REVISTA EMA
2003, VOL. 8, Nº 2, 157-182

LA ENSEÑANZA DE LOS NÚMEROS RACIONALES A PARTIR DE LA RELACIÓN PARTE-TODO

GILBERTO OBANDO

Se presentan aquí algunos aspectos relativos al desarrollo del trabajo de grado titulado: "La enseñanza de los números racionales a partir de la relación parte-todo", en el marco de la Maestría en Educación Matemática de la Universidad del Valle. Esta investigación giró alrededor de los procesos de enseñanza y los procesos de aprendizaje relativos a los números racionales, centrando la atención en aquellos que conciernen a las relaciones parte-todo. A través de este trabajo se detectó que la forma actual como se orientan tales procesos en la escuela, es fuente de conceptualizaciones erróneas por parte de los estudiantes. Sobre la base de este análisis y apoyada en metodologías propias de la Didáctica de las Matemáticas se desarrolló una propuesta de trabajo mediante la cual se pudieran desencadenar procesos de aprendizaje más significativos en los alumnos.

We present here some aspects related to a degree work called "Teaching rational numbers based on whole part relationship", in the context of a Mathematics Education Master of Universidad del Valle, Colombia. This research moves around rational numbers teaching and learning processes, with focus in whole part relationship. Through this work we were able to detect that the current way for conducting these processes in school is source of students misconceptions. Based on this analysis and on methodologies of Didactics of Mathematics, we developed a working proposal that allow to generate more significant learning processes for students.

Palabras claves: números racionales, fracciones, relación parte–todo, educación básica.

INTRODUCCIÓN

En la actualidad se hace necesario que los currículos y las prácticas educativas se centren en procurar una actividad matemática del alumno que le permita desarrollar autonomía intelectual frente a sus procesos de aprendizaje. Esta necesidad es consecuente con los cambios que se han dado en las concepciones sobre las matemáticas, la enseñanza y el aprendizaje de las mismas. Lograr este fin es algo que trasciende ampliamente la mera selección de los contenidos apropiados que se deben enseñar, o el diseño de técnicas metodológicas a través de las cuales se pueda hacer más eficiente la enseñanza. Se debe hacer de la escuela un gran laboratorio de investigación, en el cual la reflexión constante sobre las prácticas pedagógicas del maestro, así como sobre las producciones de los alumnos, sean motor constante de nuevas decisiones pedagógicas.

Considerando las anteriores hipótesis generales de trabajo se realizó la tesis “La enseñanza de los números racionales a partir de la relación parte-todo”, bajo la dirección de la profesora Gloria Castrillón Castro. El problema central de investigación giró alrededor de los procesos de enseñanza y de aprendizaje relativos a los números racionales, centrando la atención en aquellos que conciernen a las relaciones parte-todo.

La selección de los números racionales como temática, se debió, entre otras razones, a que éstos constituyen un campo numérico de gran importancia, tanto desde el punto de vista matemático, como por su utilidad en el procesamiento e interpretación de situaciones de la vida cotidiana. La importancia de los números racionales en nuestra cultura es indudable: cada día los medios de comunicación nos entregan grandes volúmenes de información, que es cuantificada en términos de porcentajes, probabilidades, razones, fracciones, etc., y una buena comprensión de los números racionales es fundamental para analizarla e interpretarla. Por ejemplo, los números racionales son necesarios para entender: los resultados de las encuestas y poder juzgar su credibilidad, los indicadores económicos y sociales del país, las tasas de interés que ofrece una cuenta de ahorro o que afectan a un crédito hipotecario, los descuentos de los supermercados, la probabilidad de ganar una lotería, la predicción del clima, etc. También son importantes en los procesos escolares dado que los números racionales constituyen una base fundamental, no sólo para el estudio de la matemática, sino también para la formación en otras disciplinas como la física, la química, la biología, etcétera.

A pesar de su marcada importancia y de los grandes esfuerzos en tiempo y dedicación que actualmente se consagran, en nuestro currículo de matemáticas, a desarrollar los procesos de aprendizaje necesarios en los alumnos, éste sigue siendo un tema de alta complejidad y, por supuesto, sus niveles de logro apenas si llegan a la comprensión de los conceptos más básicos y elementales.

A continuación se reportan, a través de cuatro secciones, aspectos de la investigación realizada, con la que se esperaba contribuir a la comprensión del funcionamiento didáctico de la temática en el ámbito escolar como un paso necesario para realizar propuestas pedagógicas que mejoren el aprendizaje de los estudiantes.

MARCO TEÓRICO

Dos ejes centrales alrededor de los cuales gira el trabajo desarrollado son el análisis histórico-epistemológico de los números racionales y el análisis didáctico de los mismos. Desde lo histórico-epistemológico se logran identificar elementos conceptuales claves en el proceso de consolidación de los números racionales como objetos matemáticos a través de la historia de la humanidad; tales elementos tienen que ver con el papel social de las prácticas de medición y con los cambios conceptuales en torno a la noción de unidad. Por su parte el análisis didáctico permite delimitar campos de acción para el desarrollo de los procesos de enseñanza de los conceptos relativos a este sistema numérico; entre ellos vale la pena destacar la necesidad y pertinencia de identificar y categorizar el conjunto de conceptos y situaciones en las cuales tienen sentido los números racionales.

Una mirada a la historia

La dicotomía número–magnitud subyacente al pensamiento griego condujo a una conceptualización muy particular de la noción de *unidad*. De un lado, el número estaba ligado a lo discreto, es decir a lo contable; de otro lado, la magnitud estaba ligada a lo continuo, es decir a lo medible. La ciencia del número era la aritmética en tanto que la de las magnitudes era la geometría. Bajo estas condiciones se reconocían dos tipos de unidad: la *unidad aritmética* y la *unidad geométrica*.

La unidad aritmética —es decir, el "uno"— no era un número, pues siendo el principio generador de todos los números, debía tener naturaleza distinta.[1] Además, por ser la esencia de todos los números, el uno era *único*, *universal* e *indivisible*. Platón en su libro VII de *La República* expresa lo siguiente a propósito de la indivisibilidad del uno: "Si intentas en su presencia dividir la unidad propiamente dicha, se burlan de ti y no te escuchan, y si la divides, ellos la multiplican otras tantas veces, temiendo que la unidad no parezca como ella es, es decir, una, sino un conjunto de partes" (Platón, trad. 1997, p. 283).

1. En la filosofía griega se tenía una distinción entre esencia y sustancia, siendo la esencia la unidad básica y elemental de la cual se compone la sustancia, y por ende, sin posibilidad de ser descompuesta en componentes más simples. Así, sustancia y esencia son de naturaleza diferente. De esta manera, dado que cualquier número natural mayor o igual que dos es en última instancia una repetición del uno, entonces éste se constituye en el principio generador de todos los números. Como tal, es entonces la unidad más simple y elemental que da origen a todos los números, y por tanto es la esencia de la cual se compone la sustancia (los números).

La unidad geométrica, por su parte, era relativa a la magnitud que se iba a medir. En este sentido no era única y universal como el número, sino que dependía de aquello que se quisiera medir. Es más, para medir una misma magnitud se podía disponer de diferentes unidades según las necesidades de la medición que se fuera a realizar. Así pues, la unidad geométrica era, múltiple y particular. Pero además, dado que la unidad geométrica no era otra cosa que un elemento particular elegido arbitrariamente de entre todos los elementos que comparten la misma cualidad medible, entonces la naturaleza de dicha unidad era la misma que la de las magnitudes: divisible infinitamente —por lo menos en potencia.

