comportamiento específico de manera significativa no está presente [Vinner, 1997]), y describimos la acción mental que produjo el comportamiento como una acción mental pseudo-analítica. (Recuérdese que, de acuerdo con Vinner [1997], el comportamiento pseudo-analítico es producido por procesos de pensamiento pseudo-analíticos). También volvemos a enfatizar que un estudiante clasifica para un nivel específico de habilidad de razonamiento covariacional (por ejemplo, N5) sólo si es capaz de realizar la acción mental asociada con ese nivel (AM5) y todas las acciones mentales de los niveles inferiores (desde AM1 hasta AM4). En otras palabras, es posible que un estudiantes se muestre como del nivel AM5 sin aplicar un razonamiento covariacional del nivel N5; describiremos más adelante en este artículo un ejemplo de ello.

El marco conceptual de covariación propuesto proporciona una herramienta analítica con la cual evaluar el pensamiento covariacional en un grado más fino de lo que ha sido posible en el pasado. Además proporciona una estructura y un lenguaje para clasificar el pensamiento covariacional en el contexto de la respuesta de un estudiante a un problema específico, y para describir las habilidades generales de razonamiento covariacional de un estudiante (i.e., nivel evolutivo en el marco conceptual).

El razonamiento covariacional en un contexto gráfico

Las habilidades de razonamiento covariacional de los estudiantes son importantes para interpretar y representar información gráfica de funciones. Puesto que estas actividades relacionadas con gráficas se han dado en el contexto en el que inicialmente observamos las dificultades de los estudiantes, éstas han sido el foco de gran parte del contexto de nuestro trabajo. Una mirada cercana al razonamiento covariacional de los estudiantes en el contexto de una gráfica revela que los estudiantes que mostraron comportamientos sustentados por AM1 reconocían típicamente que el valor de la coordenada y cambia con los cambios en el valor de la coordenada x. Como es habitual, la coordenada x juega el papel de variable independiente, aunque hemos observado estudiantes que tratan a la coordenada y como variable independiente. Esta coordinación inicial de las variables se revela usualmente en la manera como un estudiante designa a los ejes coordenados de la gráfica, seguida por declaraciones que demuestran el reconocimiento de que cuando una variable cambia, la otra también. La atención a la dirección del cambio (en el caso de una función creciente) implica la formación de una imagen en la que los valores de y son más altos cuando la gráfica se recorre de izquierda a derecha (AM2, Tabla Nº 1). En nuestra experiencia, el comportamiento común que los estudiantes han mostrado en este nivel ha sido la construcción de una recta que asciende cuando uno se mueve hacia la derecha sobre la gráfica o declaraciones que sugieren una comprensión de la dirección del cambio en la variable de salida mientras consideran incrementos en la variable de entrada (e.g., cuando se agrega más agua, la altura aumenta). AM3 implica la coordinación de magnitudes relativas de cambio en las variables x y y. En este contexto, los estudiantes han observado la partición del eje x en intervalos de longitudes fijas (e.g., x_1, x_2, x_3, x_4) a la vez que consideran la cantidad de cambio en el valor de salida para cada nuevo intervalo del valor de entrada. Este comportamiento comúnmente ha estado sucedido por la construcción que el estudiante hace de puntos de la gráfica (el estudiante considera que los puntos representan cantidades de cambio de los valores de salida mientras tiene en cuenta cantidades iguales del valor de entrada), y a este comportamiento le sigue el de la construcción de rectas que conectan estos puntos. La actividad en el nivel de razón implica el reconocimiento de que la cantidad de cambio de la variable de salida con respecto a un incremento uniforme de la variable de entrada expresa la razón de cambio de la función para un intervalo del dominio. Este reconocimiento se revela mediante el trazado que el estudiante hace de rectas secantes en una gráfica o mediante la realización de cálculo mental o estimativo de la pendiente de una gráfica sobre pequeños intervalos del dominio (el trazado de estas líneas podría provenir de la imaginación del estudiante y del ajuste de pendientes para diferentes intervalos del dominio). Debe observarse que las acciones mentales identificadas como AM3 y AM4 pueden dar como resultado la construcción de rectas secantes; sin embargo, el tipo de razonamiento que produce estas construcciones es diferente (i.e., AM3 se enfoca en la *cantidad* de cambio del valor de salida (altura) mientras se consideran cambios en el valor de entrada; y AM4 se enfoca en la *razón* de cambio, del valor de salida con respecto al valor de entrada, para incrementos uniformes del valor de entrada). Se revela la atención a la *razón instantánea* continuamente cambiante (AM5) por la construcción de una curva precisa y se incluye una comprensión de la naturaleza cambiante de la razón de cambio instantánea para todo el dominio. Debe observarse que un estudiante puede realizar AM5 sin demostrar una comprensión de que la razón de cambio instantánea ha resultado de examinar intervalos más y más pequeños del dominio. Sin embargo, la naturaleza evolutiva del marco conceptual indica que solamente los estudiantes que son capaces de descomponer AM5 (construido a partir de AM1 hasta AM4) recibirían una clasificación de razonamiento covariacional N5. Se ha mostrado que esta imagen de N5 sustenta una comprensión de *por qué* una gráfica cóncava hacia arriba expresa dónde crece la razón de cambio y *por qué* el punto de inflexión se relaciona con el punto de la gráfica en el que la razón de cambio pasa de ser creciente a decreciente o al contrario.

Uso del marco conceptual

Esta sección proporciona información basada en una situación dinámica, que se muestra en la Figura Nº 1, a 1a que hemos denominado el "problema

Imagine esta botella llenándose de agua. Haga un bosquejo de la gráfica de la altura como una función de la cantidad de agua que hay en la botella.

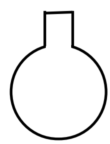

Figura Nº 1. El "problema de la botella"

de la botella", que ilustra comportamientos comunes de razonamiento covariacional que han sido expresados por estudiantes cuando responden a una tarea específica (Carlson, 1998; Carlson y Larsen, en prensa). Las acciones mentales sustentadas por cada imagen de covariación son seguidas por una descripción de los comportamientos específicos que han sido observados en los estudiantes y sus clasificaciones correspondientes al usar el marco conceptual.

El *nivel de coordinación* (N1) sustenta la acción mental de coordinar la altura con los cambios en el volumen (AM1). Se ha identificado AM1 al observar a los estudiantes designar a los ejes y al escucharlos expresar que son conscientes de que a medida que una variable cambia, la otra variable cambia (e.g., cuando el volumen cambia, la altura cambia). Estos estudiantes no necesariamente atienden a la dirección, la cantidad o la razón de cambio.

El *nivel de dirección* (N2) sustenta tanto a AM1 como a la acción mental de coordinar la dirección (aumento) del cambio de la altura mientras se consideran cambios en el volumen (AM2). Se ha identificado AM2 al observar a los estudiantes construir una línea recta creciente o verbalizar que a medida que se aumenta la cantidad de agua, la altura del agua en la botella aumenta.

El *nivel de coordinación cuantitativa* (N3) sustenta a AM1, AM2 y a la acción mental de coordinar la cantidad de cambio de la altura con la cantidad de cambio del volumen mientras se imaginan cambios en el volumen (AM3). Se ha identificado AM3 al observar a los estudiantes poner marcas en la botella (con cada incremento cada vez más pequeño hasta alcanzar la mitad y cada vez más grandes desde la mitad hasta el cuello de la botella). También se ha identificado AM3 al observar a los estudiantes localizar puntos en la gráfica o al escucharles comentarios que expresan su consciencia sobre cómo cambia la altura mientras consideran incrementos en la cantidad de agua.

