UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2010, Número 24, páginas 69-83
ISSN: 1815-0640

MONOGRÁFICO ESTADÍSTICA

El uso de juegos para la promoción del razonamiento probabilístico

Hugo Mael Hernández Trevethan; Verônica Yumi Kataoka; Marcelo Silva de Oliveira

Resumen

La secuencia didáctica que se presenta busca trabajar la idea de probabilidad, su cálculo e interpretación con el uso de dados y que puede auxiliar a los alumnos en etapa pre universitaria (16 a 18 años) a observar fenómenos aleatorios, a levantar datos y a tomar decisiones. Los resultados fueron satisfactorios, pues los alumnos pasaron a un nivel más avanzado de razonamiento probabilístico, y que puede contribuir en la transición al razonamiento estadístico.

Abstract

The didactic sequence here aims to raising the level of the probabilistic reasoning on students in pre-college stage (16-18 years old) with the use of dices. This sequence uses the idea that development of the probabilistic reasoning can help the students to observe random phenomena, to raise data and to make decisions. The results were satisfactory, since students passed to a more advanced level of probabilistic reasoning, which can contribute in the transition to the statistical reasoning.

Resumo

A sequência didáctica que se apresenta procura trabalhar a ideia de probabilidade, seu cálculo e interpretação com o uso de dados e que pode auxiliar aos alunos em etapa pré universitária (16 a 18 anos) a observar fenómenos aleatorios, a levantar dados e a tomar decisões. Os resultados foram satisfatórios, pois os alunos passaram a um nível mais avançado de razonamiento probabilístico, e que pode contribuir na transição ao razonamiento estatístico.

Introducción

En una sociedad cada vez más informatizada, muchos educadores están buscando desarrollar actividades con el apoyo de la computadora teniendo como idea que, en la mayoría de los casos, una de las principales ventajas es la rápida reproducción de resultados de ensayos experimentales; Con todo, no podemos perder de vista que muchas veces el alumno no sabe con certeza lo que ocurre en un proceso de simulación ya que las operaciones ocurren dentro de la computadora. De acuerdo con esta limitante, afirmamos por hipótesis que sería mejor cognitivamente trabajar conjuntamente la experimentación real y la computacional, es decir, una experiencia didáctica en la que los alumnos manipulen primero los materiales concretos, en nuestro caso los dados, para después pensar en el comportamiento de esta misma actividad computacionalmente.

Al trabajar con la combinación de experimentación física y computacional, se tiene el objetivo de permitir a los alumnos alcanzar un nivel superior en razonamiento probabilístico. Considerando que la construcción del concepto de probabilidad debería realizarse a partir de la comprensión de sus tres nociones básicas: percepción del azar; idea de la experiencia aleatoria; y noción de probabilidad. De acuerdo con Dias:

> La *experimentación con fenómenos aleatorios* proporciona al alumno una experiencia difícil de adquirir en su relación con lo cotidiano. La falta de experiencia parece ser la causa de de algunas intuiciones incorrectas en la enseñanza de la probabilidad. Construir experimentos en el salón de clases puede confrontar estas intuiciones incorrectas y dar la base para la construcción de nuevos conocimientos, que sean congruentes con la teoría de Probabilidad (2004).

Como destaca Truran (1994) en el título de su artículo – “What is the probability of...?” – existe la necesidad de que los docentes retomen esta interrogante por medio de cuestiones más sofisticadas, además de involucrar a los estudiantes en la comparación y evaluación de las diferentes formas de la probabilidad. Este autor muestra, por medio de un experimento involucrando el lanzamiento de un dado, que hay por lo menos tres diferentes maneras de estimar la probabilidad de obtener la cara seis y que estos valores pueden ser completamente diferentes. Esas formas se denominan probabilidad Simétrica, probabilidad Experimental y probabilidad Subjetiva.

En la secuencia didáctica que proponemos dimos énfasis a la probabilidad Simétrica, definida por Laplace, siendo esta la herramienta que el alumno utilizó para resolver los problemas propuestos racionalmente, más también fue posible proponer ideas basadas sobre un razonamiento probabilístico totalmente subjetivo y probar algunas hipótesis por medio de la experimentación.

De acuerdo con las ideas discutidas anteriormente Batanero y Godino (2002) trazan algunas orientaciones sobre como ayudar a los niños en el desarrollo del razonamiento probabilístico:

- proporcionar amplia variedad de experiencias que permitan observar los fenómenos aleatorios e diferenciarlos de los deterministas;
- estimular la expresión de predicciones sobre el comportamiento de esos fenómenos y los resultados, así como su probabilidad;
- organizar el levantamiento de datos de experimentación de modo que los alumnos tengan la posibilidad de contrastar sus predicciones con los resultados producidos y revisar sus creencias;
- resaltar el carácter imprevisible de cada resultado aislado, así como la variabilidad de las pequeñas muestras, mediante la comparación de resultados de cada niño o por partes; ayudar a apreciar el fenómeno de convergencia, mediante acumulación de resultados de toda la clase, y comparar la confiabilidad de pequeñas y grandes muestras.