Así pues, para los griegos, sólo eran números los naturales mayores que uno. No existían las fracciones de la unidad, como números. Se aceptaba la fracción $\frac{1}{2}$. en tanto que ella expresaba el resultado de la cuantificación de dos magnitudes homogéneas, en las cuales sus medidas estuvieran en una razón de 1 a 2. Las demás mediciones inexactas, es decir aquellas que dieran como resultado otro tipo de fracciones, eran expresadas como razones homogéneas entre números naturales. Por ejemplo $\frac{3}{4}$ era pensado como una razón de 3 a 4, y representaba la conmensurabilidad de dos magnitudes homogéneas. De esta manera, al expresar las medidas como razones entre números, se establecía un contacto entre la aritmética y la geometría.

La fusión de ambos tipos de unidad se da en el siglo XVI, a partir de los trabajos de Simón Stevin[2]. El creciente comercio de la Europa de finales de la Edad Media y la gran diversidad de sistemas de medida existentes en aquella época, se constituían en una gran barrera para efectuar los negocios de manera eficiente y precisa. Sobre la base de tal necesidad, Stevin se lanza a la tarea de diseñar un sistema de medida que permitiera la estandarización de los sistemas de medida en todas las regiones, y que además facilitara el cálculo necesario en las mediciones y, por ende, en las transacciones comerciales. Con este fin se apoya en la utilización cada vez más generalizada del sistema de numeración decimal, y propone el diseño de conjuntos de sistemas de medida (uno para las longitudes, uno para los pesos, etc.) en cada uno de los cuales se tomara una unidad como fundamental (o unidad patrón) y otras unidades construidas guardando una relación de 1 a 10 entre unidades consecutivas (tal como en nuestro sistema métrico decimal). De esta manera, las técnicas de cálculo desarrolladas para los números podían ser aplicadas a los procesos de medición. Este proceso lleva a Stevin a identificar la unidad geométrica de los procesos de medición, con la unidad aritmé-

2. Para mayor información sobre los trabajos de Stevin se puede consultar Waldegg (1996), Moreno (1991) y Klein (1992).

tica origen de los números y, por tanto, a determinar que la unidad aritmética es también un número y, en consecuencia, divisible en fracciones de unidad (al igual que se podía dividir la unidad geométrica). Así pues, Stevin establece el carácter de número de la unidad, así como su divisibilidad, sin que por ello deje de ser unidad. De esta manera borra las fronteras entre lo continuo y lo discreto, esto es, entre las magnitudes y los números. Pero además extiende la notación decimal para la escritura de las fracciones de unidad (tal como la conocemos hoy en día), las cuales desde entonces son consideradas como números.

Como puede verse, el trabajo de Stevin permite la transformación profunda de la naturaleza epistemológica del concepto de número instaurada desde los griegos. Pero es de destacar que este cambio tiene entre sus raíces el interés de matematizar las prácticas sociales ligadas al comercio, prácticas que, desde la perspectiva griega, no merecían la atención del matemático.

Pero este no es el único caso de la historia de las matemáticas en el cual las prácticas sociales de la medición son fuente importante para la conceptualización de las fracciones como números; en culturas como la egipcia y la babilónica se pueden encontrar ejemplos de tal relación. En ambos casos, aunque en épocas distantes una de la otra, se promovió una cultura en la cual la agricultura era la base de su desarrollo y, por consiguiente, lo relacionado con la agrimensura y la astronomía era de vital importancia. Así, la medición y los cálculos aritméticos relativos a los problemas que debían enfrentar constantemente (medida de la superficie cultivable en un determinado terreno, cobro de impuestos en función de la tierra cultivada, etc.) hicieron que aritmética y geometría estuvieran estrechamente unidas y que, por tanto, se asumiera la divisibilidad de la unidad aritmética con la misma naturalidad con que se asumía la divisibilidad de la unidad geométrica. De esta manera las fracciones de unidad también eran números, en tanto que expresaban el resultado de una medida. Por supuesto que la conceptualización de las fracciones como números se encontró con limitaciones propias impuestas por el sistema de numeración utilizado por una u otra cultura.

En suma, desde el estudio histórico–epistemológico se pueden destacar dos hechos fundamentales:

- Las dicotomías “continuo–discreto”, “unidad aritmética–unidad geométrica” y “número–magnitud”, que se muestran como factores epistemológicos claves en el proceso de construcción histórico del concepto de número racional, deben ser firmemente conceptualizadas si se quiere que las fracciones de unidad sean aceptadas como números.

- Las prácticas sociales de la medición son una fuente importante para avanzar en el proceso de conceptualización de las fracciones de unidad como números.

Como se verá más adelante, estas dos conclusiones se constituyeron en hipótesis de trabajo fundamentales en el diseño de la propuesta de intervención en el aula.

El aspecto didáctico del número racional

La enseñanza y aprendizaje de los números racionales son asuntos complejos; dicha complejidad está relacionada con el hecho de que la fracción presenta a la vez homonimia y sinonimia; al respecto, Mancera (1992) afirma:

> Uno de los problemas en el aprendizaje de las fracciones es que el símbolo $\frac{x}{y}$ donde $x, y \in Z, y \neq 0$, está asociado a diversos *significados* (homonimia); en efecto, puede representar una razón, un número racional, un operador, etc. En el sentido inverso, el concepto de fracción puede representarse como un cociente de enteros o una expresión decimal, un porcentaje (sinonimia). (p. 32)

Entre los diferentes trabajos que han abordado una interpretación de los números racionales desde un análisis semántico, sintáctico y matemático de la fracción vale la pena destacar el presentado por Ohlsson (1988), en el cual se propone una caracterización para las fracciones a partir del concepto de constructo matemático[3], y de dos tipos de significados: el *significado matemático* y el *significado aplicacional*[4]. Desde esta perspectiva se distinguen cuatro constructos para las fracciones: función cociente, número racional, vectores binarios y función compuesta. El primero tiene como significados aplicacionales las particiones, los acortamientos, las extracciones y el cociente cartesiano; el segundo, las relaciones parte–todo, la medida fraccional, el cociente (indicado), la recta numérica y la fracción decimal; el

3. Se entiende el constructo (traducción literal del término en inglés *construct*) matemático como una entidad conceptual (en este caso matemática) que está compuesta no sólo de un conjunto de definiciones, axiomas y teoremas (teoría matemática), sino que también incluye todas aquellas situaciones problema y sistemas simbólicos que estén relacionados con dicha teoría. Cuando esta entidad se hace objeto de aprendizaje, éste se da a través de un proceso en el cual entran en juego las representaciones simbólicas (formales y no formales) y cognitivas de quien aprende, las situaciones problemas desde las cuales se dota de sentido a la entidad conceptual, las leyes y propiedades matemáticas que dan sentido matemático al constructo y los procedimientos (tanto formales como no formales) bajo los cuales se puedan resolver las situaciones problema que se planteen.

tercero, las razones, las ratas, las proporciones y las cantidades intensivas; y el cuarto tiene como único significado aplicacional el operador fraccionario.

Aunque Ohlsson propone una caracterización de las fracciones más que del número racional, su trabajo exhibe un avance significativo en la caracterización de la problemática alrededor de la enseñanza de los números racionales, ya que pone de manifiesto la complejidad del campo de significados de las fracciones al mostrar cómo éstas pueden ser interpretadas desde cuatro constructos matemáticos.