El *nivel de razón promedio* (N4) sustenta a AM1, AM2, AM3 y a la acción mental de coordinar la razón de cambio promedio de la altura con respecto al volumen para cantidades iguales del volumen (AM4). Se ha identificado AM4 en estudiantes al observarlos construir segmentos de recta contiguos en la gráfica, para cada uno de los cuales se ajusta la pendiente con el fin de indicar la razón (relativa) para la cantidad especificada de agua; o al escucharles comentarios que expresan su consciencia sobre la razón de cambio de la altura con respecto al volumen mientras consideran cantidades iguales de agua. (Nótese que inicialmente se observó a algunos estudiantes construyendo segmentos rectilíneos no contiguos, lo mismo que intercambiando los papeles de las variables independiente (volumen) y dependiente (altura) varias veces cuando se discutió el pensamiento que pusieron en juego para construir la gráfica para esta tarea.)

El *nivel de razón instantánea* (N5) sustenta desde AM1 hasta AM4 y a la acción mental de coordinar la razón de cambio instantánea de la altura (con respecto al volumen) con cambios en el volumen (AM5). Se ha identificado AM5 en los estudiantes al observarlos construir una curva suave que es cóncava hacia abajo, luego cóncava hacia arriba, luego lineal; y al escucharles comentarios que sugieren una comprensión de que la curva suave resultó de considerar la naturaleza cambiante de la razón mientras imaginaban el cambio continuo en el agua. Cabe mencionar que se clasifica a un estudiante en el nivel de razón instantánea sólo si demuestra comprender que la razón instantánea resultó de considerar cantidades de agua más y más pequeñas (construidas sobre el razonamiento exhibido en AM4). La imagen que sustenta el razonamiento N5 debería también sustentar comportamientos que demuestren una comprensión de *por qué* un punto de inflexión indica el punto exacto en el que la razón de cambio de la altura (con respecto al volumen) pasó de ser decreciente a creciente, o al contrario.

El comportamiento observado en algunos estudiantes daba la apariencia de que estaban comprometidos en AM5 (e.g., construcción de una curva suave). Sin embargo, cuando se les pidió proporcionar una justificación para la construcción hecha, ellos indicaron estar basados en hechos memorizados. Clasificamos sus comportamientos como *pseudo-analíticos* y la acción mental que sustentó este comportamiento fue clasificada como *pseudo-analítica* AM5 (Vinner, 1997).

MÉTODO

Participantes

A veinte estudiantes que habían terminado recientemente un curso de cálculo de segundo semestre, con calificación sobresaliente, se les pidió responder cinco ítems que involucraban un análisis de aspectos covariantes de eventos dinámicos (e.g., agua llenando una botella de forma esférica, temperatura cambiando a lo largo de un período, una escalera deslizándose sobre una pared). Estos estudiantes representaban a la mayoría de estudiantes de cinco grupos paralelos del curso, a cargo de diferentes profesores, que habían obtenido calificación sobresaliente. Los materiales del curso usados para la enseñanza fueron los tradicionales y la exposición de parte del profesor fue el principal modo de instrucción. No se permitía el uso de calculadoras ni para las tareas hechas por fuera de clase ni para los exámenes. Se retribuyó económicamente a cada uno de los veinte estudiantes por el tiempo empleado para responder los cinco ítems que configuraron la evaluación. Posteriormente se invitó a seis de estos estudiantes para que participaran en una entrevista clínica de noventa minutos, lo que también se pagó. La selección de los sujetos para la entrevista se basó en la elección de individuos que hubieran proporcionado respuestas diversas para el instrumento escrito.

Procedimientos

Se aplicó el instrumento de los cinco ítems una semana después de que los estudiantes hubieran presentado el examen final. Fue administrado en un ambiente monitoreado sin restricción de tiempo y se pidió a los estudiantes escribir sus respuestas. Se asignó puntaje a las respuestas escritas, usando criterios cuidadosamente desarrollados y probados (Carlson, 1998) y fue determinado el porcentaje de estudiantes que proporcionó cada tipo de respuesta para cada ítem.

Las seis entrevistas se realizaron durante los dos días siguientes al día en que respondieron al instrumento escrito de cinco ítems. Aunque en principio las entrevistas fueron no estructuradas pues en ellas el entrevistador reaccionaba de manera espontánea a la descripción que el estudiante hacía de su solución, las preguntas preparadas para la entrevista impusieron alguna estructura. Durante la entrevista, el investigador inicialmente leyó cada pregunta en voz alta e hizo referencia general a la respuesta escrita del estudiante. Luego se dio al estudiante unos pocos minutos para que revisara su respuesta escrita y se le pidió que describiera y justificara verbalmente su solución. Después de que el estudiante había resumido la respuesta escrita, el investigador formulaba preguntas generales haciendo sugerencias tales como "explique" o "clarifique", y continuaba haciendo preguntas más específicas hasta que el estudiante respondía o parecía haber comunicado todo su conocimiento relevante. Este proceso se repitió para cada ítem.

El análisis de los resultados de la entrevista incluyó una lectura inicial de la transcripción de cada entrevista para determinar la naturaleza general de la respuesta. A esta primera lectura, le siguieron numerosas lecturas cuidadosas de parte de dos de los autores para clasificar los comportamientos y las respuestas de cada estudiante en cada ítem, usando las acciones mentales descritas en el marco conceptual de la covariación. Después de etiquetar las acciones mentales (e.g., AM1, AM2, AM3) asociadas con los varios comportamientos exhibidos para un solo ítem, ambos autores revisaron la respuesta completa para ese ítem con el fin de determinar el nivel de razonamiento covariacional (e.g., N3) que sustentaba a las acciones mentales identificadas que la respuesta ponía en evidencia. Las inconsistencias en la codificación hecha por los dos autores fueron resueltas a través de la discusión y la etiqueta final asignada representa el acuerdo entre los dos codificadores. Antes de una discusión sobre las respuestas de los estudiantes a tres de las cinco tareas de razonamiento covariacional, se presentan ilustraciones de datos cuantitativos seleccionados y extractos de entrevistas codificadas.

RESULTADOS

El “problema de la botella”

El “problema de la botella” (véase Figura Nº 1) incitaba a los estudiantes a construir una gráfica de una situación dinámica para la cual la razón cambia continuamente y además presenta una instancia en la que la razón pasa de ser decreciente a ser creciente (i.e., un punto de inflexión). La Tabla Nº 3 muestra los tipos de respuesta que los veinte estudiantes dieron en la evaluación escrita. Sólo cinco (25%) de estos estudiantes dieron una solución aceptable, mientras que catorce (70%) construyeron una gráfica creciente que era estrictamente cóncava hacia arriba o hacia abajo.

Tipos de respuesta	Número de estudiantes
Construyeron un segmento de recta con pendiente positiva	1
Construyeron una gráfica creciente, cóncava hacia arriba	11
Construyeron una gráfica creciente, cóncava hacia abajo	3
Gráfica aceptable, excepto por la pendiente del segmento	3
Todos los aspectos de la gráfica fueron aceptables	2

Tabla Nº 3. Resultados cuantitativos del “problema de la botella”

Cuando se les animó, durante la entrevista de seguimiento, a describir la forma de la gráfica, los seis estudiantes entrevistados dieron respuestas variadas. En la siguiente sección se describen con más detalles tales respuestas, pero aquí resumimos algunos puntos importantes. Sólo dos de los sujetos entrevistados —Estudiante A y Estudiante C— dieron una respuesta que sugiriera una imagen de una razón instantánea cambiante de manera continua (AM5) para esta situación. Cuando se les animó a dar la justificación de su gráfica aceptable, la Estudiante A inicialmente manifestó: “Si se considera que se pone la misma cantidad de agua cada vez y se observa cuánto cambia la altura, ésta estaría cambiando más rápidamente y, en la mitad, si se agrega la misma cantidad de agua, la altura no cambiaría tanto como lo haría en la parte inferior” (AM3). Cuando se le pidió explicar por qué construyó una curva suave, respondió: “Supuse que la altura cambiaba mientras se vertía el agua a una razón constante” (AM3). Ella también caracterizó el punto de inflexión como el punto “en el que la razón, a la cual se estaba llenando, pasaba de ser decreciente a ser creciente” (indicio de AM5).