Frente a lo expuesto, por medio de la metodología de Resolución de Problemas, nuestro trabajo tuvo como objetivo desarrollar una secuencia didáctica utilizando dados con diferentes números de lados para presentar o recordar algunos conceptos de las probabilidades Clásica, Subjetiva y Experimental, así como ayudar a los alumnos en la toma de decisiones basadas sobre el razonamiento probabilístico. Este estudio fue desarrollado con alumnos, de edades entre los 16 y 17 años, del nivel medio superior en etapa pre universitaria del Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH), plantel Naucalpan, de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), Ciudad de México, México.

Filosofía de la Probabilidad

El uso del concepto de aleatorio, siendo que aún no es formalmente definido, puede ser identificado en registros muy antiguos, tales como las referencias bíblicas a los objetos sacerdotales israelitas *Urim* y *Tumim* (aproximadamente 1.500 a.C.) y la literatura de los rabinos, pasando por referencias arqueológicas tales como los huesos (*astragali*) utilizados por los antiguos romanos como objetos para resultados aleatorios, hasta llegar a las consideraciones de Galileo Galilei al respecto de de principios que definirían el evento aleatorio (Hald, 2003).

También puede considerarse que dichos axiomas de Galileo serían los esfuerzos más antiguos para formalizar el cálculo de probabilidades, pero fue en el siglo XVI que el matemático y jugador italiano Jerónimo Cardano (1501-1576), decidió estudiar las probabilidades de ganar en diversos juegos de azar. Analizó las probabilidades de seleccionar ases de un mazo de cartas, de obtener "sietes" con dos dados, y publicó los resultados de estas investigaciones en un manual para jugadores llamado "Liber de Ludo Aleae" (El libro de los juegos de azar – 1526).

De acuerdo con Lopes y Meirelles (2005), Cardano es considerado el iniciador de la Teoría de Probabilidades, ya que fue el primero en hacer observaciones del concepto probabilístico de un dado "honesto" y en escribir un argumento teórico para calcular probabilidades. Él afirmó que, al jugar dados, la probabilidad de obtener uno, tres o cinco era la misma que la de obtener dos, cuatro o seis.

Sin embargo, el consenso es que las cartas intercambiadas entre Pierre de Fermat y Blaise Pascal al respecto del problema del cálculo de probabilidades en juegos de azar son la inauguración de la teoría matemática de este cálculo. Después de Fermat y Pascal se tienen las contribuciones de Pierre Simón de Laplace y Carl Friedrich Gauss, entre otros, en el siglo XIX (Stigler, 1986), y la profusión de estudios en el siglo XX que culminaron con la teoría axiomática de A. N. Kolmogorov.

El cálculo de probabilidades tiene en su literatura más antigua un gran esfuerzo para la definición formal (matemática) del concepto de probabilidad. Una conclusión parsimoniosa trataría tal concepto en posesión de dos interpretaciones, una llamada *frecuentista* y la otra *grado de creencia o fe* (Folks, 1981). La primera identifica la probabilidad de un evento con la frecuencia relativa de ese evento en una larga secuencia (*long run*) de repeticiones del fenómeno que contiene a este evento, y la segunda con una medida subjetiva de la posibilidad de que tal evento ocurra. Restaría entonces el problema de como *calcular* (o estimar) una probabilidad. Inicialmente presentaremos algunas de las concepciones (o abordajes de estimación) referentes a probabilidades clásica (o Laplaciana), frecuentista (o experimental) y subjetivista, ya que necesitamos tener claridad en los conceptos de cada una de ellas y de sus conexiones para verificar la adecuación del razonamiento probabilístico de los alumnos en cada una de las situaciones que fueron presentadas. El abordaje clásico calcula la probabilidad como una razón entre el número de casos favorables y el número de casos posibles, la frecuentista calcula (estima) como una frecuencia relativa en repeticiones, y la subjetiva estima una probabilidad por determinación arbitraria (aunque calibrada) del analista. Desarrollaremos más detalladamente estos abordajes a continuación.

Podemos decir que el primer intento más sustentado para la definición de la probabilidad con rigor matemático se debe a Laplace a través de la publicación de la obra "Teoríe analytique des probabilités", en 1812. Conocida como concepción clásica, la probabilidad es definida por este autor, como ya afirmamos, como la proporción entre el número de casos favorables en relación con el número total de casos posibles, siempre que todos los resultados sean admitidos como igualmente probables de suceder. Por Godino et al.:

> Los juegos de azar basados sobre dados, monedas, extracción de canicas en urnas, se enmarcan en esta perspectiva teórica por tratarse de fenómenos cuya variable es discreta y porque se supone que siempre es posible seleccionar, como espacio muestral, un conjunto de eventos elementales que garantizan equiprobabilidad (1996).

Otro modo de abordar la probabilidad es en una perspectiva frecuentista, es decir, a partir del cálculo de las frecuencias relativas de ocurrencias de eventos provenientes de experimentos repetidos. La teoría frecuencial, según Godino et al. (1996) fue defendida en 1919 por Richard von Mises a partir de la obra “Probability, Statistics and Truth”; a pesar de que, ya en 1888, John Venn defendía explícitamente el cálculo de probabilidad a través de las frecuencias relativas de los eventos ocurridos. La principal característica de este enfoque es que el valor matemático de la probabilidad emerge del proceso de experimentación.