Por su parte varios autores (Behr y Harel, 1990; Behr, Harel, Post y Silver, 1992; Behr, Harel, Post y Lesh, 1993) profundizan en el análisis propuesto por Ohlsson, en el sentido de realizar una caracterización semántica más fina de los distintos constructos bajo la óptica de la matemática de cantidades[5]. Esta óptica los lleva a considerar dos nuevas variables, a saber: el tipo de unidad (simple o compuesta) y el tipo de magnitud (continua o discreta). Estas variables le asignan una importancia especial a su trabajo; ambas son claves a la hora de diseñar las secuencias de tareas a través de las cuales enseñar los números racionales, pues permiten ver la necesidad de conocer tanto los distintos constructos del número racional, como el conjunto de significados provenientes del análisis de los mismos desde la óptica de la matemática de cantidades.

En conclusión, desde el análisis didáctico se reconocen nuevos elementos para el desarrollo de la propuesta de trabajo en el aula. De un lado, la importancia del concepto de fracción como un puente de entrada a los números racionales[6], pero sin dejar de lado los aspectos semánticos, sintácticos y matemáticos unidos a los diferentes constructos en que se pueden organizar los

4. El significado matemático está dado por la teoría —axiomas y teoremas— de la entidad matemática que represente. El significado aplicacional (traducción literal de la expresión en inglés *applicational meaning*) está determinado por todas aquellas relaciones que se puedan establecer desde el constructo matemático hacia situaciones del mundo real. Estas relaciones asignan tanto un sentido como una referencia a dicho constructo. Es decir que el significado aplicacional está determinado tanto por el sentido como por la referencia del constructo.
5. La matemática de las cantidades (traducción de la expresión en inglés *mathematical quantity*) presenta una nueva perspectiva en la que se plantea que el significado de los números, así como de las operaciones, está determinado por las unidades y las magnitudes sobre las que se opera. Esto quiere decir que no basta con trabajar con los valores numéricos, sino que se deben tener en cuenta las magnitudes que dan origen a estas cantidades así como a las unidades en que son medidas. Esto se hace más importante cuando se trabaja con operaciones como la multiplicación, en la que se encuentran interpretaciones en las que se opera sobre dos cantidades y el resultado es una nueva cantidad de distinta naturaleza, es decir, operaciones que transforman el referente (Schwartz, 1988).
6. Al respecto Freudenthal (1983) plantea que las fracciones son la fuente fenomenológica del número racional.

diferentes significados matemáticos y aplicaciones de éstas. De otro lado, en tanto que las fracciones tienen en los procesos de medición un elemento importante para su conceptualización, entonces se hace necesaria una referencia explícita, desde la óptica de la matemática de cantidades, al tipo de unidad y de magnitud sobre los que se realizan los procesos de medición a partir de los cuales se establecen las fracciones y, por ende, a las relaciones entre unidad aritmética y geométrica.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Desde el marco teórico que antecede se pueden identificar dos elementos claves para el desarrollo de la investigación. De un lado, la complejidad inherente al proceso de conceptualización del número racional y, por lo tanto, la imposibilidad de abordar en una sola investigación el estudio de tal conceptualización. Y de otro, la importancia del concepto de fracción como fuente fenoménica del número racional y la posibilidad de aproximarse a las fracciones desde la relación parte-todo.

Ahora bien, una aproximación inicial a las fracciones desde la relación parte-todo es pertinente al menos por las siguientes razones:

- La relación parte-todo constituye un eje a través del cual acceder a otros conceptos de los números racionales. Las medidas, las fracciones decimales, los números decimales no enteros, los cocientes, algunos tipos de razones, la recta numérica, entre otros, encuentran en la relación parte-todo una fuente importante para iniciar su proceso de conceptualización.

- A través de la relación parte-todo se tiene un puente de entrada a la conceptualización de la unidad como un todo divisible en partes más pequeñas, sin que por esto deje de ser unidad. Por lo tanto, se inicia un trabajo en la noción del continuo real. Pero además, lo anterior hace necesario un análisis de las relaciones entre la unidad aritmética y la unidad geométrica, proceso indispensable en la construcción conceptual de las fracciones de unidad como números.

- La relación parte-todo es un camino natural para la conceptualización de algunas propiedades (como la que conduce a la denominación "fracción propia" e "impropia"), algunas relaciones (como la de equivalencia), y algunas operaciones (como la suma y la resta).

- La relación parte-todo constituye un contexto importante a partir del cual se conceptualiza la unidad en sus dos características básicas: tipo de unidad (simple o compuesta) y tipo de magnitud (continua o discreta).

Por lo tanto, el campo de acción dentro del cual se delimitó el desarrollo de la investigación se centró en el trabajo con fracciones, pero tomando la relación parte–todo como punto de partida para el proceso de conceptualización de la fracción. En este sentido la fracción como relación parte–todo es interpretada como *un número que expresa la relación cuantitativa entre una cierta cantidad tomada como unidad (todo) y otra cantidad tomada como parte*. El establecimiento de tal relación cuantitativa implica un proceso de medición.

En este contexto de delimitaciones conceptuales el problema de investigación se formuló en los siguientes términos: *¿Cómo organizar la enseñanza de los números racionales a partir de la relación parte–todo?*

METODOLOGÍA

Esta investigación —enmarcada dentro del campo de la Educación Matemática— tuvo carácter interdisciplinario. Esto quiere decir, que el problema de investigación se abordó de una manera integrada con aportes de disciplinas como: la Historia de las matemáticas, en cuanto a un estudio de los aportes de investigaciones que se han realizado en el campo de la evolución histórica del concepto de número racional; la Psicología, en cuanto a la psicología cognitiva; las Matemáticas, como eje orientador del trabajo; y la Didáctica de las matemáticas, como campo de investigación integrador de las diversas disciplinas que intervinieron en el desarrollo del proyecto.

Así, la metodología de investigación fue el resultado de enfoques teóricos propios de la Didáctica de las matemáticas, fuertemente influidos por los trabajos de investigadores franceses como Guy Brousseau, Gerard Vergnaud, Régine Douady y Michèle Artigue, entre otros. El análisis didáctico desde la perspectiva de la ingeniería didáctica (en el marco de la teoría de situaciones didácticas), constituyó, junto con elementos teóricos tomados de la psicología cognitiva y de la teoría de los campos conceptuales, los ejes orientadores de la investigación.

Consistente con los elementos teóricos de la ingeniería didáctica como metodología de investigación en Didáctica de las matemáticas, la investigación se desarrolló siguiendo las cuatro fases de la misma: el análisis preliminar, la concepción y el análisis a priori de las situaciones, la experimentación y el análisis a posteriori. Dado el carácter holístico de la investigación, estas cuatro etapas no se sucedieron linealmente en el tiempo, sino que en el proceso de avance de la investigación, algunas de ellas se superpusieron realimentándose mutuamente. Por ejemplo, si bien los análisis preliminares fueron el punto de partida para la formulación de las primeras hipótesis de trabajo en el diseño de las situaciones didácticas, los resultados de la aplicación de éstas se revirtieron sobre los análisis preliminares, confirmando o refutando las hipótesis iniciales, y por tanto, dando elementos de análisis para el rediseño de las situaciones o el diseño de unas nuevas. No obstante la no linealidad, a continuación se presentan en orden las cuatro etapas a través de las cuales se identificaron variables didácticas para el diseño de situaciones didácticas cuyo objetivo sea la enseñanza de los números racionales; estas variables están relacionadas con el tipo de unidad (simple o compuesta) y con el tipo de magnitud (continua o discreta) sobre las que se establece la relación parte–todo, y con una interpretación de la fracción desde la perspectiva de la matemática de las cantidades y, por ende, desde las relaciones y operaciones que le dan su sentido numérico.