En contraste la Estudiante C, quien también construyó una gráfica aceptable trazando una curva suave sobre los segmentos de recta contiguos que había construido previamente, justificó la construcción diciendo: “Simplemente sé que debe ser suave porque esa suele ser la apariencia de estas gráficas, no la de estos segmentos conectados”. Aunque su construcción inicial de una curva suave fue indicio de AM5 y parecía representar una imagen de una razón continuamente cambiante, la indagación posterior reveló que la respuesta de esta estudiante expresaba solamente una opinión acerca de cómo *debería* verse la gráfica, y no una representación emergente de la manera en que las variables cambiaban. Se clasificó esta respuesta como pseudo-analítica AM5.

Al analizar el pensamiento de los tres estudiantes que proporcionaron una construcción ya fuera cóncava hacia arriba o hacia abajo, advertimos que dos de ellos (Estudiantes B y E), a veces, durante la entrevista construyeron imágenes de cambio de altura a una razón variable (e.g., “a medida que se sube un poquito más, la altura crece y el volumen crece muy poco” [AM3]). Sin embargo, aparecieron inconsistencias en estos razonamientos que se reflejaron en lo incorrecto de la gráfica. El estudiante B justificó la construcción cóncava hacia abajo diciendo: “Cada vez es necesario agregar más y más volumen para obtener mayor altura hacia la mitad de la botella” (AM3). (Obsérvese que esto ilustra una situación en la que el estudiante intercambió los papeles de las variables independiente y dependiente —es decir, consideró la cantidad de cambio del volumen mientras consideraba cambios uniformes en la altura). Posteriormente, este estudiante dejó de pensar acerca de los cambios relativos en el volumen y en la altura para la mitad superior de la botella. El Estudiante F justificó su construcción cóncava hacia arriba diciendo: “A medida que agrego más agua, la altura sube y sube” (indicio de AM2). Aunque parecía que ambos estudiantes tenían imágenes iniciales de altura cambiante a medida que se agregaba agua, en algún punto durante la entrevista parecieron enfocarse en información incorrecta o tuvieron dificultad para representar sus patrones correctos de razonamiento usando una gráfica. El otro estudiante entrevistado, Estudiante D, presentó una recta creciente y enunció confiadamente: “Mientras el volumen aumenta, la altura debería aumentar a una razón constante… debería ser una recta” (AM2). Él parecía observar solamente que la altura crecía mientras se consideraba crecimiento en el volumen (AM2).

Tanto los datos cuantitativos como los cualitativos para el “problema de la botella” respaldan el hallazgo de que muy pocos de estos estudiantes, de alto rendimiento en cálculo, fueron capaces de producir imágenes precisas de razón instantánea continuamente cambiante (AM5) para esta función asociada a un evento dinámico. Los extractos de entrevistas a los estudiantes ilustran este resultado.

La Estudiante A construyó una gráfica aceptable que aparece en la Figura Nº 2. Durante el curso de la entrevista, ella se enfocó inicialmente en la cantidad de cambio de altura a la vez que consideraba incrementos fijos en el volumen (AM3). A estos comentarios siguieron discusiones sobre la pendiente y la razón de cambio para cantidades fijas de agua (AM4). Cuando se le pidió más explicación, ella eventualmente pasó a hacer comentarios que reflejaban su atención hacia la razón continuamente cambiante, al tiempo que imaginaba el llenado de la botella con agua (AM5). Parece que ella comprendía la información expresada por el punto de inflexión y parecía tener una imagen madura de la razón cambiante sobre el dominio de la función. Los comportamientos que exhibió la estudiante al responder a esta tarea, sugieren una habilidad en razonamiento covariacional de razón instantánea (N5).

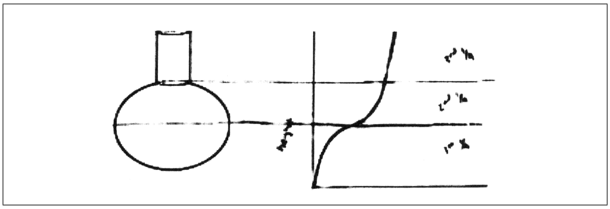

Figura Nº 2. Respuesta escrita de la Estudiante A

Entrev:	Describa cómo dibujó la gráfica. [*Nota: la gráfica final es aceptable*.]
A:	Supe que cambiaba de manera diferente para la parte del fondo, debido a que es circular y la parte superior tiene paredes rectas. Si se considera que se pone la misma cantidad de agua cada vez y se observa cuánto cambia la altura, esto es básicamente lo que yo he estado tratando de hacer. Por tanto, para la primera parte, la altura debería cambiar más rápidamente y si se agrega la misma cantidad de agua en la mitad, la altura no cambiaría tanto como lo haría en la parte inferior [AM3]. Es simétrica.
Entrev:	¿Cómo afecta eso a la gráfica?
A:	Mayor pendiente al comienzo, luego se nivela, después, otra vez, a una pendiente mayor [AM4]. A continuación, para la parte del cuello, es básicamente una recta porque se está llenando la misma área con cada cantidad [AM3].
Entrev:	¿Puede decir lo que pasó en este punto [*señalando el punto de inflexión*]?
A:	Ahí es donde está el punto de simetría. Creo que es también donde la segunda derivada es igual a cero, que es donde la razón a la que se estaba llenando pasa de decreciente a creciente [AM5].
Entrev:	¿Por qué trazó una curva suave a través de las líneas?

A:	Bueno, yo supuse que la pendiente cambiaba mientras se vertía el agua a una razón constante [AM5].
Entrev:	¿Tiene algo más que agregar? ¿Cuál es la pendiente de la recta?
A:	Más o menos como la de esta curva [señalando a la unión de la curva y la recta].

El Estudiante B construyó una gráfica cóncava hacia abajo para todo el dominio de la función. Durante la entrevista se enfocó inicialmente en la dirección del cambio de la altura como lo revela el siguiente comentario “mientras más agua, mayor es la altura” (AM2). Un requerimiento posterior reveló que él era conceptualmente capaz de coordinar cambios en la altura con cambios en la cantidad de agua (i.e., “a medida que se sube un poquito más, la altura crece y el volumen crece muy poco” [AM3]). El enunciado “se tiene que poner más y más volumen para obtener mayor altura hacia la mitad de la botella” es también indicativo de AM3. Sus comportamientos expresados sugieren una habilidad de razonamiento covariacional (N3) de coordinación cuantitativa para esta tarea. Su construcción cóncava hacia abajo pareció ser el resultado de la falta de continuar coordinando cambios en la altura con cambios en la cantidad de agua.

Entrev: Explique su solución. [*Nota: el estudiante ha presentado una gráfica cóncava hacia abajo para todo el dominio*.]

B: Este es mi problema menos favorito. Traté de resolverlo para la altura en términos del volumen y fue un lío.

Entrev: ¿Puede analizar la situación sin resolver explícitamente para *h*?