A pesar de que en este abordaje no se aplica la obligatoriedad de simetría y equiprobabilidad a los experimentos aleatorios, sin embargo, es necesario que haya un número significativo de repeticiones de un experimento y que sus resultados muestren señales de estabilización (Gonçalves, 2004).

Podemos, también, interpretar la probabilidad de forma subjetiva, como expresión de la creencia o percepción personal, y no fundamentada en la frecuencia de ocurrencia. De acuerdo con Canavos la probabilidad subjetiva:

> Trata de medir la confianza que un individuo expresa sobre la veracidad de un fenómeno tomando en cuenta su propia experiencia o conocimiento sobre la situación de estudio. En este caso, diferentes personas pueden atribuir diferentes valores de probabilidad para un mismo evento (1984).

Truran (1994) afirma que “en un dado ‘honesto’ surge *solamente una probabilidad* simétrica, pero hay un número infinito de probabilidades Subjetivas e Experimentales”. En el salón de clases no es suficiente solo hablar de los diferentes tipos de probabilidad; necesitamos elaborar cuestiones como ‘al lanzar un dado 100 veces encontramos una probabilidad Experimental de obtener la cara seis y, ¿cuál es la probabilidad Subjetiva que atribuirías a la obtención de la cara seis y cuál es la razón para esta elección?’ El nivel de la pegunta propuesta genera una variedad de respuestas y, de acuerdo con este autor, tales variaciones fortalecerán las oportunidades educacionales valiosas en la comprensión de la interrelación entre las tres formas de la probabilidad, así como de la naturaleza del modelo matemático.

A nuestro modo de ver, de las tres definiciones de probabilidad, la Clásica exige al alumno una capacidad de pensamiento probabilístico más desarrollada que las otras dos. Pero la probabilidad experimental permite observar el fenómeno aleatorio y hacer predicciones sobre el comportamiento del fenómeno y, como ya referimos anteriormente, Batanero y Godino (2002) establecen esos puntos como orientaciones en el desarrollo del razonamiento probabilístico. Entonces trabajamos con los tres abordajes, adecuando cada uno de ellos a las necesidades de las actividades y bajo la idea de la metodología de Resolución de Problemas.

Resolución de Problemas

Investigaciones al respecto han colocado la metodología de Resolución de Problemas como una de las más recomendadas en la enseñanza de las Matemáticas. Pero al mismo tiempo esta metodología ha enfrentado cierta reticencia en aquellos casos en los que se enfrenta al estudiante con un problema que él encuentra como un planteamiento innegablemente matemático.

Este rechazo puede deberse a malas experiencias previas del alumno con la Matemática, a deformaciones culturales, entre otros factores. Pero se ha encontrado que una posible vía para evitarlo es plantear el problema dentro del contexto del juego. Esto lleva al estudiante a explorar sobre el juego para conocerlo, a establecer y probar sus estrategias y dedicar esfuerzo a encontrar la "solución" que le permita ganar en el juego.

Según Borin,

> La resolución de problemas debe ser la metodología elegida para el trabajo con juegos, por ser más adecuada para desarrollar una postura crítica ante cualquier situación que exija una respuesta. Así, cada hipótesis/estrategia formulada o cada jugada desencadena una serie de cuestionamientos como: ¿Es esa la única jugada posible? Si hubiera alternativas, ¿cuál escoger y por qué escoger esta o aquella? Terminado el problema o la jugada, ¿cuáles fueron los errores y por qué se cometieron? ¿Aún es posible resolver el problema o ganar en el juego, si se cambiaran los datos olas reglas? (1996, p.10).

En este sentido, se ha sugerido diseñar didácticas por medio de juegos, en el entendido de que, para que la metodología de Resolución de Problemas funcione, el juego en sí mismo o la sola intención de enfrentar a los estudiantes con una situación problemática no son suficientes. Debe tenerse una estrategia de enseñanza que permita aprovechar las características de la metodología y del juego para lograr que los alumnos puedan construir sus propios aprendizajes a partir del razonamiento.

Esto puede ser más claro a la luz de lo expuesto por Abrantes (1989) en su artículo "Um (bom) problema (nao) é só...", en referencia a lo que es un problema. Este mismo autor establece lo que es una situación problemática y lo que en un principio no lo es. Con respecto a las primeras habla de que son situaciones en las que el contexto es problemático y al alumno se le estimula a "generar preguntas, hacer conjeturas y, eventualmente, probarlas".

En referencia a las segundas, establece que no son realmente situaciones en las que se esté formulando un problema, pero en las que se pretende la exploración del contexto por parte del alumno. Por Abrantes:

> Explorar tiene aquí el sentido normal de la palabra: entrar en terreno desconocido, tomar datos, detectar diferencias, ser sensibles a las repeticiones y a las analogías, reconocer regularidades y patrones –o por ventura en un sentido aún más fuerte – investigar, tratar de encontrar, tratar de descubrir (1989).

Bajo estas ideas, la estrategia que presentamos implica precisamente que los estudiantes razonen, probabilísticamente, para tomar decisiones respecto a un juego, bajo un esquema de razonamiento inductivo.