Primera etapa: el análisis preliminar

Su objetivo fundamental fue analizar las condiciones de funcionamiento del sistema educativo en la enseñanza de los números racionales. Se investigaron tales condiciones a través de tres dimensiones distintas: la epistemológica, la didáctica y la cognitiva, y al final se construyó un marco teórico didáctico general sobre el número racional. Este trabajo se realizó en las siguientes cuatro fases:

Primera fase. Indagación en trabajos realizados sobre la historia y la epistemología de las matemáticas, con el fin de conceptualizar los elementos que a través de la historia dinamizaron u obstaculizaron el desarrollo de los conceptos matemáticos relacionados con el número racional.

Segunda fase. Indagación sobre cómo se presenta el concepto de número racional en el currículo de matemáticas de la educación básica, tanto conceptualmente (es decir, desde el punto de vista matemático), como en lo relativo a las sugerencias y estrategias metodológicas. Esta indagación se realizó fundamentalmente a través de un análisis de textos escolares y de la implementación de talleres que buscaban indagar sobre las estrategias de trabajo empleadas por los maestros para presentar en el aula de clase los conceptos relativos a los racionales. Para llevar a cabo esta fase fue necesario combinar distintas estrategias, tales como: la indagación bibliográfica, la realización de entrevistas (orales y escritas) a profesores de matemáticas, los talleres con profesores y la observación de clases de matemáticas.

Tercera fase. Una mirada detallada a los alumnos con el fin de conocer sus concepciones, errores, dificultades y obstáculos en el proceso de aprendizaje de los números racionales. Esta fase se llevó a cabo a través de entrevistas orales y pruebas escritas; además se realizó una indagación bibliográfica sobre investigaciones realizadas en Colombia y el mundo sobre estos aspectos. Esto permitió —entre otros resultados— reconocer conocimientos espontáneos e informales de los estudiantes y confrontarlos con los ya formalizados que se imparten en la escuela.

Cuarta fase. Establecer interrelaciones entre los resultados del trabajo realizado en las tres fases anteriores. Se trató de la elaboración de un marco conceptual que permitiera interpretar el conocimiento de los alumnos así como las causas y consecuencias de su estado de conocimiento. Esto condujo a la formulación de hipótesis de trabajo para buscar un nuevo punto de equilibrio en el sistema educativo; es decir, que los procesos de enseñanza desarrollados llevaran a los alumnos a unos procesos de conceptualización en los que se superaran las limitaciones detectadas.

Segunda etapa: concepción y análisis a priori

En esta etapa, sobre la base de los resultados de los análisis preliminares, se tomaron decisiones con respecto al diseño de las situaciones problemas que serían trabajadas con los alumnos. Estas decisiones estaban relacionadas con la elección de las variables de comando[7] de las situaciones, y por ende, con los elementos que se pondrían en juego en éstas.

El análisis a priori, constituyó un aspecto fundamental de la investigación dado el carácter interno de su validación.[8] Su principal objetivo fue determinar la manera como las elecciones realizadas permitirían un control de los comportamientos de los alumnos, así como del sentido construido por ellos a propósito del tema en estudio. Es decir, se debía prever la manera como al manipular las variables de comando respectivas, las situaciones aplicadas permitirían a los alumnos una evolución de su aprendizaje.

Tercera etapa: la experimentación

Consistió en la ejecución de las situaciones problémicas diseñadas y la recolección de información para el análisis a posteriori. Esta aplicación se realizó con alumnos del colegio Gimnasio La Colina (Santiago de Cali) de

7. Se entiende por *variables de comando* aquellas que el investigador puede controlar en las situaciones que propone a los alumnos y que son determinantes para lograr la construcción del sentido y significado en ellos.
8. En la ingeniería didáctica, la validación se determina en términos del grado de coherencia entre el análisis a priori y el análisis a posteriori.

los grados 4º, 5º y 6º. El trabajo se realizó durante dos años lectivos consecutivos, en el horario asignado para las clases de matemáticas y en el desarrollo normal de la vida institucional. La profesora titular de los cursos siempre fue la persona encargada de implementar las situaciones, para lo cual previamente se realizaba un estudio de éstas entre el investigador y ella.

La recolección de la información se dio a través de entrevistas, cuestionarios, registros fílmicos y producciones escritas de los alumnos.

Esta etapa se realizó casi en paralelo con la anterior, pues una vez diseñado el primer conjunto de actividades era necesaria su aplicación, ya que sobre la base de los resultados obtenidos se diseñaban las nuevas situaciones con las cuales continuar el trabajo.

Cuarta etapa: el análisis a posteriori

Consistió en la interpretación de los resultados del trabajo con los alumnos, y el contraste con el análisis a priori y las hipótesis de la investigación. Esto es, sobre la base de los resultados de los alumnos se juzgó la pertinencia de las decisiones tomadas en el análisis a priori y se valoró hasta qué punto fueron determinantes en el proceso de conceptualización alcanzado por ellos. Esta fase del trabajo se realizó a partir de la sistematización y análisis estadístico de los resultados obtenidos en la fase de experimentación.

RESULTADOS OBTENIDOS

Dos grupos de resultados importantes provienen del estudio histórico-epistemológico y del estudio de la enseñanza usual de los números racionales en el sistema educativo colombiano: el primer grupo relativo a las características de la enseñanza usual del número racional en el sistema educativo colombiano y el segundo a las situaciones diseñadas.

Características de la enseñanza usual del número racional

El trabajo escolar sobre el número racional inicia con el estudio de las fracciones, a través de estrategias metodológicas y conceptuales centradas en la partición y el conteo, y en la mecanización de reglas y algoritmos; en consecuencia, en el proceso de conceptualización de las fracciones, la medición no es el eje central ni hay un tratamiento cuidadoso del tipo de magnitud y del tipo de unidad. Estos elementos, como se verá a continuación, son fuente de dificultades en los procesos de conceptualización de los alumnos.

Trabajo centrado en la partición y el conteo

Al poner la atención en actividades de partir y contar[9], los alumnos centran el proceso de conceptualización en el número natural y no en la fracción como tal. En efecto, al centrar la atención en el número de partes que representa el numerador y el número de partes que representa el denominador —y no en la relación cuantitativa entre las cantidades de magnitud de la parte y el todo—, se piensa la fracción como dos números naturales separados por una rayita (vínculo) y no como una relación cuantitativa entre la parte y el todo. Por ejemplo, en la Figura Nº 1, $\frac{3}{4}$ se piensa como "las tres partes sombreadas de las cuatro posibles", y no como "la relación cuantitativa entre la cantidad de magnitud de estas tres partes y la cantidad de magnitud total de las partes"; es más, para muchos alumnos la parte o partes que no se sombrean no constituyen una fracción de la unidad.

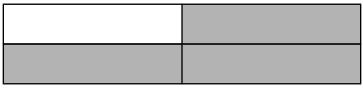


Figura Nº 1.

Este trabajo centrado en el número natural permite explicar el error común de los alumnos al sumar varias fracciones: sumar numeradores entre sí y denominadores entre sí, pues "si las fracciones son números naturales separados por unas rayitas, entonces, ¿por qué no sumarlos como la suma que ya se sabe hacer?".