B: Bien, a más agua, mayor altura [AM2]. En términos de altura del agua, es de lo que estamos hablando. Si usted se refiere a la altura que quedó, ella es básicamente decreciente. Allí la altura será cero y el volumen es cero. Mientras se avanza hacia arriba, la altura crece un poquito y el volumen crece muy poco [AM3], de modo que la cantidad en que aumenta la altura no va tan rápido [AM3]. Una vez que se llega allí [*señala hacia la mitad superior de la parte esférica*], la altura aumenta más despacio todavía [AM3]. Supongo que de aquí a allí, la altura crece lo mismo que el volumen y una vez aquí, crece más despacio [AM3]. No, estoy errado. Cada vez que se agrega más y más volumen, para obtener mayor altura hacia la mitad de la botella y, una vez que se llega aquí, sería lineal, probablemente [*señala la parte superior de la porción esférica*]. Así que siempre está subiendo [*traza con el dedo a lo largo de la parte superior de la porción esférica*]. Así que siempre está subiendo [*traza con el dedo a lo largo de la gráfica cóncava hacia abajo*], entonces sería una recta.

Entrev: Entonces, ¿cómo queda la gráfica?

B: Como esta [*señala la gráfica cóncava hacia abajo que ha construido*], pero tiene una línea recta al final.

La Estudiante C produjo una gráfica con unos errores menores. Su justificación inicial de que “se va a estar llenando rápidamente, por eso va a tener mayor pendiente” se enfocó en la pendiente relativa para una sección de la gráfica. De inmediato agregó a tal afirmación la justificación “A medida que se incremente el volumen, va a tenerse menor altura” (AM3), y su justificación final fue el establecimiento de reglas aprendidas en cálculo. Sus respuestas sugirieron que aunque era capaz de asociar una pendiente mayor con el llenado rápido de la botella y parecía a veces estar imaginando la razón instantánea cambiando continuamente (AM5) no parecía comprender cómo se obtenían las razones instantáneas (i.e., no era capaz de descomponer a AM5). Ni siquiera al responder a la indagación directa pudo ella explicar qué expresaba el punto de inflexión. Como resultado, la clasificación que se hizo de ella no la ubicó en la clase de quienes tienen habilidad de razonamiento covariacional N5. Cuando respondió a esta tarea, la Estudiante C parecía usar de manera predominante el razonamiento N3, junto con reglas aprendidas y memorizadas en cálculo. Esta combinación de habilidades parecía ser adecuada para la construcción de una gráfica aceptable.

Entrev: Explique cómo obtuvo su gráfica. [*Nota: la gráfica final es aceptable.*]

C: De alguna manera, supe que fue llenada a una razón cúbica, por tanto debía tener como una ecuación cúbica. Cuando se toma la inversa de esa ecuación, pasa rápidamente a esto. Pero aquí también pude ver que cuando se comenzaba, se iba a llenar rápidamente por lo que se iba a tener una mayor pendiente [AM5 *—la estudiante parece saber que “rápidamente” y “más empinado” están conectados pero no demuestra una comprensión de cómo fue obtenida la razón instantánea. Muestra alguna confusión y prosigue*]. Pero a medida que incremente el volumen, se va a obtener menor cambio de altura hasta que llegue aquí [AM3]. En cuanto pase el punto medio, va a pasar de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba y se va a tener un punto de inflexión. Para esta parte del cilindro, sé que va a ser lineal, pues para el cilindro está relacionado por el volumen, que es igual al área por la altura. Y por tanto se tiene el área como constante. Así que lo que se tiene es una ecuación lineal para la altura y está relacionada con el volumen.

Entrev: Explique cómo obtuvo su gráfica. [*Nota: la gráfica final es aceptable.*]

Entrev: ¿Puede decirme por qué dibujó la curva suave a través de los segmentos de recta que había construido?

C: Pues [*pausa larga*] … Lo que sé es que debe ser suave porque esa es la apariencia que siempre tienen estas gráficas, no la de estos segmentos conectados [AM5 pseudo-analítico].

Entrev: ¿Puede decirme por qué cambió la concavidad ahí [*señala el punto de inflexión*]?

C: Porque si se saca la segunda derivada de este volumen en términos de la altura, se obtiene cero. En este lado tiene una aceleración negativa. Pero una vez que alcanza el punto medio, entonces comienza a tener una segunda derivada positiva.

Como solución, el Estudiante D construyó una línea recta creciente. Durante la entrevista, él pareció coordinar solamente la dirección del cambio en la altura mientras consideraba cambios en el volumen (AM2). Los comportamientos exhibidos por este estudiante al responder a esta tarea fueron indicios del nivel de dirección (N2) en la habilidad de razonamiento covariacional.

Entrev: ¿Puede explicar su solución? [*Nota: la solución del estudiante es una línea recta creciente.*]

D: Traté de resolverlo para *h*. Pero pienso que tengo que definirla como una función segmentada, Quizás así pueda imaginarlo.

Entrev: ¿Trató de hacerse una idea de la forma general de la gráfica imaginando la botella llenándose de agua?

D: A medida que el volumen aumenta, la altura debe ir aumentando a una razón constante [AM1, AM2].

Entrev: ¿Cómo representa eso gráficamente?

D: Eso debe ser una línea recta [*pasa su mano sobre la línea recta creciente*].

Entrev: Así que la gráfica completa es una línea recta.

D: Sí.

El Estudiante E dio como solución escrita una gráfica cóncava hacia arriba. Cuando se le pidió explicar su respuesta, él dijo que “a medida que se agregaba más agua, la altura subía” (AM2). Luego procedió a explicar su gráfica cóncava hacia arriba con el siguiente enunciado: “La cantidad mediante la cual la altura aumenta, está creciendo” (AM3). Sin embargo, su información factual era defectuosa (la cantidad de cambio en la altura estaba decreciendo). Puesto que no exhibió de manera consistente comportamientos sustentados por AM3, se le clasificó como de una habilidad de razonamiento covariacional N2.

Entrev: ¿Puede describir cómo determinó su gráfica? [*Nota: el estudiante ha presentado una gráfica cóncava hacia arriba*.]

E: Pues, sabía que a medida que se agregara más agua, la altura iba a subir [AM2] … hum… Entonces yo sabía que debía curvarse hacia arriba porque la gráfica está llegando más arriba todo el tiempo ya que la altura es siempre creciente [AM3]. Por tanto es cóncava hacia arriba [*señala la gráfica cóncava hacia arriba*].

Entrev: ¿Qué esta creciendo?

E: La cantidad mediante la cual aumenta la altura es creciente [AM3]. Esto significa que se curvará hacia arriba así.

Entrev: ¿Cómo explica la apariencia de la forma aquí [*señala la mitad de la botella*]?

E: Aquí sigue siendo verdad que a medida que se agrega agua, se incrementará en altura, luego aquí también se curvará hacia arriba [AM2].

El Estudiante F también construyó una gráfica cóncava hacia arriba y pareció enfocarse de manera consistente en la cantidad de cambio de la altura mientras consideraba cambios en el volumen (AM3), como lo revela su justificación: “A medida que agrego agua continúa haciéndose más y más alto”. En un punto durante la entrevista, él indicó que “la altura sube más y más” (AM3). Sin embargo, no persistió suficientemente para resolver lo incorrecto de este enunciado (cuando imaginaba que el agua se estaba agregando a la mitad inferior de la botella); ni tampoco prosiguió con la resolución de la inconsistencia que advirtió en la entrevista (véase el siguiente extracto). No mostró un patrón de comportamientos consistente sustentado por AM3. En consecuencia, los comportamientos exhibidos por este estudiante cuando respondió a esta tarea fueron indicios de una habilidad de razonamiento covariacional N2.

Entrev: ¿Puede explicar cómo determinó su gráfica? [*Nota: el estudiante había proporcionado una gráfica cóncava hacia arriba*.]