Igualmente, el diseño didáctico se orientó dentro de la concepción pedagógica que se ha propuesto para “estrategia didáctica” en el Colegio de Ciencias y Humanidades:

> Una estrategia didáctica es una secuencia de acciones sistemáticas integradas a procedimientos y actividades dirigidas a facilitar los aprendizajes de los alumnos, especificados en el programa de una asignatura; para que el estudiante, de manera consciente y autónoma, tome decisiones que le permitan familiarizarse con la situación o problemática que se le presenta y recupere de su experiencia lo que conoce al respecto.
> En la estrategia, el profesor especifica cuáles son los propósitos, los aprendizajes y las actividades a desarrollar, delimita los tiempos en que se pretende realizar cada una de estas tareas y los recursos necesarios para llevarlas a cabo, la forma en que evaluará el trabajo realizado tanto por él como por el alumno.
> En su estructura la estrategia establece tres etapas: **planeación**, **ejecución** y **evaluación;** sin olvidar que todo este proceso no es algo predeterminado, sino flexible y dinámico.
> Finalmente, toda estrategia asume características específicas dependiendo del contexto educativo en que se sitúa y de la propuesta disciplinaria a la que se aplique, así como al estilo propio de cada profesor (Cazadero, 2006).

En el presente trabajo, con el planteamiento de esta metodología, fueron utilizadas tanto la manipulación con material concreto (simulación física) como la simulación computacional.

Material Concreto

Es importante resaltar que el uso de materiales concretos no puede ser indiscriminado y debe realizarse con plena conciencia de la estrategia y de la manera en la que los materiales pueden apoyar al logro del propósito educativo. Ningún material es válido por sí solo. Monteiro, citado por Ribeiro afirma:

> Algunos profesores creen que el simple hecho de utilizar el material concreto vuelve sus clases ‘constructivistas’ y que eso garantiza el aprendizaje. Muchas veces el estudiante, además de no entender el contenido trabajado, no comprende por qué el material está siendo utilizado (2005).

Además de eso, se debe tener cuidado para que la actividad esté en consonancia con la realidad de los alumnos, ya que si esto no fuera así, el mismo material puede convertirse en una traba pedagógica, un objeto tanto o más abstracto que el concepto que se pretende trabajar. En el caso de los dados, el objeto "dado", la noción de "dado" es muy cercana a la realidad del alumno. Pero en este trabajo introducimos una variante atractiva para los estudiantes: no solo les presentamos el tradicional dado de seis caras, sino también dados de 2, 4, 8, 10, 12, 20, 30 y 100 caras (Figura 1).

Fig. 1. Dados utilizados en la secuencia didáctica

En la manipulación de los dados el alumno utiliza en un principio solo los conceptos de probabilidad clásica, pero repitiendo el mismo proceso una cierta cantidad de veces, naturalmente comienza a transitar de la teoría hacia las nociones de la probabilidad experimental. Por ello, el uso de la simulación lúdica en el aprendizaje puede fomentar los siguientes cuestionamientos: ¿Estaremos siendo tendenciosos de alguna manera? ¿Los experimentos fueron realizados bajo condiciones idénticas? ¿Pueden ser considerados como independientes?

Sobre esos cuestionamientos Carvalho y Oliveira (2002) agregan que no es posible evaluar con precisión la probabilidad, porque el número de ensayos siempre es limitado, a pesar de que podemos contar con la Ley de los Grandes Números. Fischbein (1987), reforzando esa idea, afirma que "la experiencia humana es necesariamente limitada en tiempo, espacio y en el conjunto de posibilidades". El conocimiento científico que se adquiere a partir de las experiencias empíricas siempre es limitado, ya que las conclusiones necesitan ser más amplias que aquellas que obtenemos por observación. En este escenario se refuerza la idea de la necesidad de promover una interacción entre la experimentación real y la computacional.

Simulación Computacional

Los beneficios de utilizar la simulación computacional en contextos educativos son de sobra conocidos y pueden ampliarse si el alumno puede construir el modelo que quiere simular. A través del proceso de modelación, el alumno puede evaluar no solamente el modelo, sino también su propio conocimiento sobre el fenómeno en sí y observar con mejores bases teóricas el fenómeno de convergencia. Esto es, los alumnos aprenden construyendo su propio conocimiento y dándole sentido.

"La modelación es un proceso que es desencadenado por el alumno cuando le es solicitado el reconocimiento del modelo probabilista que mejor representa e interpreta la situación de la realidad que él quiere estudiar" (Coutinho, 2001).

Una ventaja estimulante en el uso de la computadora para el alumno, que ha sido sugerido en la literatura, es su capacidad de realzar la comprensión de conceptos abstractos o difíciles por medio de experiencias inductivas (Kersten, 1983; Dambolena 1986; Gordon y Gordon 1989; Shibli 1990, entre otros).

Actualmente contamos con diversos programas, desde hojas de cálculo hasta softwares más especializados en Probabilidad y Estadística que ejecutan procesos de simulación computacional. Pero la mayoría de ellos presentan un problema: fueron diseñados para "*hacer*" Estadística y no para "*enseñar*" Estadística. En particular, para este trabajo se utilizó el software Fathom (Key Enterprises, 2001), tanto por presentar ambas características, como por ser un programa ya adoptado por el CCH.

El programa tiene una estructura dinámica, muy simple y que facilita la interpretación de resultados, permitiendo que incluso alumnos que no hayan trabajado anteriormente con él, lo hicieran de manera satisfactoria y eficiente.