Pero además, como el proceso de partición no se basa en la medida de la magnitud que se desea repartir, entonces debe realizarse a partir de procesos visuales que privilegian la congruencia geométrica entre las partes para garantizar su igualdad. Esto hace que en situaciones como la que se muestra en la Figura Nº 2, los alumnos no acepten que cada una de las cuatro regiones triangulares tenga la cuarta parte de la cantidad de superficie del rectángulo.

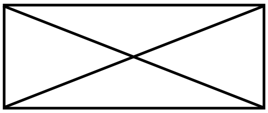


Figura Nº 2.

9. Se trata de las actividades típicas en las cuales un objeto (el todo) es partido en partes iguales (en forma), obteniendo N partes en éste. Luego se toman (sombrean, colorean, etc.) M partes de las N obtenidas. Por tanto, las partes que se han tomado se representan por la fracción $\frac{M}{N}$.

Otra consecuencia de que las actividades no pongan énfasis en la medición sino en el conteo, es precisamente que la noción de equivalencia entre fracciones queda significada en la congruencia de las partes en que se ha dividido cada unidad, lo cual constituye un significado muy débil, por demás basado en la percepción y no en las relaciones numéricas. Por ejemplo en la Figura Nº 3, las fracciones representadas en cada uno de los rectángulos (que expresan correspondientemente la relación entre la cantidad de superficie sombreada con respecto a la cantidad de superficie total del rectángulo), difícilmente son aceptadas como equivalentes por los alumnos, y mucho menos si las formas de cada partición son irregulares; esto, en tanto que las partes sombreadas no son congruentes entre sí.

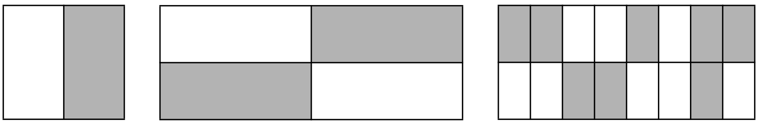


Figura Nº 3.

Si para los rectángulos de la Figura Nº 3 se comparan las cantidades de superficie sombreadas entre sí, se obtienen que unas son mayores que las otras; pero como fracciones, cada una expresa "$\frac{1}{2}$ de …". Es decir, la equivalencia no se da porque las cantidades de superficie sombreadas sean iguales, sino porque la relación cuantitativa entre éstas y las correspondientes cantidades de superficie de los rectángulos respectivos, de los cuales hacen parte, es la misma.

Finalmente, el trabajo centrado en la partición y el conteo hace que el proceso de conceptualizar las fracciones impropias sea de difícil comprensión para los alumnos. "Si el denominador indica el número de partes en las que se divide la unidad, y el numerador la cantidad de partes que se toman, entonces ¿cómo poder tomar una cantidad de partes que sea mayor de las que se obtuvieron al dividir la unidad?". Por ejemplo, en la Figura Nº 4 se muestra una respuesta típica de los alumnos cuando deben representar una fracción impropia como $\frac{5}{4}$. En este caso, dado que de la unidad sólo se pueden obtener cuatro partes, entonces se parte una de ellas para poder obtener las cinco que indica el numerador. Este error es comprensible en tanto que la fracción es vista como un par de números naturales y no como una relación cuantitativa entre dos cantidades de magnitud.

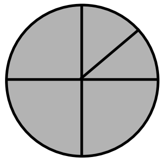


Figura Nº 4.

El tratamiento del tipo de magnitud y de unidad

En los procesos de enseñanza desarrollados en la escuela, muchas veces no se da un tratamiento cuidadoso del tipo de unidad ni del tipo de magnitud, lo que lleva a que se propongan de manera indiscriminada actividades en contextos de colecciones o de magnitudes continuas, desconociendo que los procesos de conceptualización de los alumnos son distintos en uno u otro contexto. Por ejemplo, en la Figura Nº 5 se presentan dos actividades que se le proponen a los alumnos de manera simultánea.

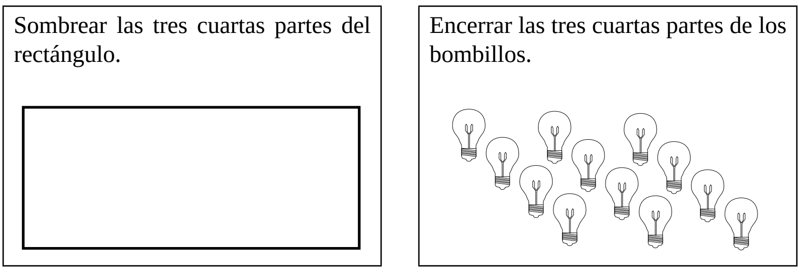
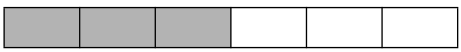


Figura Nº 5.

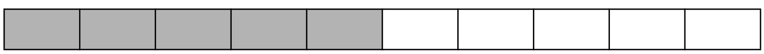
En este caso no se asume que hallar las tres cuartas partes de una magnitud continua o de una discreta implica procesos diferentes, ni se advierte que el proceso para el caso de las magnitudes discretas es más complejo. Hallar las tres cuartas partes de doce bombillos conlleva: (i) comprender que el "doce" es una unidad; (ii) hacer la repartición de dicha unidad, en cuatro partes iguales; (iii) conceptualizar cada parte obtenida, como la cuarta parte de la unidad (i.e., de doce); y, (iv) juntar tres de esas cuatro partes obtenidas para obtener las tres cuartas partes de la unidad. En el caso del rectángulo, éste es asumido como una unidad simple y por tanto las tres cuartas partes del mismo se obtienen de manera directa partiendo la unidad en cuatro partes (congruentes o de igual cantidad de superficie) y juntando tres de éstas.

Como se ve, conceptualizar una unidad compuesta es, desde el punto de vista psicológico, más complejo. Primero se conceptualizan las unidades simples y, posteriormente, se accede a la posibilidad de conceptualizar las unidades compuestas, es decir, se accede a la posibilidad de entender que una multitud también puede ser una unidad.

Igualmente, es común encontrar propuestas de actividades escolares en las cuales no hay un tratamiento cuidadoso de la unidad. Por ejemplo, en la Figura Nº 6 se muestra una representación de las fracciones $\frac{3}{6}$ y $\frac{5}{10}$ —por demás muy típica en los salones de clase y hasta en libros de texto— la cual puede llevar a un error conceptual debido a la falta de rigor en el tratamiento de la unidad. En este ejemplo, la falta de rigor en el tratamiento de la unidad se expresa de varias formas. En primera instancia, el rectángulo se alarga o se acorta según las necesidades de tal forma que tenga tantos cuadritos de largo como indique el denominador de la fracción (la unidad es entonces el cuadrito y no el rectángulo). En segunda instancia, y relacionado con lo expresado antes sobre la fracción como partidor y la fracción como relación, no se explicita la magnitud sobre la cual se establece la comparación parte-todo, lo que termina por confundir más cuál es la unidad en cada caso.



La parte sombreada representa $\frac{3}{6}$ de la figura.



La parte sombreada representa $\frac{5}{10}$ de la figura.

Figura Nº 6.

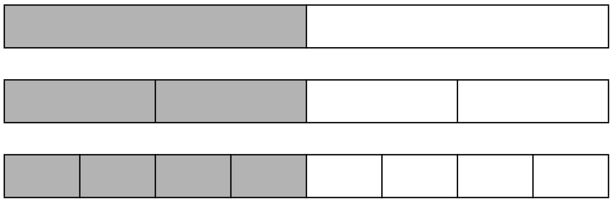
Si el trabajo se ha centrado en la congruencia de las partes y no en las relaciones cuantitativas entre las partes y el todo, entonces es natural que los alumnos concluyan que $\frac{1}{6}$ es igual a $\frac{1}{10}$ o, lo cual es erróneo.