F: Cuando se da un matraz como este, de la manera como creo que fue, hay que comenzar con las coordenadas (0, 0), con volumen igual a cero y altura igual a cero. Cuando se comienza a llenar algo que tiene una base tan ancha como esta, la altura va a crecer tan rápido como el volumen [AM1, AM2]. Entonces, a medida que se agrega agua, se obtiene más y más altura, de modo que la gráfica sube más y más [AM3; *señala la gráfica cóncava hacia arriba*].

Entrev: ¿Qué pasa en la mitad de la porción esférica?

F: Ahora estoy confundido. ¿Continuará aumentando más y más la altura? [*Hace una pausa*]. Pues sí, cuando miro la parte que está por encima de la mitad, al agregar más agua aumenta más y más la altura, de modo que sí, se curva hacia arriba como esto [AM3; *otra vez señala la gráfica cóncava hacia arriba*].

El "problema de la temperatura"

La tarea que se muestra en la Figura Nº 3 presenta a los estudiantes la gráfica de la función razón de cambio y les pide construir la correspondiente gráfica de la temperatura. Este problema requirió de los estudiantes inter-

Dada la gráfica de la razón de cambio de la temperatura en un período de ocho horas, haga un bosquejo de la gráfica de la temperatura en un período de ocho horas. Suponga que la temperatura en $t = 0$ es 0 grados Celsius.

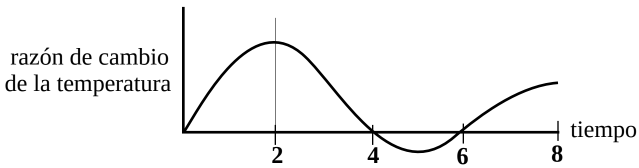

Figura Nº 3. El "problema de la temperatura"

pretar directamente información de la razón plasmada en forma de gráfica y usar la información para hacer la gráfica de la función original basada en la temperatura. Como se muestra en la Tabla Nº 4, cuatro (20%) de los estu-

Tipos de respuesta	Número de estudiantes
Construyeron una gráfica estrictamente cóncava hacia arriba para todo el dominio	1
Construyeron la misma gráfica que para la temperatura	5
Omitieron los cambios de concavidad en $t = 2$ y $t = 5$	6
Invirtieron la concavidad	4
Todos los aspectos de la gráfica fueron aceptables	4

Tabla Nº 4. Resultados cuantitativos del "problema de la temperatura" diantes que participaron en este estudio construyeron una gráfica aceptable de la temperatura, dada la razón de cambio de la temperatura para un período de ocho horas; cinco (25%) de los estudiantes produjeron para la temperatura la misma gráfica que fue dada para la razón de cambio. También encontramos que seis (30%) no percibieron los cambios de concavidad cuando construyeron sus gráficas. Los seis estudiantes que omitieron los cambios de concavidad proporcionaron una gráfica cóncava hacia abajo desde $t = 0$ hasta $t = 6$, con un valor máximo en $t = 2$.

Con respecto a los cuatro estudiantes que dieron una respuesta aceptable, como la del Estudiante C que se muestra en la Figura Nº 4, las entrevistas de seguimiento revelaron que hubo poca evidencia de que estuvieran interpretando la información de la razón plasmada en la gráfica. Cuando se pidió a la Estudiante C que justificara su respuesta aceptable, ella respondió: "La primera derivada positiva implica una función creciente, la primera derivada negativa implica una función decreciente", y "La segunda derivada igual a cero ocurre en los puntos de inflexión". Cuando se le pidió que explicara el razonamiento que condujo a estos enunciados, ella indicó que fue así como aprendió la información en clase y no sabía de qué otra manera pensar al respecto (AM5 pseudo-analítico). Es interesante notar que incluso cuando sus respuestas fueron puestas a prueba de manera directa, ella pareció no ser capaz de construir una imagen de la temperatura cambiante mientras imaginara cambios en el tiempo (AM3). La respuesta sugirió que su construcción fue guiada por un conjunto de reglas memorizadas. Sin embargo, esto no es sorprendente si se considera la naturaleza de un curso tradicional de cálculo.

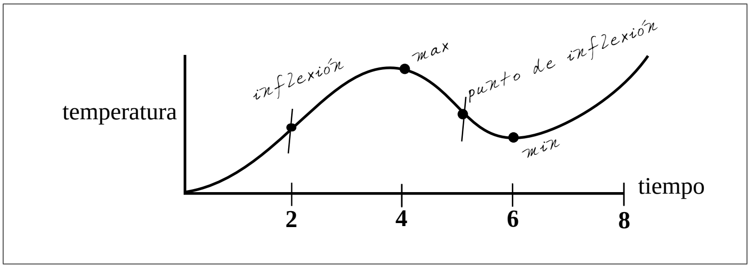

Figura Nº 4. Respuesta de la Estudiante C al "problema de la temperatura"

Más aun, las entrevistas de seguimiento revelaron que la mayoría de estos estudiantes no construyeron una imagen precisa de la razón cambiante (AM4) a medida que consideraban incrementos en el dominio. Los dos estudiantes que construyeron una gráfica creciente de la temperatura (desde $t = 0$ hasta $t = 4$) no parecían comprender lo que se estaba expresando cuando la razón comenzó a decrecer en $t = 2$. Cuando se les pidió explicar, ambos estudiantes indicaron que puesto que la gráfica de la razón era positiva desde $t = 0$ hasta $t = 4$, la gráfica de la temperatura debía ser creciente. Cuando de manera específica se les solicitó explicar el comportamiento de la gráfica de la temperatura en $t = 2$, uno de estos dos estudiantes comentó que "en dos, *y* también es positivo, luego continuará curvándose hacia arriba hasta que sea cuatro". Aunque parecía que estos estudiantes tenían una imagen inicial de la función de la temperatura creciendo a una razón creciente (AM5), su incapacidad de notar y representar el paso de la razón de creciente a decreciente (i.e., el punto de inflexión), como lo muestran la construcción cóncava hacia arriba y las anotaciones, sugiere debilidades en su comprensión.

Otro estudiante que construyó para la gráfica de la temperatura, la misma gráfica dada para la razón de cambio, dijo: "Esto es difícil de pensar… para mí es difícil no tener que dibujar simplemente la forma de la gráfica que veo… realmente me desconcierta". Al parecer, este estudiante no intentó interpretar la información de la razón de cambio plasmada en la gráfica. Más bien, parecía querer reconstruir la misma gráfica que estaba observando.

El "problema de la escalera"

El "problema de la escalera" que se muestra en la Figura Nº 5 es una modificación de un problema reportado en Monk (1992), que incitaba a los estudiantes a seleccionar un medio de representar una situación dinámica (i.e., una escalera deslizándose hacia abajo sobre una pared). Los resultados de las respuestas de los estudiantes a esta tarea se presentan en la Tabla Nº 5. Cuando se pidió describir la velocidad del punto superior de la escalera a medida que la parte inferior de la misma se iba separando de la pared, ocho (40%) de los estudiantes proporcionaron una justificación precisa para la afirmación de que la parte superior de la escalera debía aumentar la velocidad a medida que la parte inferior se separaba de la pared. Otros cinco estudiantes (25%) también indicaron que la parte superior de la escalera debía aumentar la velocidad, pero no justificaron tal afirmación. Adicionalmente, cinco estudiantes expresaron la idea de que la velocidad de la parte superior de la escalera debía ser constante y dos estudiante (10%) indicaron que debería ir más despacio.

> A partir de una posición vertical contra una pared, desde su parte inferior, una escalera se separa de la pared a una razón constante. Describa la velocidad de la parte superior de la escalera a medida que ésta se desliza hacia abajo sobre la pared. Justifique su afirmación.