Un posible factor de una discusión mayor es que muchas escuelas no cuentan con ningún tipo de soporte computacional en el salón de clases para la realización de un procedimiento similar, pero no abordaremos ese problema aquí al no ser el objetivo de nuestro trabajo.

Secuencia Didáctica

Percibimos por medio de una evaluación investigativa y subjetiva que los alumnos del CCH con los que trabajamos (con edades entre los 16 y 18 años) llegaron a esta etapa (pre universitaria) de estudios con conocimientos de probabilidad casi inexistentes o incipientes, aunque con algunas nociones que pudimos rescatar para ayudar al desarrollo del razonamiento probabilístico más "formal".Es decir, ellos ya tenían por lo menos conocimiento de lo que podría ser una probabilidad grande o pequeña, y de lo que ello podría significar en una toma de decisiones.

Frente a este hecho, se la secuencia didáctica[1] propuesta en este trabajo fuera aplicada inmediatamente al inicio de la unidad de Probabilidad, probablemente correríamos el riesgo de "fracasar" pedagógicamente, de modo que los alumnos cursaron inicialmente una unidad programática de Probabilidad elemental de 26 horas.

Solamente después de esa fase es que se presentó la situación problema a los alumnos, que de acuerdo con el objetivo general, tuvo los siguientes objetivos específicos:

- Presentar la definiciones de las probabilidades: clásica, frecuencial y subjetiva, así como sus mecanismos de cálculos;
- Describir espacios muestrales;
- Identificar la regularidad estadística como propiedad de los fenómenos aleatorios;
- Auxiliar a la toma de decisiones basada en el razonamiento probabilístico.

[1] Los retos con los dados que presentamos fueron adaptados de un juego de rol.

Dividimos esta secuencia didáctica en actividades, nombradas como propuestas, y que describiremos y discutiremos simultáneamente, pero antes presentaremos una descripción general que las guió.

Descripción general

Como ya se dijo anteriormente, comenzamos la aplicación de las propuestas después de haberse trabajado los conocimientos elementales de probabilidad. Entonces, de un modo muy informal, hicimos la siguiente propuesta general a los alumnos: ¿Querrían irse ya y dar por terminado el curso ahora? Para eso podemos asignar las calificaciones del curso por medio de un juego de dados.

La idea era que se el alumno ganaba, se le daría la nota más alta y podría dejar el curso, pero si el profesor ganaba, el alumno estaría reprobado, y entonces de un modo o de otro, podría dar por terminado el curso. Comenzamos entonces a presentar una secuencia de cuatro propuestas de juego, siendo que en cada propuesta una tirada valdría cinco puntos y ganaría la partida quien completara primero 100 puntos. Esto es, buscamos presentar indirectamente a los alumnos que habría la necesidad de utilizar nociones de probabilidad experimental, ya que tendrían que repetir el proceso un mínimo de 20 veces para que alguna de las partes ganara y acabar así la partida.

Vale destacar que ese reto, obviamente, fue dado a los alumnos como una situación hipotética, ya que no consideramos pedagógicamente correcto que el profesor negocie las calificaciones con los alumnos de esa manera. Entonces encararon el desafío apenas como un juego y como una manera de involucrarlos en el asunto, sea por la forma en la que se colocó la situación, o por la posibilidad del juego y la apuesta en el salón de clases, o porque encontraron interesante aún siendo irreal el tener una posibilidad de finalizar el curso con un juego, sin tener que pasar por otra forma de evaluación.

A cada pareja de alumnos se le entregó un juego de copias con una serie de preguntas impresas referentes a los desafíos, así como las instrucciones para que, al final de la discusión con respecto a los juegos llevados a cabo con los dados, realizaran la simulación por medio de la computadora también por parejas.

En total se presentaron a los alumnos cuatro desafíos, los cuales se discutieron a medida que iban apareciendo.

Primera propuesta de juego

<u>Descripción</u>

Para el primer juego mostramos al grupo un dado de cuatro y otro de seis caras, y presentamos la siguiente propuesta:

Ustedes van a lanzar el dado de cuatro caras, y nosotros lanzaremos el dado de seis, los dos una sola vez; quien saque el número mayor gana la tirada.

<u>Comentario</u>

Los estudiantes encontraron algo extraño en la propuesta, entonces comenzaron a analizar el juego. Algunos pensaron inicialmente que el juego era honesto y se mostraron dispuestos a participar. Pero la mayoría pidió un poco de tiempo para pensar, pues aún no estaban convencidos de lo idóneo de las reglas. Finalmente un alumno indicó que nosotros teníamos ventaja, pues ellos solo podrían llegar como máximo a un resultado de cuatro, mientras que nosotros podríamos llegar hasta seis. Una vez que se alcanzó esta conclusión, pedimos a los alumnos que la redactaran en sus propias palabras y que la anotaran en las hojas que se les había entregado. Cerramos, entonces, esta fase acordando que de hecho el juego no era equitativo y lanzamos la segunda propuesta.

Segunda propuesta de juego

Descripción

Para el segundo juego, mantuvimos el dado de cuatro caras, utilizamos uno de ocho, y propusimos:

Ahora vamos a lanzar el dado de ocho caras una sola vez y ustedes continúan con el de cuatro caras, pero lo van a lanzar dos veces y sumar los resultados. Solo que ahora gana quien obtenga el número menor.