Énfasis en la mecanización de reglas y algoritmos

Es común encontrar en los procesos de enseñanza estrategias, como la presentada en la Figura Nº 7, en las cuales primero se exhiben algunas situaciones concretas, acto seguido se muestran algunos ejemplos, luego se expone la fórmula o regla que generaliza el proceso conceptual que se espera que los alumnos aprendan y, finalmente, se proponen algunos ejercicios para practicar la regla o fórmula aprendida.

Actividad 1:

Observa las tres cintas; en cada una de ellas la parte sombreada representa la mitad de la cinta. Por tanto, $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$.



Actividad 2:

Observa los siguientes ejemplos:

$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ porque $1 \times 4 = 2 \times 2$.

$\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$ porque $3 \times 8 = 4 \times 6$.

$\frac{2}{3} \neq \frac{3}{4}$ porque $2 \times 4 \neq 3 \times 3$.

Para recordar:

La fracción $\frac{a}{b}$ es equivalente a la fracción $\frac{c}{d}$, siempre y cuando $a \times d = b \times c$.

Figura Nº 7.

En estrategias como esta se asume que para generalizar basta con dar unos cuantos casos particulares, para luego —de manera natural— inferir la ley general. Se olvida que —como lo plantean Mason, Graham, Pimm y Gowar (1999)— el paso a la formulación de una ley general implica algo más profundo: reconocer una estructura invariante en un conjunto de situaciones particulares, la cual, una vez conceptualizada, debe permitir el tratamiento de cada situación particular como si se tratara de la situación general. Se ha mostrado que un proceso de generalización no se puede dar a partir de unos cuantos ejemplos, sino que requiere de múltiples situaciones en diferentes contextos, a través de diversos sistemas de representación y a lo largo de un período de tiempo considerable.

Sobre las situaciones diseñadas

Las variables de comando

Sobre la base del análisis histórico–epistemológico, matemático y didáctico, se determinó tomar como variables de comando para orientar el diseño de las situaciones didácticas los siguientes elementos: la fracción como relación parte-todo, la medición como fuente fenomenológica para conceptualizar la fracción, el tipo de unidad y de magnitud y la fracción como relación multiplicativa.

La fracción como relación parte–todo, constituye una primera variable de comando. Desde esta perspectiva, la fracción puede ser definida como una "nueva cantidad" que expresa la relación cuantitativa entre una cierta cantidad de magnitud tomada como unidad (todo) y otra cantidad de magnitud tomada como parte. Las magnitudes involucradas pueden ser continuas o discretas y, por consiguiente, las unidades simples o compuestas, respectivamente.

Pensar la fracción como relación parte–todo implica, fundamentalmente, la realización de procesos de medición para establecer la cuantificación de la parte y del todo y, por consiguiente, la relación cuantitativa entre ambos. Igualmente, elegir tal sentido de la fracción obliga a la explicitación de la magnitud sobre la cual se debe realizar la cuantificación. Hay en este sentido una diferencia importante con los procesos de enseñanza usual, ya que en ellos la medición no es un aspecto fundamental en el proceso de conceptualizar la fracción. Por lo anterior, la medición se instaura como una variable de comando.

Dos variables de comando más, que determinan distintas situaciones problema que se pueden proponer desde la relación parte–todo, corresponden a la naturaleza de la unidad y al tipo de magnitud sobre el cual se establezca la comparación.

Inicialmente en las situaciones diseñadas se trabaja con unidades simples, lo cual implica tareas en el contexto de las magnitudes continuas. Esta elección se sustenta, como se dijo antes, en que una tarea que implique la conformación de unidades simples es de menor complejidad psicológica que una que implique la conformación de unidades compuestas. Desde esta perspectiva, las primeras tareas se proponen en un contexto de las longitudes y, posteriormente, en el de las superficies; esto hace indispensable la referencia a la matemática de las cantidades y, por lo tanto, a considerar en el establecimiento de la relación parte–todo, la unidad (geométrica) en la cual se miden las magnitudes geométricas involucradas.

Otra variable fundamental está determinada por la escogencia de la interpretación de la fracción como una relación multiplicativa sobre la interpretación usual de la fracción como una partición. Desde el punto de vista matemático, la relación $X = n \cdot Y$ es equivalente a la relación $Y = \frac{1}{n} \cdot X$. Esto es, la relación multiplicativa "*n* veces…", define la relación inversa "*n*-ésima parte de…" y viceversa. En términos de las magnitudes, dicha equivalencia se puede interpretar así: Si X y Y son dos cantidades de magnitud tales que una de ellas (Y) está contenida un número entero de veces n en la otra cantidad de magnitud (X), entonces se puede concluir que la cantidad de magnitud Y es la *n*-ésima parte de la cantidad de magnitud X. Favorecer una interpretación de las fracciones desde esta perspectiva no sólo es coherente con la perspectiva de la matemática de cantidades, sino que permite generar procesos de conceptualización a partir de la medición, y no de la partición y el conteo. Así, la fracción es efectivamente una relación cuantitativa entre dos cantidades de magnitud (la parte y el todo); además, como relación que es, la fracción ya no es una propiedad o un nombre de la parte, sino que la fracción es el resultado de una comparación[10].

De esta manera, se presenta a los alumnos un conjunto de actividades en las cuales se inicia un proceso de conceptualización de las fracciones unitarias (es decir, aquellas con numerador uno) a partir de unas actividades que centran la reflexión en procesos de medición y que por tanto, enfatizan en las relaciones "*n* veces…" y "*n*-ésima parte de…" como dos relaciones inversas que se pueden utilizar la una para definir la otra. Es decir, que en vez de conceptualizar la fracción $\frac{1}{n}$ como "una parte sombreada de las n en que se dividió la unidad", se comprende como "la cantidad de magnitud Y es $\frac{1}{n}$ veces la cantidad de magnitud X si y sólo si la cantidad de magnitud X es n veces la cantidad de magnitud Y".

Pero desde la anterior perspectiva aún queda un problema por resolver: ¿cómo proponer a los alumnos un proceso para conceptualizar las fracciones de la forma $\frac{m}{n}$? Desde el punto de vista formal, la fracción $\frac{m}{n}$ es equivalente

10. Por ejemplo, se puede ver que una determinada cantidad de magnitud puede ser la mitad de una segunda, pero la cuarta parte de una tercera, o incluso, el doble de una cuarta. Así, las fracciones dejan de ser nombres para las partes sombreadas y se toman como relaciones entre cantidades de magnitud.

a $m \cdot \frac{1}{n}$. Esto es, la repetición aditiva de una fracción unitaria (lo cual es, en última instancia, una multiplicación) genera una fracción no unitaria. O dicho de otra forma, la fracción $\frac{m}{n}$ puede ser interpretada como $\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}}_{m \text{ sumandos}}$. De esta manera, se generaron procesos en los cuales fracciones como $\frac{3}{5}$ eran interpretadas no como 3 de las 5 partes en las que se partió la unidad, sino como 3 veces $\frac{1}{5}$ de la unidad.

Con las aproximaciones anteriores para llegar al concepto de fracción se logra desarrollar un proceso basado en las operaciones que le dan sentido numérico. Como se verá más adelante, estas decisiones fueron importantes en los procesos de conceptualización de las fracciones impropias y de la suma de fracciones por parte de los alumnos.