Figura Nº 5. El "problema de la escalera"

Tipos de respuesta	**Número de alumnos**
Aumenta la velocidad—justificación válida escrita	8
Aumenta la velocidad—sin justificación	5
Permanece la misma	5
Va más despacio	2

Tabla Nº 5. Resultados cuantitativos del "problema de la escalera"

Las justificaciones dadas en el instrumento escrito revelaron que los ocho estudiantes que dieron una respuesta correcta con una justificación válida imaginaron una representación física de la escalera resbalando por la pared. Esta observación estuvo basada en una sucesión de dibujos de la escalera en diferentes posiciones dibujadas por los estudiantes y/o en sus explicaciones escritas. Las entrevistas de seguimiento con dos de estos estudiantes respaldaron esta observación.

Cuando al Estudiante B se le pidió explicar su respuesta correcta, llevó a cabo una representación física de la situación, usando un lápiz y un libro sobre una mesa. A medida que separaba del libro, el extremo inferior del lápiz, en cantidades uniformes, explicaba: "A medida que separo la parte inferior, la cantidad en la que la parte superior se resbala se hace más grande cuando se aproxima a la mesa" (AM3). Sus comentarios sugieren que estaba observando las cantidades variantes para las cuales la parte superior del lápiz se aproximaba a la mesa mientras la parte inferior se separaba en cantidades uniformes. Su explicación parecía involucrar la coordinación de una imagen de la magnitud del cambio en la variable dependiente con cambios uniformes en la variable independiente (AM3). La Estudiante A dio una respuesta similar, excepto que su representación involucró el uso de su mano y un libro para modelar la situación. Ella comenzó presionando su mano plana contra el libro y alejó de manera sucesiva la parte inferior de ésta mientras observaba la cantidad en que la parte superior se desplazaba hacia abajo. Ambos estudiantes parecieron suponer que la mayor caída implicaba mayor velocidad; sin embargo, no se abrieron oportunidades específicas para verificar este supuesto ni tampoco para descubrir el razonamiento detrás de tal deducción.

Dos de los sujetos entrevistados no dieron justificación en el instrumento escrito para explicar sus respuestas correctas. Sin embargo, cuando se les pidió explicar su razonamiento durante la entrevista, el Estudiante E dio una justificación válida que también usó una representación de la situación. El Estudiante D indicó que "simplemente adiviné". No es claro si construyó una imagen de la situación como una base para su adivinanza.

Los otros dos estudiantes entrevistados indicaron que la velocidad de la parte superior de la escalera debería permanecer constante cuando la parte inferior se separara de la pared. Ambos estudiantes dibujaron representaciones de la escalera en posiciones diferentes pero modificaron la longitud de la escalera de manera que las cantidades del descenso permanecieran iguales para cada posición nueva de la escalera. Al pedirles que explicaran su razonamiento, los dos estudiantes dieron respuestas que indicaban su intención de representar la situación, pero su modelo era incorrecto. La estudiante C dibujó una representación de las posiciones sucesivas de la escalera cuando la parte inferior se separaba en cantidades iguales. El dibujo ilustraba descensos iguales de la parte superior de la escalera, una configuración que la estudiante realizó violando una condición del problema y ajustando la longitud de la escalera. Aunque su respuesta era incorrecta parecía comprometerse en un comportamiento que sugiere que estaba tratando de coordinar la cantidad de cambio en la variable dependiente con el cambio en la variable independiente (AM3).

El uso de representación física pareció proporcionar una herramienta representacional poderosa que ayudó a estos estudiantes en el razonamiento sobre el cambio en una variable mientras atendían concurrentemente al cambio en la otra variable. Se requiere una exploración posterior de esta observación.

CONCLUSIONES

Los estudiantes que participaron en este estudio presentaron variaciones en la habilidad para aplicar razonamiento covariacional al analizar eventos dinámicos. Las tendencias observadas sugieren que estos estudiantes de cálculo tuvieron dificultad para construir imágenes de una razón que cambia de manera continua y, en particular, dificultades para representar e interpretar imágenes de una razón decreciente o creciente para una situación física (AM5). A pesar de estas dificultades, la mayoría de los estudiantes fueron capaces de determinar la dirección general del cambio en la variable dependiente con respecto a la variable independiente (N2) y con frecuencia fueron capaces de coordinar imágenes de la cantidad de cambio de la variable de salida mientras consideraban cambios en la variable de entrada (AM3). Sin embargo, observamos debilidades en su capacidad para interpretar y representar información de la razón de cambio (AM4; véanse Tabla Nº 3 y Tabla Nº 4). Con la ayuda del uso de una representación kinestésica, sin embargo, estos estudiantes fueron con frecuencia más capaces de observar patrones en la magnitud cambiante de la variable de salida (AM3), lo mismo que patrones en la naturaleza cambiante de la razón instantánea

(AM5). No obstante, pareció persistir su dificultad para ver una razón instantánea imaginando refinamientos más y más pequeños de la razón de cambio promedio. Más importante es que esta limitación (una incapacidad de descomponer a AM5) pareció crearles dificultades para interpretar con precisión y comprender el significado de un punto de inflexión y para explicar por qué una curva es suave. Incluso la indagación directa con los pocos estudiantes que fueron capaces de involucrarse en AM5 reveló que no eran capaces de explicar cómo se obtenía la razón instantánea. Esta debilidad pareció producirles dificultades para asignar significado a sus construcciones e interpretaciones gráficas.

A pesar del hecho de que los sujetos de nuestro estudio fueron estudiantes que habían completado de manera sobresaliente un curso de cálculo de segundo semestre en el que se enfatiza la razón y la razón cambiante, la mayoría no exhibió comportamientos indicadores de AM5 mientras analizaban y representaban funciones asociadas a eventos dinámicos. Parecían tener dificultades para caracterizar la naturaleza del cambio mientras imaginaban a la variable independiente cambiando de manera continua. En resumen, la mayoría de estos estudiantes de cálculo:

- *fueron capaces* de aplicar de manera consistente el razonamiento N3. Exhibieron comportamientos que sugieren que eran capaces de coordinar cambios en la dirección y la cantidad de cambio de la variable dependiente al unísono con un cambio imaginado de la variable independiente (AM1, AM2 y AM3);
- *no fueron capaces* de aplicar de manera consistente el razonamiento N4. Exhibieron comportamientos que sugieren que no eran capaces de coordinar consistentemente cambios en la razón de cambio promedio con cambios fijos en la variable independiente para el dominio de una función (AM1 a AM4);
- *tuvieron dificultad* para aplicar el razonamiento N5. No eran capaces de manera consistente de exhibir comportamientos que dieran indicios de que pudieran coordinar la razón de cambio instantánea con cambios continuos en la variable independiente (AM5);
- *tuvieron dificultad* para explicar por qué una curva es suave y qué se representa con un punto de inflexión en una gráfica (i.e., al aplicar el razonamiento covariacional N5).

Nuestros resultados respaldan los trabajos de Confrey y Smith (1995) y Thompson (1994a) que revelaron hallazgos similares al considerar la complejidad del razonamiento sobre relaciones de covariación; sin embargo, nuestro estudio extiende lo reportado previamente al identificar aspectos específicos del razonamiento covariacional que parecen ser problemáticos para estudiantes universitarios. También esperamos que los resultados del estudio y el marco conceptual para la covariación sirvan para explicar las acciones cognitivas implicadas en el razonamiento de los estudiantes cuando interpretan y representan funciones asociadas a eventos dinámicos.