Comentario

Nuevamente, en un primer momento, un grupo aceptó el juego como equitativo, pero la experiencia de la primera propuesta los dejó más cautelosos y pensaron que podría ser una “trampa numérica” más, entonces la mayoría no accedió tan rápido a jugar. A este respecto, otro grupo comenzó a investigar de qué forma podrían estar siendo “engañados”, y para ello comenzaron a lanzar el dado de cuatro caras con la intención de verificar el comportamiento del juego para la obtención del valor menor. Y de nuevo, un alumno estableció que podríamos obtener un “uno” como valor menor, pero que ellos solo podrían sacar “dos” como resultado menor. Estuvimos de acuerdo de nuevo, así que pedimos a los estudiantes que también anotaran estas observaciones en las copias, con sus propias palabras, y presentamos la tercera propuesta.

Tercera propuesta de juego

Descripción

En el tercer juego tenemos ahora los dados de seis y doce caras, y una propuesta más:

Los otros dos juegos no fueron equitativos. Ahora vamos a hacerlo así, ustedes lanzan el dado de seis caras dos veces y suman los dos resultados; nosotros lanzamos una vez el dado de doce. Y quien saque primero un doce gana.

Comentario

En este punto, los alumnos no tenían ya la menor confianza en lo que decíamos, aunque con todo un mayor número de alumnos de los que se observaron en las otras dos propuestas consideraron el juego como equitativo y se mostraron dispuestos a apostar. Pero aún teníamos el grupo de los altamente desconfiados, entonces comenzamos a instigar el razonamiento de los alumnos haciendo algunas preguntas:

¿Están ustedes totalmente convencidos de que el juego es equitativo? ¿Cómo podrían saber si lo es? ¿Cuál sería la probabilidad de obtener suma de doce? ¿Y cuál sería la nuestra?

La mayoría inmediatamente respondió que tendríamos igual probabilidad y que sería de 1/12. Pero como en sus apuntes de la parte introductoria de probabilidad tenían el experimento de la suma de dos dados de seis caras, se dieron cuenta del error y reconsideraron que en realidad tendrían a penas una probabilidad de 1/36. De nueva cuenta les solicitamos escribir estas observaciones, y pasamos entonces a la última propuesta.

Cuarta propuesta de juego

Descripción

Iniciamos comentando que siempre tomamos el dado con mayor número de caras e que dejamos para los alumnos el de menos número de caras, y con eso ellos podrían estar teniendo la idea de que era ese el hecho que los dejaba siempre en desventaja en las partidas. Entonces entregamos al grupo uno de 20 caras, y nos quedamos con un dado de diez caras, y con la última propuesta:

Ustedes han jugado siempre con el dado de menos caras y nosotros con el dado de más caras. Ahora ustedes van a lanzar el dado de 20 caras una vez, y nosotros lanzaremos el dado de diez caras dos veces y sumaremos los resultados. Ganará quien saque un diez.

Comentario

El cambio de tener ahora el dado con "más lados" causó dudas en algunos acerca de si esta vez tenían la ventaja en la partida, pero tampoco creían más en nuestra disposición de presentarles un juego equitativo. Además, después de la experiencia con la propuesta anterior, la mayoría ya consideraba importante calcular las probabilidades que tendrían cada uno de los jugadores. Después de algunos minutos, muchos percibieron que teníamos la ventaja para obtener diez como resultado e inclusive describieron todas las posibles parejas, un total de nueve, para sacar la suma de diez.

Pero al momento de comparar los resultados, tuvieron dificultad para argumentar que 9/100 es mayor que 1/20, mostrando una deficiencia con el concepto de fracción. Entonces acabaron por apelar a un "falso intuitivo", al decir que nuestra probabilidad era mayor no tanto por la comparación de las fracciones, sino por la experiencia de las propuestas anteriores. Finalmente, con una pequeña intervención de nuestra parte, consiguieron establecer la comparación correcta y argumentar por que el juego no era equitativo. Una vez más, estas observaciones debieron ser redactadas por los estudiantes en sus copias. En seguida, abrimos una discusión con el grupo sobre los juegos presentados.

Discusión con el grupo

Iniciamos la discusión con la siguiente pregunta: *¿Ustedes consideran que no fuimos "honestos" con nuestras propuestas?*

La mayoría consideró que sí, por lo que tuvimos que reforzare dos características de los juegos: que los dados eran honestos y que no hicimos ningún tipo de trampa. Lo que ocurrió es que calculamos previamente todas las probabilidades y optamos siempre por la jugada que nos traería ventaja.

Hecho esto, les pedimos que respondieran a las preguntas de la cinco a la ocho, cuestionándoles en ellas acerca de la equidad del juego y de las probabilidades que ellos consideran que se tienen de ganar en una tirada de cada partida.

De esta forma se concluyó que calcular las probabilidades de algún fenómeno aleatorio puede ser de mucha utilidad en la toma de decisiones, no solo para un tema tan banal como un juego de dados, sino para otros mucho más importantes como algunas pruebas que se hacen en la industria o la salud, entre otros. Hicimos notar también que aunque inconcientemente, indirectamente, ellos tomaron una decisión durante las partidas, que sería de no jugar.