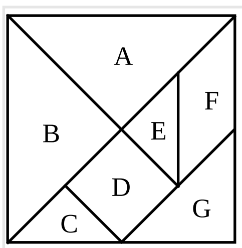
Características de las situaciones diseñadas

La determinación de las anteriores variables dirigió el diseño de las situaciones que podrían replantear la enseñanza usual de los números racionales a partir de las fracciones. Las principales características de tales situaciones fueron las siguientes:

La fracción es el resultado de una relación cuantitativa entre la parte y el todo. Esto implicaba que las situaciones debían rescatar el proceso de medir y que la fracción debía ser el resultado de comparar los resultados de dicha medición. Por lo tanto, la referencia a la magnitud sobre la que se realizara la cuantificación era fundamental.

Por ejemplo, en vez de expresar "¿Qué parte del rectángulo se ha sombreado?" se podría decir "La cantidad de superficie sombreada en la figura, ¿cuánto es de la cantidad total de superficie de la misma?". Nótese cómo la primera pregunta, por demás típica en el trabajo sobre fracciones, no hace referencia ni a la magnitud, ni a la cuantificación relativa entre el área sombreada y el área total; esto es lo que hace que la fracción sea entendida como la etiqueta que se le asigna a una parte de la figura y no como una relación cuantitativa. Por el contrario, en la segunda pregunta, centrar la atención en la magnitud sobre la que se realiza la cuantificación[11] y hacer ver la fracción como una relación entre dos cantidades, permite superar tal dificultad.

El sentido y significado de las fracciones está fundamentado en las relaciones y operaciones que le dan sentido numérico. Esto es, se trataba de proponer un trabajo a los alumnos a través del cual pudieran conceptualizar las fracciones a partir de las relaciones matemáticas $Y = \frac{1}{n} \cdot X \Leftrightarrow X = n \cdot Y$ y $\frac{m}{n} = m \cdot \frac{1}{n}$. Para lograr esta meta, el trabajo propuesto debía permitir la construcción del significado de las fracciones, no sobre las propiedades físicas de los objetos con los que se actúa, sino sobre las relaciones cuantitativas establecidas a partir de las mediciones y, fundamentalmente, sobre las composiciones aditivas y multiplicativas que se deriven de estas relaciones cuantitativas. Es decir, dar sentido numérico a la fracción y, por ende, al número racional, desde sus propiedades aritméticas. En la Figura Nº 8 se muestra un ejemplo del tipo de actividades que en tal dirección se les propuso a los alumnos; como se puede observar, no sólo se enfatiza en la medida de una magnitud (el área de la superficie de los triángulos), sino que también se proponen los dos tipos de relaciones: la relación "*n* veces …" y la relación "*n*-ésima parte de …".

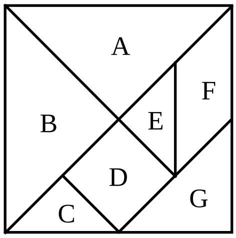


1) El área del triángulo G, ¿cuánto es del área del triángulo A?
2) El área del triángulo A, ¿cuántas veces contiene al área del triángulo G?
3) El área del triángulo C, ¿cuánto es del área del triángulo G?
4) ¿Cuántas veces está contenida el área del triángulo C en el área del triángulo G?

Figura Nº 8.

Igualmente para el caso de las fracciones no unitarias, o incluso el de las mayores que la unidad, se les propuso actividades como las que se muestran en la Figura Nº 9, en las cuales se buscaba que la repetición de una fracción unitaria fuera la base para la conceptualización de las no unitarias.

11. Cuando se trabaja con objetos físicos es indispensable la referencia a la magnitud sobre la que se realiza la cuantificación, pues, por ejemplo, la mitad de la cantidad de frijoles en una libra, puede no pesar media libra.



1) Tres veces el área del triángulo A ¿cuánto del área total del cuadrado completan?
2) Las áreas de los triángulo A y B, ¿cuánto del área total del cuadrado completan?
3) Tres veces el área del triángulo C, ¿cuánto del área del cuadrado completan?

Figura Nº 9.

Las situaciones planteadas deben permitir en el alumno el desarrollo de una génesis del concepto a través de la estructuración de un lenguaje matemático, con su respectiva semántica y sintaxis. Se trata de que el diseño de las situaciones no plantee como objetivo central la mecanización de reglas algorítmicas, sino un proceso de construcción conceptual de las relaciones y operaciones básicas para la comprensión de las fracciones y, por lo tanto, una comprensión y utilización significativa de los procesos sintácticos y semánticos involucrados.

Desde esta perspectiva las notaciones simbólicas deben necesariamente considerar las utilizadas espontáneamente por el alumno y, a partir de ellas, ir introduciendo paulatina y comprensivamente las notaciones formales. Por ejemplo, en un primer momento del trabajo, los alumnos usaban notaciones particulares para aludir a las fracciones; así, para referirse a las fracciones "un cuarto" o "tres cuartos", algunos expresaban "la cuatro partes", o "la tres cuatro partes". Posteriormente, en analogía con la notación utilizada para la fracción $\frac{1}{2}$ (la cual conocían pues aparece en muchos productos comerciales) empezaron a utilizar notaciones como $\frac{1}{4}$ o $\frac{3}{4}$. Nótese que no hubo una intención explícita de enseñar tal notación, sino que a medida que ellos avanzaban en su proceso conceptual, veían la necesidad y posibilidad de simplificar sus escrituras con notaciones simbólicas. En esos momentos, si era necesaria alguna corrección a la escritura se realizaba con el fin de lograr una mejor estructura conceptual.

Otro ejemplo del trabajo realizado en la estructuración del lenguaje se evidencia en las anotaciones que se hacían a los alumnos con respecto a sus producciones. Así, si las respuestas a actividades como las propuestas en la Figura Nº 8 o en la Figura Nº 9 eran parciales o incompletas[12], se les mostraba lo inapropiado de su respuesta y se les motivaba a reescribirla de manera más coherente y completa.

Así pues, el trabajo propuesto a los alumnos no sólo planteaba la posibilidad de una construcción conceptual, sino también de una construcción sintáctica, en donde cada proceso de construcción apoya al otro. Pero para lograr tal proceso se deben involucrar, en la presentación de las actividades, consignas que puntualicen aspectos tales como: explicitar sobre qué magnitud se realiza la comparación, explicitar que se trata de una relación cuantitativa, no dar instrucciones innecesarias que sugieran al alumno qué debe hacer y variar la estructura gramatical de las consignas. La intención de tales puntualizaciones es minimizar las imprecisiones conceptuales y los errores en los alumnos al trabajar con ellas.

Las situaciones deben tomar en cuenta los aspectos epistemológicos y psicológicos relacionados con el tipo de unidad y de magnitud. Si bien no se puede asumir que los problemas epistemológicos relativos a la dicotomía continuo-discreto presentes en la construcción histórica del concepto de número racional se repliquen en el aula de clase, tampoco se puede esperar que alumnos con edades de entre diez y doce años tengan resueltos estos aspectos conceptuales. Una enseñanza de los números racionales que tenga en cuenta dichos aspectos debe considerar las características epistemológicas de lo continuo versus lo discreto:

Lo continuo	**Lo discreto**
Divisible infinitamente.	Divisible un número finito de veces.
Da origen a las unidades geométricas y otras unidades métricas.	Da origen a la unidad aritmética.
Está relacionado con las magnitudes.	Está relacionado con las colecciones.
La unidad es divisible infinitamente.	La unidad no es divisible.