DISCUSIÓN

La investigación ha revelado que la idea básica de covariación es accesible a los niños de los niveles elemental y medio (Confrey y Smith, 1994; Thompson, 1994c). Entonces parece razonable pensar que esta misma idea debiera ser accesible a estudiantes de desempeño sobresaliente en un curso de cálculo de segundo semestre. Por tanto, los resultados de este estudio despiertan preocupaciones, en especial, cuando consideramos que las tareas seleccionadas pueden ser realizadas de manera exitosa por estudiantes que no tienen conocimiento de cálculo pero sí una habilidad de razonamiento covariacional bien desarrollada (Carlson y Larsen, en prensa). Puesto que la información evaluada en este estudio pretende ser fundamental para construir y conectar las ideas principales del cálculo, creemos que estos hallazgos sugieren la necesidad de monitorear el desarrollo de la comprensión de parte de los estudiantes sobre la función y de sus habilidades de razonamiento covariacional antes y durante su estudio del cálculo. Como este estudio y otros lo han revelado, incluso de un curso de cálculo de segundo semestre pueden emerger estudiantes con un destacado desempeño pero con una comprensión superficial de ideas fundamentales para el estudio futuro de las matemáticas y las ciencias. Nuestro fracaso para monitorear estas comprensiones y habilidades de razonamiento presagian consecuencias negativas para los estudiantes.

El pensamiento que se revela en este estudio debe mostrarse útil para informar el diseño y desarrollo de materiales curriculares con el propósito de promover las habilidades de razonamiento covariacional de los estudiantes. Los resultados también subrayan la necesidad de que los estudiantes tengan oportunidades de pensar sobre la naturaleza covariacional de las funciones en eventos dinámicos de la vida real. Recomendamos dar a los estudiantes líneas de indagación que los fuercen a poner a prueba sus reflexiones sobre sus propias comprensiones de los patrones de cambio (que involucran razones de cambio cambiantes). De acuerdo con lo anterior, creemos que los currículos en los niveles secundario y universitario deben tener en cuenta la complejidad de adquirir el razonamiento N5 (razón instantánea) y deben proveer experiencias curriculares que sustenten y promuevan esta habilidad de razonamiento, especialmente cuando se considera su importancia para la comprensión de conceptos principales del cálculo (e.g., límite, derivada, punto de acumulación) y para representar y comprender modelos de funciones asociadas a eventos dinámicos.

El modelo teórico y los resultados de este estudio también pueden ser útiles para los profesores para identificar y promover el desarrollo de las habilidades de razonamiento covariacional de sus estudiantes. Los autores están desarrollando actividades curriculares que respaldan el enfoque covariacional para la enseñanza y han sido administradas tanto a profesores en formación en un curso de métodos como a estudiantes de cálculo de primer semestre en una universidad pública del sureste de los Estados Unidos. El desarrollo de estas actividades curriculares fue guiado por el marco conceptual y las comprensiones ganadas en este estudio. Las observaciones preliminares de estudiantes que trabajan con este currículo han revelado cambios positivos en sus habilidades de razonamiento covariacional. Aunque el currículo se beneficiará de múltiples refinamientos a medida que las respuestas de los estudiantes continúan sugiriendo ideas para mejorarlo, estas observaciones son estimulantes.

El nuevo siglo ofrece a los educadores una plétora de tecnologías que incluyen las calculadoras graficadoras, software geométrico, sistemas computacionales de álgebra, pruebas electrónicas de laboratorio, software especial como MathCars (Kaput, 1994) e implementos físicos diseñados especialmente (e.g., Monk y Nemirovsky, 1994) para estudiar eventos dinámicos en tiempo real. Abundan oportunidades pedagógicas ricas para construir sobre la intuición de los estudiantes y la experiencia con cantidades cambiantes dinámicamente. Fundamentados de manera apropiada junto con una capacitación suficiente para los profesores, estas tecnologías ofrecen valiosas herramientas para que los estudiantes aprendan a aplicar el razonamiento covariacional para analizar e interpretar funciones asociadas a situaciones dinámicas.

INVESTIGACIÓN FUTURA

El trabajo que se desprende de esta investigación tiene como resultado nuestra reflexión sobre la naturaleza de los patrones de razonamiento involucrados al aplicar el razonamiento covariacional. Afirmamos que conceptualmente la coordinación del cambio en una variable con los cambios en la otra variable fijándose en cómo cambia cada variable en relación con la otra, involucra una representación mental de la operación de coordinación sobre dos objetos (estos objetos son diferentes dependiendo de la acción mental en el marco conceptual). Esta observación nos conduce a la hipótesis de que las acciones mentales involucradas al aplicar el razonamiento covariacional son características del *razonamiento transformacional* tal como lo describe Simon (1996, p. 201):

> El razonamiento transformacional es la representación mental de una operación o conjunto de operaciones sobre un objeto o conjunto de objetos que le permite a uno imaginar las transformaciones que tales objetos experimentan y el conjunto de resultados de estas operaciones. Lo central en el razonamiento transformacional es la habilidad para considerar no una situación estática sino un proceso dinámico por medio del cual se genera un nuevo estado o un continuo de estados.

Consideramos las acciones mentales que hemos descrito en el marco conceptual de la covariación como ejemplos de imágenes reproductivas de transformación (i.e., el resolutor del problema es capaz de visualizar la transformación resultante al aplicar un operador). En nuestro caso, el estudiante visualiza la transformación de una situación dinámica como resultado de la operación de coordinar. Cuando se compromete en AM3, el estudiante es capaz de visualizar la transformación de una situación dinámica (e.g., una escalera que se desliza hacia abajo sobre una pared, una botella que se llena con agua) realizando una representación mental de la coordinación de dos objetos (la cantidad de cambio en una variable con la cantidad de cambio en la otra); mientras que AM5 involucra una representación mental de coordinar la razón de cambio instantánea en una variable con los cambios en la otra variable. En ambos casos, la representación mental de los objetos da como resultado una transformación del sistema (e.g., la escalera se imagina en una posición diferente, la botella se imagina con un contenido mayor de agua).

Aunque afirmamos que hemos observado instancias de razonamiento transformacional no damos información sobre el proceso de llegar a generar un enfoque transformacional particular. Coincidimos con Simon (1996) en solicitar exploraciones de este asunto ya que nuestros resultados solamente respaldan la noción de que una aplicación apropiada del razonamiento transformacional puede ser extremadamente poderosa para efectos de la comprensión y la validación de un sistema matemático.

Nuestra investigación solicita también una extensión del marco conceptual de covariación de modo que incluya un mayor nivel de refinamiento epistemológico para la comprensión de las cantidades covariantes. Tal marco conceptual puede incluir aspectos de desarrollo conceptual en cuanto se relacione con habilidades de razonamiento covariacional. Puede incluir también un análisis más fino de razonamiento N5 (razón instantánea). Además, se podría extender a la articulación de la naturaleza del razonamiento covariacional más claramente en el contexto del trabajo con fórmulas o con la forma algebraica de una función.

Nuestra investigación invita al estudio futuro de algunas cuestiones específicas sobre la importancia de la continuidad y la variable implícita de tiempo en el razonamiento covariacional. Nuestra discusión e instrumentos tienen que ver con relaciones físicas que son inherentemente continuas. No es claro hasta dónde se extiende la aplicación del marco conceptual al estudio que los alumnos hacen de funciones discontinuas asociadas a eventos dinámicos. Además, nuestra experiencia sugiere que los estudiantes tienen una tendencia poderosa a considerar el tiempo como una variable hasta el punto de introducirlo en situaciones como la del "problema de la botella" en donde no es estrictamente necesario (o requerido). La investigación futura puede hacer claridad sobre el papel de la variable implícita en el desarrollo del razonamiento covariacional del estudiante.