Realizamos entonces otra pregunta, la misma que aparece en la actividad impresa: *Si hubieran jugado, ¿podrían haber ganado alguna partida?*

Respondieron que sí, pero que consideraban las posibilidades muy remotas. Es decir, comenzaron a pensar en los conceptos de aleatoriedad y de experimentación.

Después, discutimos con los alumnos el por qué el desafío se hizo a varias tiradas y no a una sola, y que anotaran sus consideraciones en la pregunta diez.

Antes de pasar a la simulación con la computadora, les pedimos que indicaran que probabilidades consideraban que tendrían de ganar cada una de las cuatro partidas. Después, se discutió sobre la alternativa de revisar estas cantidades a partir de la repetición de muchos lanzamientos de acuerdo a las reglas establecidas, y la pertinencia de simulara estas repeticiones por medio de la computadora (preguntas once a catorce).

Los puntos quince a 37 de la actividad corresponden a las instrucciones de simulación requeridas por el paquete Fathom, que fue el que elegimos para que los estudiantes trabajaran esta parte, así como algunos cuestionamientos respecto a comparar las observaciones realizadas en la simulación con las respuestas que dieran en las preguntas iniciales (propuestas de probabilidades, honestidad del juego, pertinencia de arriesgarse a jugar). En los puntos referentes a las instrucciones para la simulación, colocamos imágenes que permitieran al estudiante manejar el paquete aún siendo que era la primera vez que trabajaban con él.

Finalmente entregamos al grupo los dados involucrados en los juegos anteriores, así como los de 2, 30 y 100 lados, y les pedimos que diseñaran un juego con características similares a los presentados, esto es, que aparentaran ser equitativos, sin serlo en realidad. Además, los alumnos deberían decir cuál sería la tirada para ganar y de qué manera jugarían para tener la ventaja. También les pedimos diseñar otro juego que no solo aparentara equidad, sino que además efectivamente la tuviera. Al final, se discutió de nuevo sobre el uso del cálculo de probabilidades como herramienta en la toma de decisiones; las observaciones al respecto fueron vaciadas por los alumnos en la última pregunta de la actividad.

Verificamos que la mayoría de los alumnos consiguió describir alguna propuesta de juego aceptable, aunque hayan sido apenas reproducciones de la segunda y la cuarta propuestas con modificaciones apenas en las parejas de dados involucrados. Por ejemplo, ellos lanzarían una vez un dado de 30 caras y su oponente tres veces uno de diez caras, usando la suma de los resultados, y ganando quien obtuviera treinta.

Algunos alumnos, aquellos más participativos en las clases, elaboraron juegos más complejos, del estilo de la tercera propuesta.

Pero en contraparte tuvimos alumnos, los de mayores dificultades de aprendizaje, que no consiguieron dar una propuesta de acuerdo a las especificaciones. Así, clasificamos las deficiencias observadas en el razonamiento probabilístico de estos alumnos en tres niveles:

1. No resolvió nada.

2. Presentó alguna propuesta, pero el juego no aparentaba equidad.
3. La propuesta era aceptable, pero no consiguió tener la ventaja.

Conclusiones y trabajos futuros

Percibimos una evolución de mejoría en el razonamiento probabilístico de los alumnos a cada propuesta de juego presentada, siendo que los mismos consiguieron verificar que era posible utilizar el concepto de probabilidad experimental, en el hecho de que siempre simulaban algunas jugadas para comprender el comportamiento teórico del juego. Además, incorporaron la probabilidad subjetiva en el análisis, una vez que desconfiaran del juego intentaban descubrir en dónde estaba sucediendo la “deshonestidad”. Es decir, estas dos concepciones de probabilidad se mostraron útiles siempre como el punto de partida para entender la teoría.

Por otro lado, los alumnos percibieron que apenas la observación y la intuición no eran suficientes en la resolución de las propuestas, siendo necesario de hecho utilizar la teoría Clásica en la decisión final. Como ya se comentó anteriormente, la mayoría de los alumnos consiguió describir su propio juego, saliendo de aquel estado inicial de “inercia” del razonamiento probabilístico.

En la evolución de este proceso de aprendizaje, el uso de la simulación computacional de esos fenómenos mostró ser muy eficaz para promover la dialéctica entre el punto de vista frecuentista y el ponto de vista clásico de probabilidad.

Vislumbramos También con esa secuencia didáctica presentada que los alumnos al comprender bien el concepto de probabilidad podrán tener un mejor desempeño en estudios futuros de los conceptos de Inferencia Estadística. Es decir, un buen desarrollo del razonamiento probabilístico puede ayudar al alumno en la transición hacia el razonamiento estadístico, haciendo así la fusión de lo que se denomina Estocástica. Obviamente, sabemos que para verificar tales impresiones tendríamos que desarrollar un trabajo de formación estadística e investigación continua con ese mismo grupo de alumnos.

Para finalizar, tenemos como propuesta futura la aplicación de esta misma secuencia didáctica con alumnos de Enseñanza Media en Brasil, mas específicamente en la ciudad de Lavras, Minas Gerais. La idea sería hacer posibles comparaciones del razonamiento probabilístico de estos jóvenes, es decir, hacer una averiguación del nivel cognitivo en edades de 16 a 17 años, con posiblemente realidades de enseñanza diferentes.