La posibilidad de acercar estas diferencias epistemológicas está dada por la comprensión de la unidad aritmética no como distinta de la unidad geomé-

12. Si en la pregunta 1 de la Figura Nº 8 respondían, “un medio”, se les hacían cuestionamientos tales como: “un medio de quién”, o “quién es un medio de quién”. Con este tipo de cuestionamientos se esperaba que tomaran consciencia de la necesidad de una escritura más coherente con lo preguntado, como por ejemplo, “el área del triángulo G es un medio del área del triángulo A”. Posteriormente, cuando empezaban a utilizar de manera espontánea una escritura más simbólica, se continuaba con este proceso de corrección. Así, era común que como respuesta a dicha pregunta propusieran “G $\frac{1}{2}$ A”, a lo cual seguía una corrección hacia “G = $\frac{1}{2}$ A”.

trica. Esto se puede lograr si las prácticas de medición son la fuente fenomenológica para la construcción conceptual de la fracción. Por lo tanto, las situaciones que se propongan deben fundamentarse sobre unos elementos que involucren estas variables.

La pertinencia de las elecciones hechas

Los resultados del trabajo con los alumnos permitió confirmar la pertinencia de las elecciones realizadas, pues se pudo evidenciar que sus procesos de conceptualización de la fracción se debieron al tipo de trabajo realizado.

Los alumnos, en la medida en que avanzaron en el trabajo propuesto, fueron estructurando el concepto de fracción desde los dos procesos fundamentales que se tenían previstos: $A = \frac{1}{n}B$ si A está contenida n veces en B, y $\frac{m}{n}$ es $\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}}_{m\ \text{sumandos}}$ (de lo cual se desprende que $\frac{m}{n}$ es m veces $\frac{1}{n}$).

Estos dos procesos conceptuales están ligados a las acciones realizadas en las actividades desarrolladas y se van constituyendo en esquemas que organizan los desempeños de los alumnos, alcanzando cada vez mayores grados de generalización y de abstracción. Estos dos conceptos son fundamentales para la conceptualización de las fracciones impropias y de la suma entre fracciones[13].

Nótese cómo en el primero de estos procesos, el juego entre la unidad aritmética y la unidad geométrica se constituye en un elemento fundamental, en tanto que la fracción es conceptualizada a partir de una relación métrica entre dos magnitudes, lo que implica asumir a una magnitud como unidad geométrica en un momento determinado del proceso, mientras que la otra es asumida como unidad aritmética en otro momento del mismo proceso.

Por su parte, en el segundo de los procesos, la fracción es asumida como una nueva unidad la cual puede ser iterada para formar nuevas fracciones. Desde éste la suma de fracciones homogéneas es interpretada como resulta-

13. Las fracciones impropias son fácilmente conceptualizadas, pues como la fracción $\frac{m}{n}$ es una iteración de la fracción $\frac{1}{n}$, entonces si se toma como referencia el hecho de que n veces $\frac{1}{n}$ es equivalente a la unidad, entonces se tiene un parámetro claro para determinar cuándo una fracción es mayor o menor que la unidad dependiendo de si $m > n$ o $m < n$. Por su parte, la suma entre fracciones es un proceso natural debido al proceso iterativo que genera las fracciones no unitarias.

do de un conteo de fracciones. Se cuentan medios, tercios, cuartos, etc., y por lo tanto, se obtiene un número determinado de medios, tercios, cuartos, etc. De esta manera se logra una conceptualización de la suma a partir del proceso de contar, lo cual permite ver la suma entre fracciones como un proceso de agregar a una cantidad otra cantidad, obteniéndose una nueva cantidad de la misma naturaleza de las dos sumadas.

De otra parte, las actividades realizadas permitieron a los alumnos el desarrollo de un tercer proceso conceptual relativo a la equivalencia de fracciones: $\frac{m}{n}$ es equivalente a $\frac{a}{b}$ si $\frac{1}{b}$ está contenida k veces en $\frac{1}{n}$ y $a = k \times m$, (es decir, si $\frac{1}{n}$ es k veces $\frac{1}{b}$ entonces $\frac{m}{n}$ es igual a $\frac{k \cdot m}{b}$). Nótese cómo esta manera de encontrar las equivalencias entre fracciones se fundamenta en la comparación entre fracciones y cómo, en cierta forma, recurre al principio de una fracción que divide a otra un número exacto de veces: si $\frac{1}{b}$ está contenida k veces en $\frac{1}{n}$, entonces la fracción $\frac{1}{b}$ divide a la fracción $\frac{1}{n}$. Esto es importante pues se dispone de un proceso para hallar fracciones equivalentes basado en la medición y en la comparación de fracciones, lo cual marca una diferencia importante con el procedimiento convencional, que se fundamenta en la multiplicación por la unidad y no recurre a la comparación entre las fracciones.

CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos al observar los procesos de conceptualización de los alumnos muestran la importancia de recuperar para la enseñanza de los números racionales los aspectos relacionados con la medida, el tipo de magnitud y el tipo de unidad. Un trabajo desde la fracción como relación parte-todo, fundamentado en los tres aspectos antes señalados, permitió desarrollar en los alumnos procesos de aprendizaje constructivos y autónomos, en lo relativo a las relaciones de orden, la relación de equivalencia y la operación aditiva en los números racionales. Pero, de otra parte, la investigación también mostró la debilidad que hay desde esta perspectiva de las fracciones como relación parte–todo para conceptualizar los aspectos relativos a la estructura multiplicativa de los números racionales. Esta es pues una línea abierta para nuevas investigaciones.

REFERENCIAS

Behr, M. y Harel, G. (1990). The construct theory of rational numbers: toward a semantic analysis. En G. Booker, P. Cobb y T. de Mendicuti (Eds.), *Proceedings fourteenth PME Conference* (vol. III, pp. 3-10). Mexico: International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Behr, M., Harel, G., Post, T. y Lesh, R. (1993). Rational numbers toward a semantic analysis —emphasis on the operator construct. En T. Carpenter, E. Fennema y T. Romberg (Eds.), *Rational numbers: an integration of research* (pp. 13-47). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Behr, M., Harel, G., Post, T. y Silver, E. (1992). Rational number, ratio and proportion. En D.A. Grouws (Ed.), *The handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 296-333). New York: Macmillan Publishing Company.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht, the Netherlands: D. Reidel.

Klein, J. (1992). *Greek mathematical thought and origin of algebra*. New York: Dover Publication, Inc.

Mancera, E. (1992). Significados y significantes relativos a las fracciones. *Educación Matemática 4* (2), 30-54.

Mason, J., Graham, A., Pimm, D. y Gowar, N. (1999). *Rutas hacia el/Raíces del álgebra.* (C. Agudelo, Trad.). Tunja: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. (Trabajo original publicado en 1985).

Moreno, L. (1991). En torno a las nociones de número y variación. *Mathesis VII* (2), 189-204.

Ohlsson, S. (1988). Mathematical meaning and applicational meaning in the semantics of fractions and related concepts. En J. Hiebert and M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (vol. 2, pp. 53-92). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Platón, (trad. 1997). *La República.* Bogotá: Editorial Panamericana.

Schwartz, J. (1988). Intensive quantity and referent transforming arithmetic operations. En J. Hiebert and M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (vol. 2, pp. 41-52). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Waldegg, G. (1996). La contribución de Simón Stevin a la construcción del concepto de número. *Educación Matemática 8* (2), 5-17.

Gilberto Obando Zapata
Facultad de Educación
Universidad de Antioquia
Medellín, Colombia
E-mail: gobando@ayura.udea.edu.co