Otra área promisoria de investigación incluye las indagaciones sobre la efectividad de varias intervenciones curriculares en el desarrollo de la habilidad del estudiante para aplicar el razonamiento covariacional al resolver problemas que involucran situaciones dinámicas del mundo real. Tales estudios pueden proporcionar también información sobre el efecto que puede tener un enfoque covariacional para aprender funciones sobre el desarrollo de la comprensión del estudiante acerca del concepto de función en general.

Hemos dado ejemplos de estudiantes que parecían ser capaces de aplicar el razonamiento covariacional al "problema de la botella" y al de la escalera en un contexto cinéstesico pero no eran capaces de usar los mismos patrones de razonamiento cuando trataban de construir una gráfica (i.e., razonar en el contexto gráfico representacional) para estas situaciones. Estos ejemplos son importantes porque sugieren que el marco conceptual de la covariación se puede usar para inferir información no solamente acerca del nivel de desarrollo de las imágenes de covariación del estudiante sino también sobre la estructura interna de estas imágenes. Si suponemos que la imagen global que un estudiante tiene de covariación de una situación dinámica contiene imágenes específicas relacionadas con cada representación relevante del sistema, estamos en posibilidad de usar el marco conceptual para analizar la manera en que estas imágenes se conectan y coordinan.

AGRADECIMIENTO

Extendemos nuestro agradecimiento a Dick Stanley y a Uri Treisman por sus numerosas discusiones alrededor de la naturaleza del pensamiento covariacional y a Mike Oehrtman por proporcionar valiosa realimentación al revisar este documento. Esta investigación fue apoyada por la subvención 9876127 de la *National Science Foundation* (NSF). Las opiniones expresadas en este artículo son las de los autores y no reflejan necesariamente los puntos de vista de NSF.

REFERENCIAS

Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J. y Nichols, D. (1992). Development of the process conception of function. *Educational Studies in Mathematics, 23*, 247-285.

Carlson, M. (1998). A cross-sectional investigation of the development of the function concept. En E. Dubinsky, A.H. Schoenfeld y J.J. Kaput (Eds.), *Research in collegiate mathematics education, 111. Issues in Mathematics Education, 7,* 115-162.

Carlson, M. y Larsen, S. (en prensa). Integrating models and modeling perspective with existing research and practice. En R. Lesh y H. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism in mathematics teaching and learning: A models and modeling perspective.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Carlson, M., Larsen, S. y Jacobs, S. (2001). An investigation of covariational reasoning and its role in learning the concepts of limit and accumulation. En R. Speiser, C. Maher y C. Walter (Eds.), *Proceedings of the 23rd Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 145-153). Snowbird, UT: PME-NA.

College Entrance Examination Board (1959). *Report of the Commission on Mathematics: Program for College Preparatory Mathematics.* New York: CEEB.

Cooney, T. y Wilson, M. (1993). Teachers' thinking about functions: Historical and research perspectives. En T.A. Romberg, E. Fennema y T.P. Carpenter (Eds.), *Integrating research on the graphical representation of functions* (pp. 131-158). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Confrey, J. y Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. *Educational Studies in Mathematics, 26,* 135-164.

Confrey, J. y Smith, E. *(1995).* Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Education, 26,* 66-86.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K. y Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process schema. *Journal of Mathematical Behavior, 15,* 167-192.

Hamley, H.R. (1934). *Relational and functional thinking in mathematics.* Ninth Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics. New York: Bureau of Publications, Teachers College, Columbia University.

Kaput, J.J. (1992). Patterns in students' formalization of quantitative patterns. En G. Harel y E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (MAA Notes, vol. 25, pp. 290-318). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Kaput, J.J. (1994). Democratizing access to calculus: New routes to old roots. En A.H. Schoenfeld (Ed.), *Mathematics and cognitive science* (pp. 77-156). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Klein, F. (1883). Uber den allgemeinen Functionbegriff und dessen Darstellung durch eine willknerliche Curve. *Mathematischen Annalen, 22,* 249.

Monk, S. (1992). Students' understanding of a function given by a physical model. En G. Harel y E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (MAA Notes, vol. 25, pp. 175-193). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Monk, S. y Nemirovsky, R. (1994). The case of Dan: Student construction of a functional situation through visual attributes. *CBMS Issues in Mathematics Education, 4,* 139-168.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: NCTM.

National Research Council (1996). *National Science Education Standards.* Washington, DC: National Academy Press.

Nemirovsky, R. (1996). A functional approach to algebra: Two issues that emerge. En N. Dedrarg, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 295-3 13). Boston: Kluwer Academic Publishers.

Piaget, J. (1970). Piaget's theory (traducido por G. Cellerier y J. Langer). En P. Mussen (Ed.), *Carmichael's manual of child psychology* (tercera edición, vol. 1, pp. 703-732). New York: Wiley.

Piaget, J., Grize, J.-B., Szeminska, A. y Bang, V. (1977). *Epistemology and psychology of functions* (traducido por J. Castellanos y V. Anderson, pp. 84-97). Dordrecht, The Netherlands: Reidel.

Rasmussen, C. (2000). New directions in differential equations: A framework for interpreting students' understandings and difficulties. *Journal of Mathematical Behavior,* 20, 55-87.

Saldanha, L. y Thompson, P.W. (1998). Re-thinking co-variation from a quantitative perspective: Simultaneous continuous variation. En S.B. Berensen, K.R. Dawkins, M. Blanton, W.N. Coulombe, J. Kolb, K. Norwood y L. Stiff (Eds.), *Proceedings of the 20th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 298-303). Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification—The case of function. En G. Harel y E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (MAA Notes, vol. 25, pp. 59-84). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. En G. Harel y E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (MAA Notes, vol. 25, pp. 59-84). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Simon, M.A. (1996). Beyond inductive and deductive reasoning: The search for a sense of knowing. *Educational Studies in Matitematics, 30,*197-210.

Tall, D. (1992). The transition to advanced mathematical thinking: Function, limits, infinity, and proof. En D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 495-511). New York: MacMillan Publishing Company.

Thompson, P.W. (1994a). Images of rate and operational understanding of the fundamental theorem of calculus. *Educational Studies in Mathematics, 26,* 229-274.

Thompson, P.W. (1994b). Students, functions, and the undergraduate curriculum. En E. Dubinsky, A.H. Schoenfeld y J.J. Kaput (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education, 1: Issues in Mathematics Education,* (vol. 4, pp. 21-44). Providence, RI: American Mathematical Society.

Thompson, P.W. (1994.c). The development of the concept of speed and its relationship to concepts of rate. En G. Harel y J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 179-234). Albany, NY: State University of New York Press.

Thorpe, J.A. (1989). Algebra: What should we teach and how should we teach it? En S. Wagner y C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (pp. 11-24). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Vinner, S. (1997). The pseudo-conceptual and the pseudo-analytical thought processes in mathematics learning. *Educational Studies in Mathematics, 34,* 97-129.

Vinner, S. y Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education, 20,* 356-366.

Zandieh, M. (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivative. En E. Dubinsky, A.H. Schoenfeld y J.J. Kaput (Eds.), *Research in collegiate mathematics education, IV* (vol. 8, pp. 103-127). Providence, RI: American Mathematical Society.

Marilyn Carlson
Edward Coe
Sean Larsen
Arizona State University
Tempe, USA
marilyn.carlson@asu.edu
coe@asu.edu
larsen@math.la.asu.edu

Sally Jacobs
Scottsdale Community College
Scottsdale, USA
sally.jacobs@sccmail.maricopa.edu

Eric Hsu
San Francisco State University
San Francisco, USA
erichsu@math.sfsu.edu