Bibliografía

Abrantes, P. (1989): Um (bom) problema (não) é (só). *Educação e Matemática*, São Paulo, v. 8, 7-10.

Borin, J. (1996): Jogos e Resolução de Problemas: *Uma estratégia para as aulas de Matemática*. 2. ed. São Paulo. IME-USP.

Batanero; C. Godino, J. (2002): *Estocástica y su didáctica para maestros: Proyecto Edumat-Maestros* .Granada: Universidad de Granada.

Canavos, G. (1984) *Probabilidad y Estadística. Aplicaciones y Métodos*. México: McGraw-Hill.

Carvalho, D.; Oliveira, P. (2007): Quatro concepções de probabilidade manifestadas por alunos ingressantes na Licenciatura em Matemática: clássica, frequentista, subjetiva e formal. *In: 25a. Reunião Anual da Anped,* 2002, Caxambú Anais eletrônicos. Rio de Janeiro. ANPED, 2002. Acesso en enero 2009, disponible en: http://www.anped.org.br/reunioes/25/excedentes25/dionelucchesicarvalhot19.rtf..

Cazadero et al. (2001): *Propuesta de noción de estrategia didáctica*. Universidad Nacional Autónoma de México, Colegio de Ciencias y Humanidades. México, 2006.

Coutinho, Cileda de Q e S. *Introduction aux Situations Aléatoires dès le Collège: de la modélisation à la simulation d'expériences de Bernoulli dans l'environnement informatique Cabri-géomètre II.* 2001. p.338. Thèse (Doctorat), Université Joseph Fourier. Grenoble.

Dambolena, I. G. (1986): Using Simulation in Statistics Courses. Terre Haute (IN), *Collegiate Microcomputer*, v. 4, 339-344.

Dias, A. L. (2004): *Projeto GESTAR:* ensino de probabilidade. Brasília: MEC.

Kersten (1983): Computer Simulations to Clarify Key Ideas of Statistics. *The Two-Year College Mathematics Journal*, Washington, v.14, n. 5, 416-421.

Fathom (2001): Dynamic Statistics (TM) Software. KCP Technologies. William Finzer, Project Director, Programmer and designer. Software.

Fischbein, E. (1987): *Intuition in science and mathematics*. Dordrecht: D.Reidel Publishing Company.

Folks, J. L. (1981): *Ideas of Statistics*. New York: John Wiley and Sons.

Godino, J.; Batanero, C.; Cañizares, M.J. (1996): *Azar y Probabilidad*. España: Editorial Síntesis.

Gonçalves, M.C. (2004): *Concepções de professores e o ensino de probabilidade na escola básica.* 2004.150p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica, São Paulo.

Gordon, F.S.; Gordon, S.P. (1989): Computer Graphics Simulations of Sampling Distributions. Terre Haute (IN), *Collegiate Microcomputer*, v. 7, p.185-189.

Hald, A (2003): *History of Probability and Statistics and their applications before 1750.* New York: John Wiley and Sons.

Lopes, C.E.; Meirelles, E. (2005): Estocástica nas séries iniciais. *In: XVIII Encontro Regional de Professores de Matemática*, 2005, Campinas. Campinas: UNICAMP.

Ribeiro, R. (2005): Material concreto: Um bom aliado nas aulas de Matemática. *Revista Nova Escola*, São Paulo, ed. 184, 40-43.

Stilger, S.M. (1986): *The history of Statistics*. Cambridge: The Belknap Press of Harvard University Press.

Shibli, M.A. (1990): A Two-Stage Exercise on the Binomial Distribution Using MINITAB. Terre Haute (IN), *Collegiate Microcomputer*, v. 8, n.1, 55-60.

Truran, J. (1994): What is the probability of...? *The Australian Mathematics Teacher*, v.50, n.3, 28-29.

Hugo Mael Hernández Trevethan. Profesor Asociado de Tiempo Completo en el Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH) de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), antigüedad de 15 años en esta institución, se ha desempeñado desarrollando los programas de estudio vigentes de Estadística y Probabilidad, libros y materiales didácticos, cursos y materiales en línea, y apoyando a la formación de profesores**.** **animal_estocastico@hotmail.com**.

Verônica Yumi Kataoka, Dra. en Estadística y Experimentación Agropecuaria por la Universidad Federal de Lavras, MG, Brasil. Profesora Doctora en el Programa de Pos Graduación en Educación Matemática de la Universidad Bandeirante de San Paulo (UNIBAN), Línea de investigación Enseñanza y Aprendizaje de La Matemática y sus Innovaciones, con énfasis en la Educación Estadística. **veronicayumi@terra.com.br**.

Marcelo Silva de Oliveira. Dr en Ingeniería (Ingeniería de Producción) por la Universidad de San Paulo. Profesor asociado de la Universidad Federal de Lavras. Tiene experiencia en el área de Probabilidad y Estadística, actuando principalmente en los siguientes temas: Geoestadística, Gestión de Calidad, Control Estadístico de Calidad, Fundamentos de Estadística y Enseñanza de la Estadística. **marcelo.oliveira@ufla.br**.